



Статистика – 4. Анализ временных рядов. Часть 2 – сокращённая версия

Д-р Вольфганг Бёме

Январь 2013





- 4.1 Скользящие средние
- 4.2 Экспоненциальное сглаживание
- 4.3 Трендовые функции
- 4.4 Фильтры
- **4.5 Сезонная корректировка**
- 4.6 Автокорреляция
- 4.7 Перспективы: Множественный анализ временных рядов

4.5 Методы сезонной корректировки – Содержание

- **4.5.1 Вводный пример**
- 4.5.2 Постановка задачи
- 4.5.3 Простая мультипликативная сезонная корректировка
- 4.5.4 Простая аддитивная сезонная корректировка
- 4.5.5 Census-X12
- 4.5.6 Прогнозирование с помощью методов сезонной корректировки

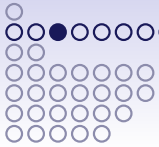
Временные ряды – напоминание

Внутригодовой временной ряд $\{y_t,\ t = 1, 2, ..., n\}$ является результатом взаимодействия следующих компонент:

- Гладкая компонента (g_t) (трендовая (T_t), конъюнктурная или циклическая (Z_t))
- Сезонная компонента (s_t)
- Нерегулярная компонента (i_t) (остаточная величина)

Две модели временного ряда:

1. Аддитивная связь: $y_t = g_t + s_t + i_t$
2. Мультипликативная связь: $y_t = g_t \cdot s_t \cdot i_t$





Прежние подходы при сезонном влиянии

1. Экспоненциальное сглаживание с сезонной компонентой
2. Сезонная разность

Экспоненциальное сглаживание с сезонной компонентой

Цель: учёт линейного тренда и сезонной компоненты

Пусть задан временной ряд $\{y_t,\ t = 1, 2, \ldots, n\}$ и трендовая компонента T_t. Сглаживание по ХОЛТУ:

$$\begin{aligned} y_t^* &= \alpha y_t + (1-\alpha)(y_{t-\mathbf{1}}^* + T_{t-\mathbf{1}}) \\ T_t &= \beta(y_t^* - y_{t-\mathbf{1}}^*) + (1-\beta)T_{t-\mathbf{1}} \end{aligned}$$

Введение компоненты $c_t \Longrightarrow$ модифицированный подход:
Аддитивная сезонная компонента:

$$\begin{aligned} y_t^* &= \alpha(y_t - c_{t-s}) + (1-\alpha)(y_{t-\mathbf{1}}^* + T_{t-\mathbf{1}}) \\ T_t &= \beta(y_t^* - y_{t-\mathbf{1}}^*) + (1-\beta)T_{t-\mathbf{1}} \\ c_t &= \gamma(y_t - y_t^*) + (1-\gamma)c_{t-s} \end{aligned}$$

Замечания:

1. $s = 12$ для месячных данных
2. $s = 4$ для квартальных данных ...
3. Мультипликативная связь также возможна

Пример

Начало строительства жилья в США: 1959:1 – 1991:4, месячные данные

Выборка: 1985:1 – 1988:12
Прогнозный период: 1989:1 – 1989:12

- Excel: hs.xls
- SPSS: hs.sav

Метод сглаживания 1

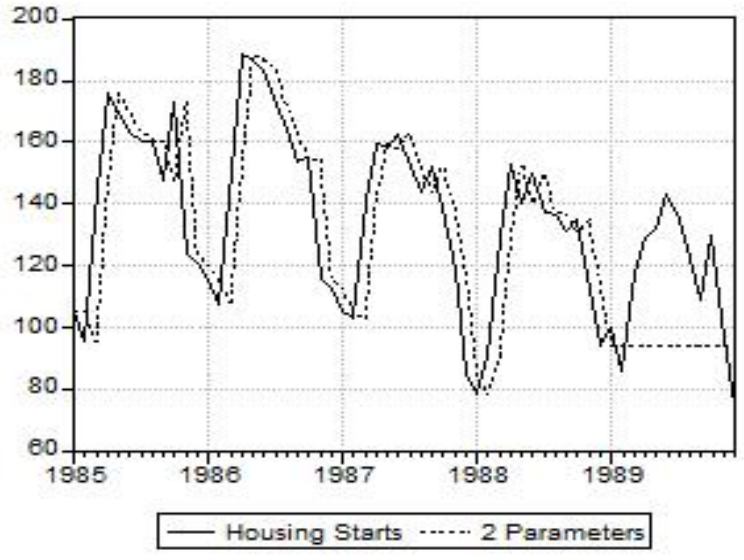
Beispiel HS.wf1 1985:1 bis 1988:12

Grafische Verifikation des Saisonmusters:



Метод сглаживания 2

Parameters:	Alpha		1.0000
	Beta		0.0000
Sum of Squared Residuals			19521.35
Root Mean Squared Error			20.16667
End of Period Levels:		Mean	94.20000
		Trend	-0.012500



Prognose: $y(T+k) = 94{,}2 - 0{,}013 * k$

k=1: 94,2
k=1: 94,2
usw.

