Статистика – 5. Относительные показатели / Индексы – Экономическая статистика

Д-р Вольфганг Бёме

Январь 2012

Содержание

- 1. Введение
- 2. Дескриптивный одномерный анализ распределений
- 3. Дескриптивный корреляционный и регрессионный анализ
- 4. Дескриптивный анализ временных рядов
- **5. Относительные показатели / Индексы**
- 6. Введение в избранные многомерные методы анализа

- Статистическое программное обеспечение: SPSS

- **5.1 Показатели роста**
- 5.2 Гармоническое среднее
- 5.3 Ценовые, количественные и стоимостные индексы

Показатели роста – Содержание

- **5.1.1 Простые показатели роста**
- 5.1.2 Геометрическое среднее

Простые показатели роста

Исходная точка: Пусть задан временной ряд $\{y_t,\ t = 1, 2, ..., n\}$.

абсолютный прирост	–	$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$
коэффициент роста	–	$q_t = \dfrac{y_t}{y_{t-1}}$
темп роста	–	$r_t = q_t - 1 = \dfrac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} = \dfrac{\Delta y_t}{y_{t-1}}$
приближённо	–	$r_t \approx ln(y_t) - ln(y_{t-1}) = ln\left(\dfrac{y_t}{y_{t-1}}\right)$

Показатели роста – Содержание

- 5.1.1 Простые показатели роста
- **5.1.2 Геометрическое среднее**

Геометрическое среднее

Определение: Пусть X – хотя бы масштабированный по шкале отношений признак с **только положительными** наблюдениями $\{x_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$. Корень n-й степени из произведения всех наблюдений x_i называется **геометрическим средним** $\overline{x}_G$:

$$\overline{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Замечания:

1. Логарифм геометрического среднего:

$$\log(\overline{x}_G) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)$$

$$\ln(\overline{x}_G) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$$

2. Среднее значение для нелинейных процессов роста
3. Вычисление средних (среднегодовых) темпов и коэффициентов роста

Средние показатели роста

Исходная точка: Пусть задан временной ряд $\{y_t,\ t = 1, 2, ..., n\}$.

1. **Среднеабсолютный прирост** – Δy:

$$\Delta y = \frac{y_n - y_1}{n - 1}$$

2. **Средний коэффициент роста** – q:

$$q = \sqrt[n-1]{\prod_{t=2}^{n} q_t} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}$$

3. **Средний темп роста** – r:

$$r = q - 1 = \left(\sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} \right) - 1$$

- 5.1 Показатели роста
- **5.2 Гармоническое среднее**
- 5.3 Ценовые, количественные и стоимостные индексы

Гармоническое среднее

Определение: Пусть X – кардинальный признак с ненулевыми наблюдениями $\{x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Обратное среднее арифметическое из обратных значений $(\frac{1}{x_i})$ называется **гармоническим средним** $\overline{x}_H$:

$$\overline{x}_H = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

Взвешенное обратное среднее арифметическое из обратных различимых значений признака $(\frac{1}{\xi_i})$ называется **взвешенным гармоническим средним** $\overline{x}_H$:

$$\overline{x}_H = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} g_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{1}{\xi_j} \cdot g_j}$$

g_j – веса, соответствующие значениям признака ξ_j

при $\sum\limits_{j=1}^{m} g_j = 1$

Взвешенное среднее арифметическое

Определение: Пусть X – кардинальный признак с **ненулевыми** наблюдениями $\{x_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$. Каждое наблюдение встречается с долей g_i.

Взвешенное среднее арифметическое из различных значений признака (x_i) называется **взвешенным средним арифметическим** $\overline{x}_A$:

$$\overline{x}_A = \sum_{i=1}^{m} g_i \cdot x_i$$

g_i – веса, соответствующие значениям признака x_i

при $$\sum_{i=1}^{m} g_i = 1$$

Гармоническое среднее

Постановка задачи:

Усреднение относительных показателей с дополнительной информацией:

$$x = \frac{y}{z}$$

Дополнительная информация для:

- Числителя $y \rightarrow$ взвешенное гармоническое среднее
- Знаменателя $z \rightarrow$ взвешенное среднее арифметическое

Гармоническое среднее – примеры

Скорости при дополнительной информации о затраченном времени
Если ехать два часа со скоростью 50 км/ч, а затем один час со скоростью 100 км/ч, проезжают **200 км** за **3 часа**; средняя скорость вычисляется как взвешенное среднее арифметическое 50 км/ч и 100 км/ч с весами 2/3 и 1/3. Средняя скорость: $2/3 \times 50$ км/ч $+ 1/3 \times 100$ км/ч $= 66\,2/3$ км/ч.

Скорости при дополнительной информации о пройденном пути
Если ехать 100 км со скоростью 50 км/ч, а затем 100 км со скоростью 100 км/ч, то проезжают **200 км** за **3 часа**, средняя скорость равна $66\,2/3$ км/ч – это гармоническое среднее из 50 и 100.

Другие примеры:

1. **Цены за единицу при заданной информации об объёме продаж**
2. **Удельные затраты при заданной информации о затратах**

- 5.1 Показатели роста
- 5.2 Гармоническое среднее
- **5.3 Ценовые, количественные и стоимостные индексы**

Показатели роста – Содержание

- **5.3.1 Стоимостные индексы**
- 5.3.2 Ценовой и количественный индекс ПААШЕ
- 5.3.3 Ценовой и количественный индекс ЛАСПЕЙРЕСА

Стоимостной объём

Определение: Множество $\Gamma = \{\gamma_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$ отобранных товаров и услуг γ_i называется **потребительской корзиной**.