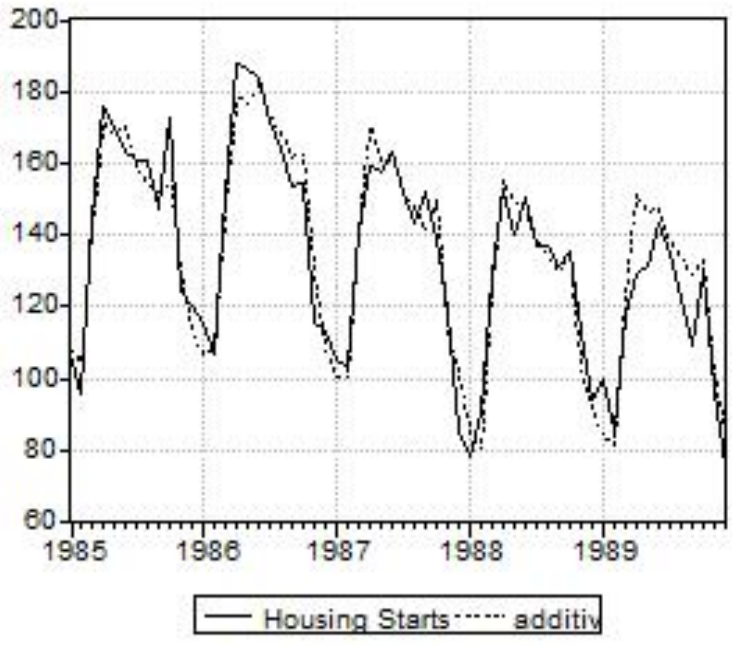
Метод сглаживания 3

Glättung

(a) multiplikativ

Date: 05/19/02 Time: 17:19				
Sample: 1985:01 1988:12				
Included observations: 48				
Method: Holt-Winters Additive Seasonal				
Original Series: HS				
Forecast Series: HSSM				
Parameters:	Alpha			0.4000
	Beta			0.0000
	Gamma			0.0000
Sum of Squared Residuals				2299.959
Root Mean Squared Error				6.922125
End of Period Levels:		Mean		124.9978
		Trend		-0.587268
		Seasonals:	1988:01	-40.81539
			1988:02	-42.40313
			1988:03	0.784144
			1988:04	28.99641
			1988:05	24.20868
			1988:06	26.02095
			1988:07	17.15822
			1988:08	13.44549
			1988:09	9.007755
			1988:10	13.89503
			1988:11	-18.14271
			1988:12	-32.15544

Метод сглаживания 4



Prognose $y(T+k) = 124{,}9978 + 6{,}922125*k + c(T+k)$

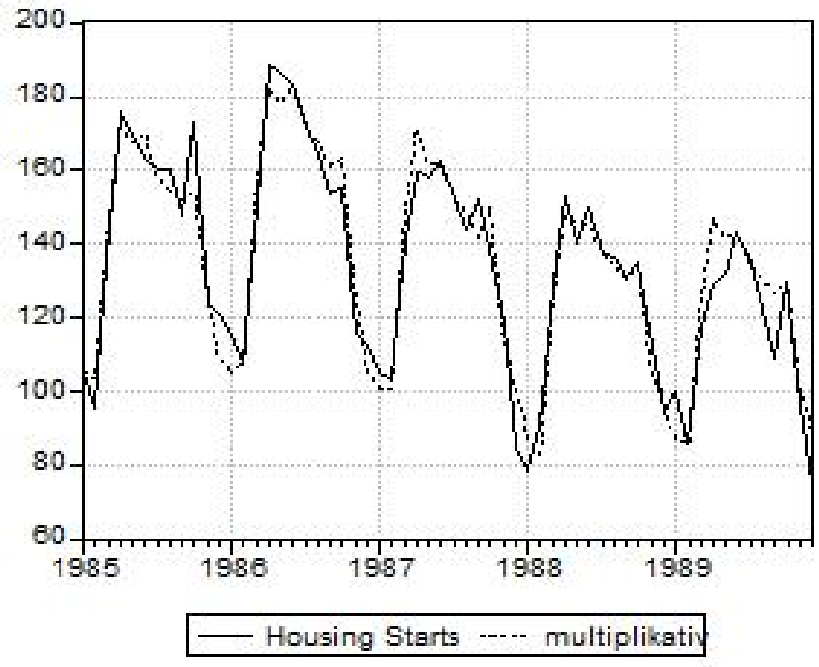
k=1 : $124{,}9978 - 0.587268 - 40{,}81539 = 83{,}595$
k=2 : $124{,}9978 - 0.587268*2 - 42{,}40313 = 81{,}420$
usw.

Метод сглаживания 5

(b) multiplikativ

Date: 05/19/02 Time: 17:54				
Sample: 1985:01 1988:12				
Included observations: 48				
Method: Holt-Winters Multiplicative Seasonal				
Original Series: HS				
Forecast Series: HSSM				
Parameters:	Alpha			0.3700
	Beta			0.0000
	Gamma			0.0000
Sum of Squared Residuals				2195.248
Root Mean Squared Error				6.762713
End of Period Levels:		Mean		124.0062
		Trend		-0.587268
		Seasonals:	1988:01	0.709090
			1988:02	0.700921
			1988:03	1.006384
			1988:04	1.206067
			1988:05	1.170535
			1988:06	1.187651
			1988:07	1.122962
			1988:08	1.097272
			1988:09	1.067033
			1988:10	1.101147
			1988:11	0.870055
			1988:12	0.760885

Метод сглаживания 6

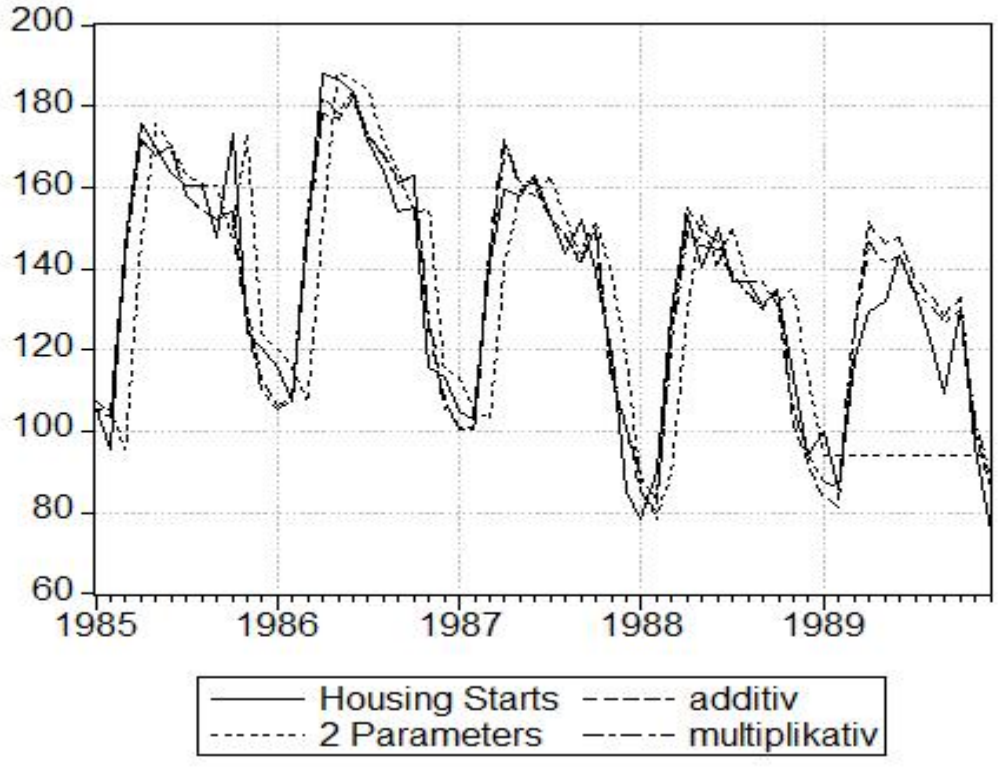


Prognose $y(T+k) = 124{,}9978 + 6{,}922125 * k * c(T+k)$

k=1 : (124,9978 -0.587268)* 0.709090 = 87,51
k=2 : (124,9978 -0.587268)* 0.700921 = 86,10
usw.

Метод сглаживания 7

5. Vergleichende Grafik



Сезонная разность

Определение: Пусть задан временной ряд $\{y_t,\ t = 1, 2, ..., n\}$.

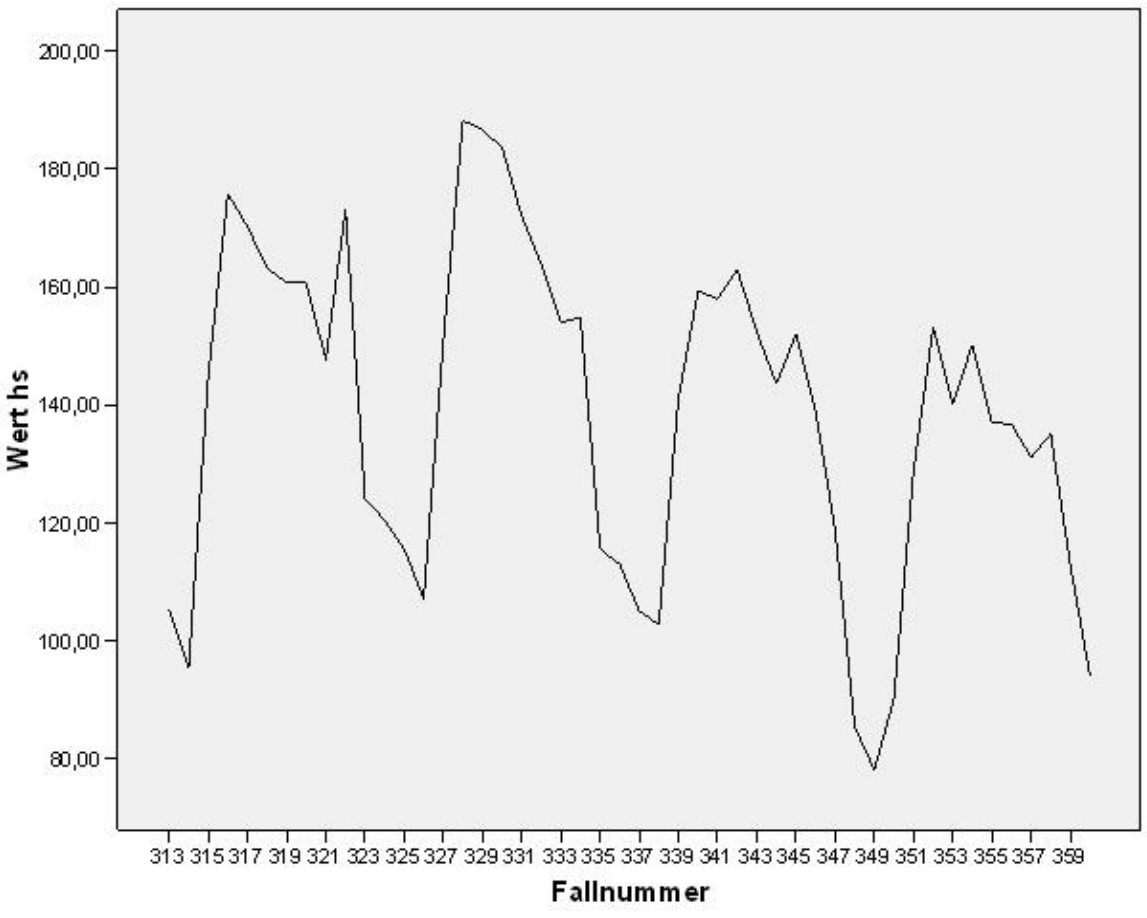
Идентифицированная периодичность s

Разностный фильтр: $\Delta y_t = y_t - y_{t-s}$

1. $s = 12$ для месячных данных
2. $s = 4$ для квартальных данных ...