Определение: Для каждого товара/услуги γ_i потребительской корзины $\Gamma = \{\gamma_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$ статистически собираются цена $P(\gamma_i) = p_i$ и количество $Q(\gamma_i) = q_i$, и образуются следующие векторы:

$$\begin{aligned} p^T &= (p_1, p_2, ..., p_n) \\ q^T &= (q_1, q_2, ..., q_n) \end{aligned}$$

Скалярное произведение $p^T q$ называется **стоимостным объёмом** потребительской корзины Γ.

$$p^T q = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i = \sum_{i=1}^{n} w_i, \quad w_i \text{ – стоимость товара } i$$

Динамические относительные показатели

Определение: Для каждого товара/услуги γ_i потребительской корзины Г собираются цена p_i и количество q_i для базового периода $t = 0$ (p_{i0}, q_{i0}) и отчётного периода $t = 1$ (p_{i1}, q_{i1}). Образуются следующие динамические относительные показатели (индивидуальные индексы):

$$m_i^p = \frac{p_{i1}}{p_{i0}} \Rightarrow \text{индивидуальный ценовой индекс}$$

$$m_i^q = \frac{q_{i1}}{q_{i0}} \Rightarrow \text{индивидуальный количественный индекс}$$

$$m_i^w = \frac{p_{i1} q_{i1}}{p_{i0} q_{i0}} \Rightarrow \text{индивидуальный стоимостной индекс}$$

Стоимостной индекс

Определение: Для каждого товара/услуги γ_i потребительской корзины Г собираются цена $P(\gamma_i) = p_i$ и количество $Q(\gamma_i) = q_i$ для базового периода $t = 0$ и отчётного периода $t = 1$. Относительный показатель I^W называется **динамическим стоимостным индексом** потребительской корзины Г:

$$I^W = \frac{p_1^T \cdot q_1}{p_0^T \cdot q_0} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} = \frac{W_1}{W_0}$$

Выполняется:

$$\begin{aligned} \Delta^W &= W_1 - W_0 \Rightarrow \text{прирост} \\ r^W &= I^W - 1 \Rightarrow \text{темп прироста} \end{aligned}$$

Пример

Количество и цены трёх товаров за два года ($t = 0, 1$)

(1) Количество (штук):

Товар	t_0	t_1
A	6	8
B	12	10
C	6	7

(2) Цены (евро/штука):

Товар	t_0	t_1
A	2	3
B	6	8
C	5	6

Показатели роста – Содержание

- 5.3.1 Стоимостные индексы
- **5.3.2 Ценовой и количественный индекс ПААШЕ**
- 5.3.3 Ценовой и количественный индекс ЛАСПЕЙРЕСА

Ценовой и количественный индекс ПААШЕ

Определение: Для каждого товара/услуги γ_i потребительской корзины Г собираются цена p_i и количество q_i для базового периода $t = 0$ и отчётного периода $t = 1$.

Относительный показатель $I^{p,PAA}$ называется **ценовым индексом ПААШЕ**:

$$I^{p,PAA} = \frac{p_1^T \cdot q_1}{p_0^T \cdot q_1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}}$$

Относительный показатель $I^{q,PAA}$ называется **количественным индексом ПААШЕ**:

$$I^{q,PAA} = \frac{p_1^T \cdot q_1}{p_1^T \cdot q_0} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}}$$

Пример

Количество и цены трёх товаров за два года ($t = 0, 1$)

(1) Количество (штук):

Товар	t_0	t_1
A	6	8
B	12	10
C	6	7

(2) Цены (евро/штука):

Товар	t_0	t_1
A	2	3
B	6	8
C	5	6

Показатели роста – Содержание

- 5.3.1 Стоимостные индексы
- 5.3.2 Ценовой и количественный индекс ПААШЕ
- **5.3.3 Ценовой и количественный индекс ЛАСПЕЙРЕСА**

Ценовой и количественный индекс ЛАСПЕЙРЕСА

Определение: Для каждого товара/услуги γ_i потребительской корзины Г собираются цена p_i и количество q_i для базового периода $t = 0$ и отчётного периода $t = 1$.

Относительный показатель $I^{p,LAS}$ называется **ценовым индексом ЛАСПЕЙРЕСА**:

$$I^{p,LAS} = \frac{p_1^T \cdot q_0}{p_0^T \cdot q_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}$$

Относительный показатель $I^{q,LAS}$ называется **количественным индексом ЛАСПЕЙРЕСА**:

$$I^{q,LAS} = \frac{p_0^T \cdot q_1}{p_0^T \cdot q_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}$$

Ценовой и количественный индекс ЛАСПЕЙРЕСА

Связь ценового индекса ЛАСПЕЙРЕСА со средним арифметическим:

$$I^{p,LAS} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i^p a_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i0}} = \sum_{i=1}^{n} m_i^p a_{i0}$$

Связь количественного индекса ЛАСПЕЙРЕСА со средним арифметическим:

$$I^{q,LAS} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i^q a_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i0}} = \sum_{i=1}^{n} m_i^q a_{i0}$$

Замечание: a_{i0} – веса, при $\sum_{i=1}^{n} a_{i0} = 1$

Пример

Количество и цены трёх товаров за два года ($t = 0, 1$)

(1) Количество (штук):

Товар	t_0	t_1
A	6	8
B	12	10
C	6	7

(2) Цены (евро/штука):

Товар	t_0	t_1
A	2	3
B	6	8
C	5	6

Системы индексов

Связь ценовых/количественных индексов ПААШЕ/ЛАСПЕЙРЕСА со стоимостным индексом:

$$I^{W} = I^{p,PAA} \cdot I^{q,LAS} = I^{q,PAA} \cdot I^{p,LAS}$$