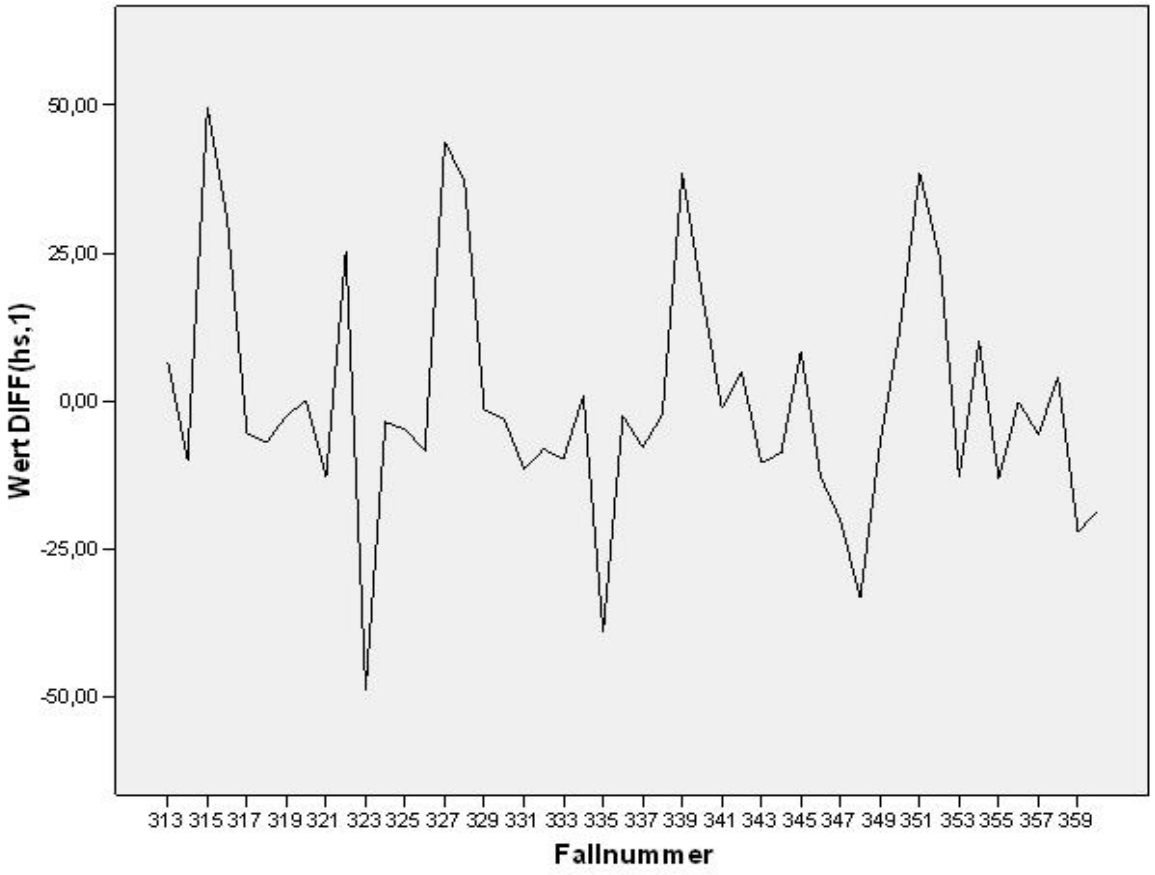
Сезонная разность 1

Исходный ряд: начало строительства жилья



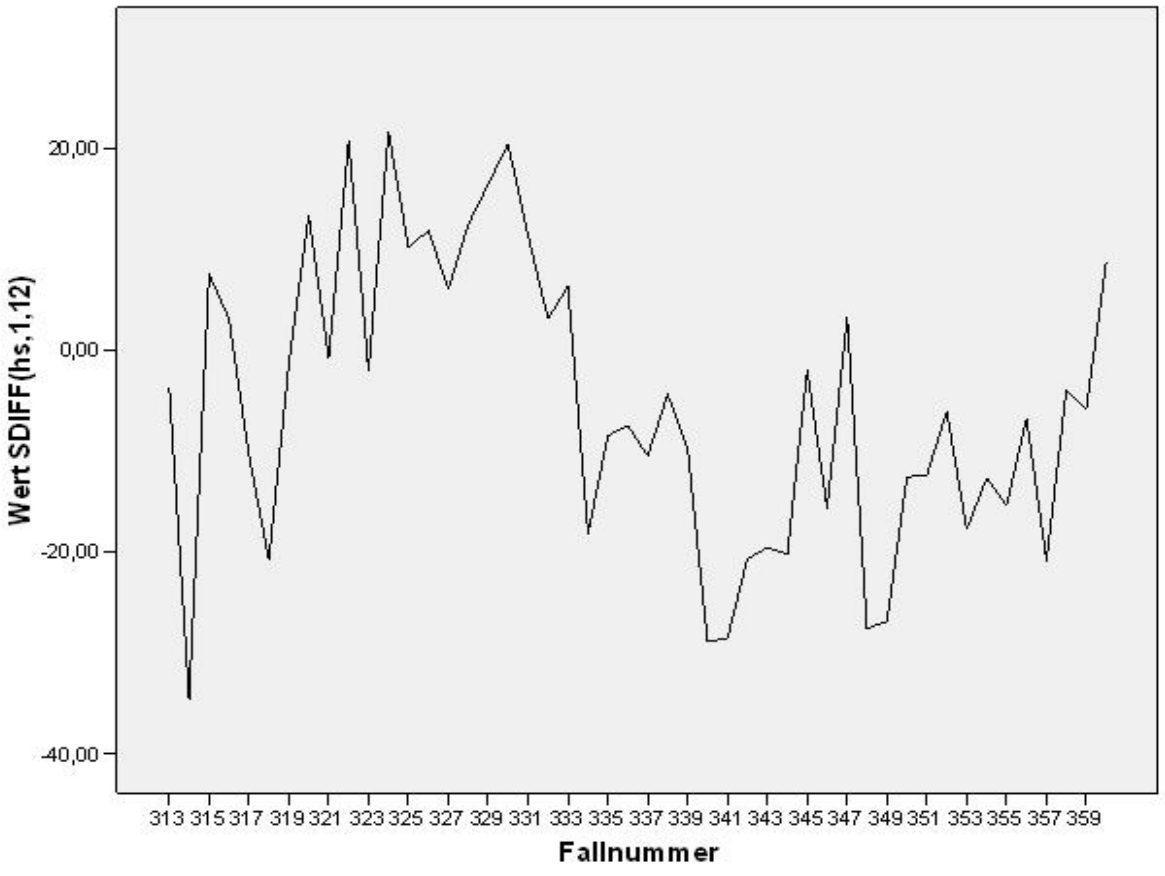
Сезонная разность 2

Простые разности: начало строительства жилья



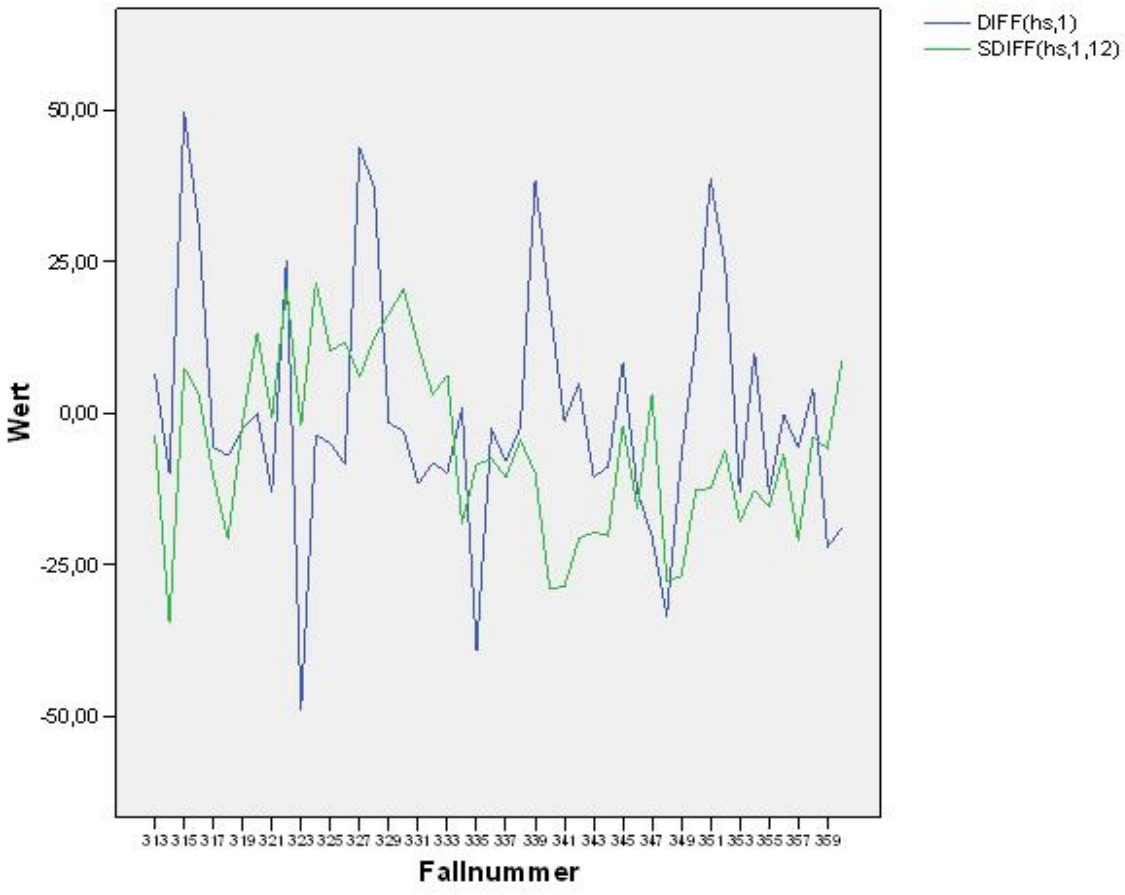
Сезонная разность 3

Сезонные разности: начало строительства жилья



Сезонная разность 4

Сезонные vs. простые разности: начало строительства жилья







4.5 Методы сезонной корректировки – Содержание

- 4.5.1 Вводный пример
- **4.5.2 Постановка задачи**
- 4.5.3 Простая мультипликативная сезонная корректировка
- 4.5.4 Простая аддитивная сезонная корректировка
- 4.5.5 Census-X12
- 4.5.6 Прогнозирование с помощью методов сезонной корректировки





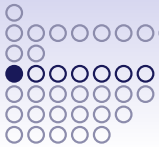
Постановка задачи

Предположение при «Сглаживании по ХОЛТУ»:

- Линейный тренд
- Аддитивная / мультипликативная сезонная компонента – временно зависимая
- $\Rightarrow \; y_t = g_t + s_t + i_t$ или $y_t = g_t \cdot s_t \cdot i_t$

Новое рассмотрение:

- Линейный тренд
- Аддитивная / мультипликативная сезонная компонента – временно независимая
- $\Rightarrow \; y_t = g_t + s + i_t$ или $y_t = g_t \cdot s \cdot i_t$





4.5 Методы сезонной корректировки – Содержание

- 4.5.1 Вводный пример
- 4.5.2 Постановка задачи
- **4.5.3 Простая мультипликативная сезонная корректировка**
- 4.5.4 Простая аддитивная сезонная корректировка
- 4.5.5 Census-X12
- 4.5.6 Прогнозирование с помощью методов сезонной корректировки

4.5.3 Простая мультипликативная сезонная корректировка

Вычисление сезонной компоненты (основа: скользящие средние):

- Вычисление скользящего среднего:

$$x_t = \underbrace{0{,}5y_{t-6} + y_{t-5} + \ldots + y_t + \ldots + y_{t+5} + 0{,}5y_{t+6}}_{\text{13 значений}} /12 \text{ для месячных данных}$$

$$x_t = \underbrace{0{,}5y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + 0{,}5y_{t+2}}_{\text{5 значений}} /4 \text{ для квартальных данных}$$

- Вычисление отношения:

$$\tau_t = \frac{y_t}{x_t}$$

- Вычисление сезонных индексов i_m для каждого месяца или i_q для каждого квартала:
  - i_m – среднее всех наблюдений месяца m
  - i_q – среднее всех наблюдений квартала q





4.5.3 Простая мультипликативная сезонная корректировка

Продолжение: вычисление сезонной компоненты (основа: скользящие средние):

- Вычисление сезонного фактора s_m или s_q
  Использование геометрического среднего:

$$s_m = \frac{i_m}{\sqrt[12]{i_1 \cdot i_2 \cdots i_{12}}}$$

$$s_q = \frac{i_q}{\sqrt[4]{i_1 \cdot i_2 \cdots i_4}}$$

- Сезонные факторы: s_m или s_q
- Сезонно скорректированный ряд $(\widetilde{y_t})$ вычисляется:

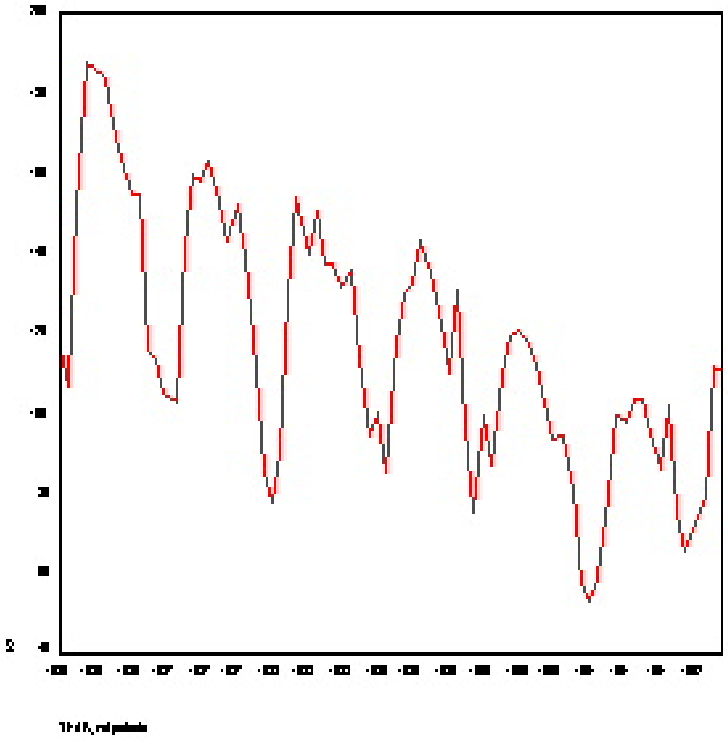
$$\widetilde{y_t} = \frac{y_t}{s_m} \text{ или}$$

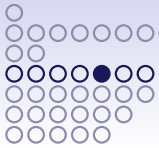
$$\widetilde{y_t} = \frac{y_t}{s_q}$$

Сезонная разность

Цель: устранение сезонного эффекта

Вводный пример: начало строительства жилья в США, 1959–1990







Мультипликативная сезонная корректировка 1

Beispiel: Saisonbereinigung auf Basis von Moving Average (multiplikativ)

Beispiel: Housing starts (1959:1 bis 1989:12)

Date: 05/21/02 Time: 14:11	
Sample: 1959:01 1989:12	
Included observations: 372	
Ratio to Moving Average	
Original Series: HS	
Adjusted Series: HSSA1	
Scaling Factors:	
1	0.697993
2	0.720854
3	1.014795
4	1.185314
5	1.228217
6	1.215392
7	1.151345
8	1.142378
9	1.073383
10	1.119726
11	0.926476
12	0.755758

Мультипликативная сезонная корректировка 2

hssa1(t+s) = hs(t+s)/sf(s)

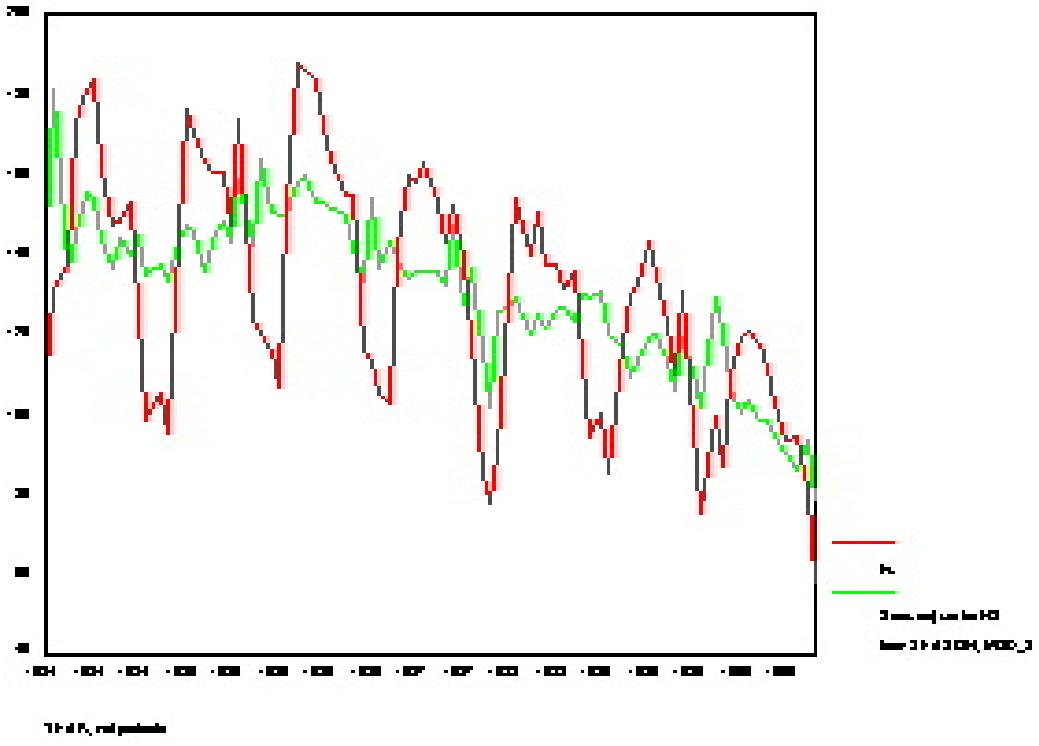
sf(s) Scaling Factors

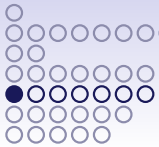
Für 1989 (S = 1,2,...,12)

hs(t+s)	sf(s)	hssa(t+s)
100.1000	0.697993	143.411140742
85.80000	0.720854	119.025564186
117.8000	1.014795	116.082599085
129.4000	1.185314	109.16937157
131.7000	1.228217	107.228614222
143.2000	1.215392	117.822058702
134.7000	1.151345	116.993620841
122.4000	1.142378	107.144940708
109.3000	1.073383	101.82760742
130.1000	1.119726	116.189130455
96.60000	0.926476	104.266054678
75.00000	0.755758	99.238086737

Мультипликативная сезонная корректировка

Простая мультипликативная сезонная корректировка
Исходный ряд vs. сезонно скорректированный ряд







4.5 Методы сезонной корректировки – Содержание

- 4.5.1 Вводный пример
- 4.5.2 Постановка задачи
- 4.5.3 Простая мультипликативная сезонная корректировка
- **4.5.4 Простая аддитивная сезонная корректировка**
- 4.5.5 Census-X12
- 4.5.6 Прогнозирование с помощью методов сезонной корректировки

4.5.4 Простая аддитивная сезонная корректировка

Вычисление сезонной компоненты (основа: скользящие средние):

- Вычисление скользящего среднего:

$$x_t = \underbrace{0{,}5y_{t-6} + y_{t-5} + \ldots + y_t + \ldots + y_{t+5} + 0{,}5y_{t+6}}_{\text{13 значений}} /12 \text{ для месячных данных}$$

$$x_t = \underbrace{0{,}5y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + 0{,}5y_{t+2}}_{\text{5 значений}} /4 \text{ для квартальных данных}$$

- Вычисление разности:

$$d_t = y_t - x_t$$

- Вычисление сезонных индексов i_m для каждого месяца или i_q для каждого квартала:
  - i_m – среднее всех наблюдений месяца m
  - i_q – среднее всех наблюдений квартала q

4.5.4 Простая аддитивная сезонная корректировка

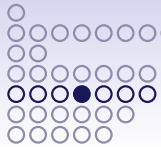
Продолжение: вычисление сезонной компоненты (основа: скользящие средние):

- Вычисление сезонного фактора s_m или s_q:

$$\begin{aligned} s_m &= i_m - \sqrt[12]{i_1 \cdot i_2 \cdots i_{12}} \\ s_q &= i_q - \sqrt[4]{i_1 \cdot i_2 \cdots i_4} \end{aligned}$$

- Сезонные факторы: s_m или s_q
- Сезонно скорректированный ряд $(\widetilde{y_t})$ вычисляется:

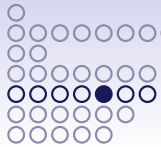
$$\begin{aligned} \widetilde{y_t} &= y_t - s_m \text{ или} \\ \widetilde{y_t} &= y_t - s_q \end{aligned}$$



Аддитивная сезонная корректировка 3

Additiv

Date: 05/21/02 Time: 15:59	
Sample: 1959:01 1989:12	
Included observations: 372	
Difference from Moving Average	
Original Series: HS	
Adjusted Series: HSSA	
Scaling Factors:	
1	-40.79816
2	-37.90427
3	-0.094688
4	20.92559
5	26.66948
6	24.84267
7	16.37115
8	15.81406
9	6.452812
10	12.65295
11	-11.67844
12	-33.25316





Аддитивная сезонная корректировка 4

hssa1(t+s) = hs(t+s)-sf(s)

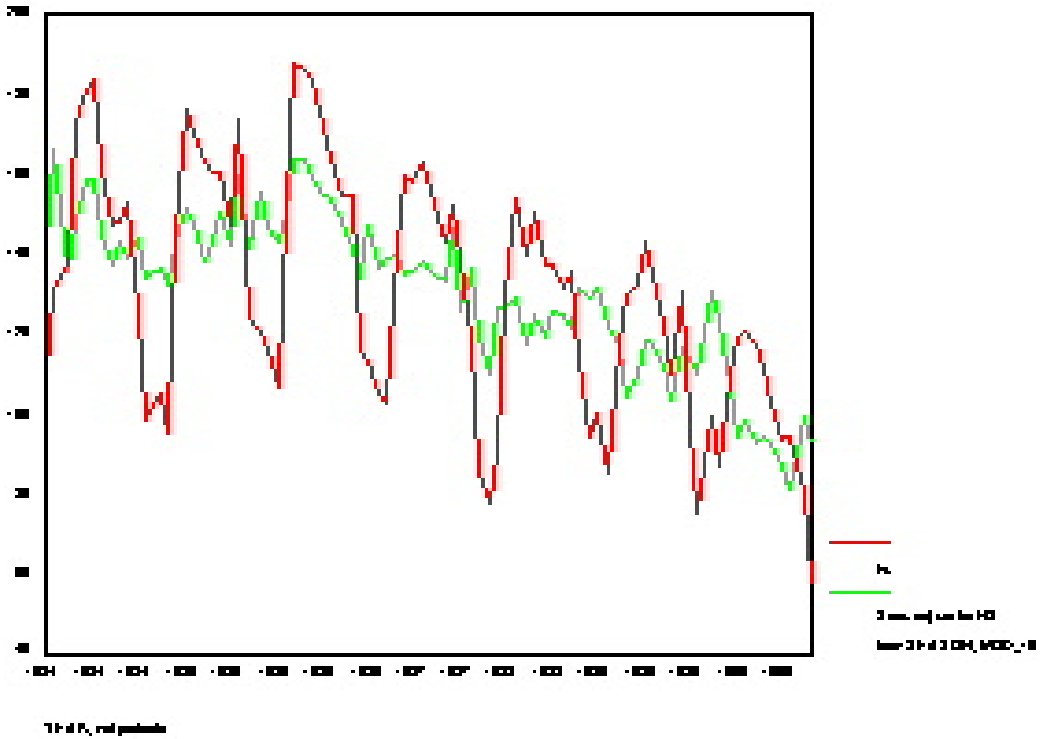
sf(s) Scaling Factors

Für 1989 (S = 1,2,...,12)

hs(t+s)	sf(s)	hssa(t+s)
100.1000	-40.79816	140.898158335
85.80000	-37.90427	123.704273941
117.8000	-0.094688	117.894690881
129.4000	20.92559	108.474403918
131.7000	26.66948	105.030518549
143.2000	24.84267	118.357322837
134.7000	16.37115	118.328849789
122.4000	15.81406	106.585938927
109.3000	6.452812	102.847191076
130.1000	12.65295	117.447054319
96.60000	-11.67844	108.278435968
75.00000	-33.25316	108.253159933

Аддитивная сезонная корректировка

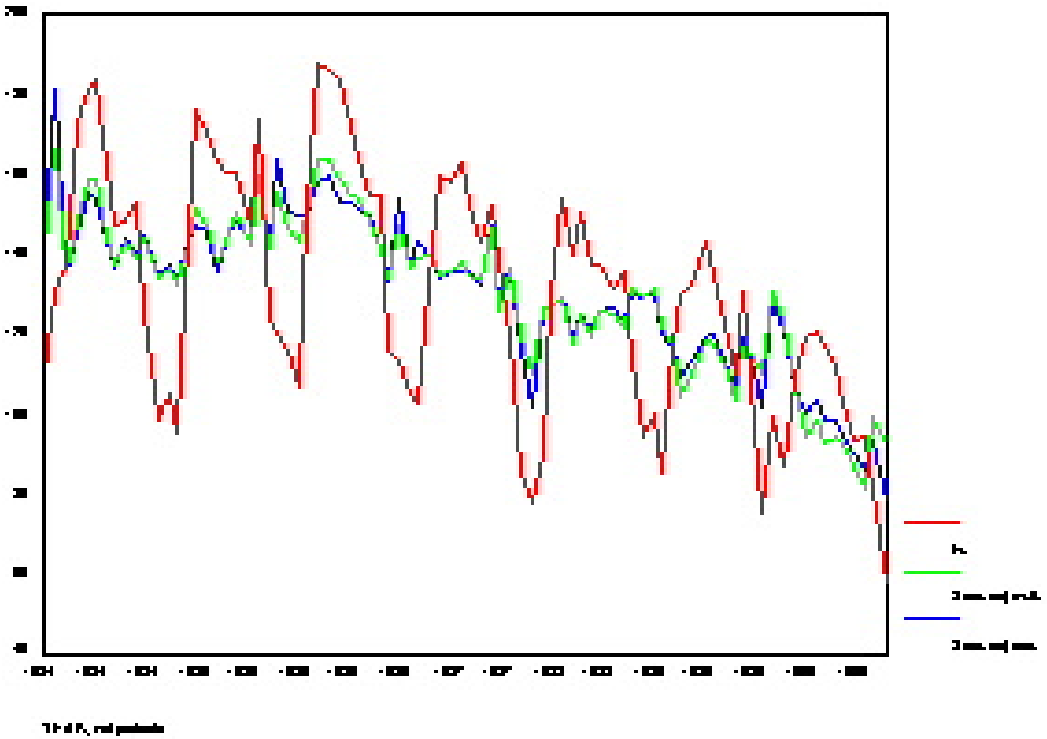
Простая аддитивная сезонная корректировка
Исходный ряд vs. сезонно скорректированный ряд



Мультипликативная и аддитивная сезонная корректировка

Простая сезонная корректировка

Исходный ряд vs. сезонно скорректированные ряды (мульт. и адд.)







4.5 Методы сезонной корректировки – Содержание

- 4.5.1 Вводный пример
- 4.5.2 Постановка задачи
- 4.5.3 Простая мультипликативная сезонная корректировка
- 4.5.4 Простая аддитивная сезонная корректировка
- **4.5.5 Census-X12**
- 4.5.6 Прогнозирование с помощью методов сезонной корректировки

Сезонная корректировка Census-X12 – 1

Census X-12

multiplikativ

HS_X12_M_SA – saisonbereinigte Werte

HS_X12_M_IR - irreguläre Komponente

HS_X12_M_SF – Saisonfaktor

HS_X12_M_TC – Trend-Konjunkturkomponente

hs	HS_X12_M_IR	HS_X12_M_SA	HS_X12_M_SF	HS_X12_M_TC
100.099998474	**1.07945870516**	**132.997882321**	**0.752643551362**	**123.207939021**
85.8000030518	0.99317930392	119.601745243	0.717380861604	120.42311471
117.800003052	0.99016612352	116.864103768	1.00800844103	118.024744527
129.399993896	0.949702731962	110.435010936	1.17172980561	116.283766719
131.699996948	0.993509308636	114.498960142	1.15022876003	115.246992803
143.199996948	1.0279524812	117.902424511	1.2145636321	114.696376211
134.699996948	1.03905809087	118.451114798	1.13717795884	113.998549108
122.400001526	0.999489728687	112.416521393	1.08880794397	112.473913604
109.300003052	0.961049464038	105.890179009	1.03220151363	110.181819949
130.100006104	1.11862810506	120.489634717	1.07976098035	107.711968054
96.5999984741	1.0012531558	105.582583182	0.914923612994	105.450437354
75	0.992409070372	102.691587848	0.730342198149	103.477075042

Сезонная корректировка Census-X12 – 2

Zerlegung der saisonbereinigten Reihe in ursprüngliche Reihe und Saisonfaktor

HS_X12_M_SA = HS / HS_X12_M_SF

132.997882321 = 100.099998474 / 0.752643551362

Zerlegung der saisonbereinigten Reihe in Trend_Konjunkturkomponente und irreguläre Komponente

HS_X12_M_SA = HS_X12_M_TC * HS_X12_M_IR

132.997882321 = 123.207939021 * 1.07945870516

Сезонная корректировка Census-X12 – 3

Census X-12

additiv

HS_X12_AD_SA – saisonbereinigte Werte

HS_X12_AD_IR - irreguläre Komponente

HS_X12_AD_SF – Saisonfaktor

HS_X12_AD_TC – Trend-Konjunkturkomponente

hs	HS_X12_AD_IR	HS_X12_AD_SA	HS_X12_AD_SF	HS_X12_AD_TC
100.099998474	**14.3633220247**	**138.976178463**	**-38.8761799895**	**124.612856439**
85.8000030518	1.12491460135	123.201774319	-37.4017712673	122.076859718
117.800003052	-2.68274971687	116.708311811	1.09169124096	119.391061528
129.399993896	-13.962104687	102.727072978	26.6729209176	116.689177665
131.699996948	-3.12015753281	111.384148427	20.3158485208	114.50430596
143.199996948	1.82025154877	115.013680443	28.1863165054	113.193428894
134.699996948	4.03925841461	116.611186157	18.0888107914	112.571927742
122.400001526	-1.35135374085	110.764539259	11.6354622671	112.115893
109.300003052	-6.20124554746	105.300523338	3.99947971376	111.501768886
130.100006104	6.76866410555	117.616276962	12.4837291418	110.847612857
96.5999984741	-1.83146530554	108.471445941	-11.8714474671	110.302911247
75	-0.303720834985	109.336087479	-34.3360874785	109.639808314

Сезонная корректировка Census-X12 – 4

Zerlegung der saisonbereinigten Reihe in ursprüngliche Reihe und Saisonfaktor

HS_X12_AD_SA = HS - HS_X12_AD_SF

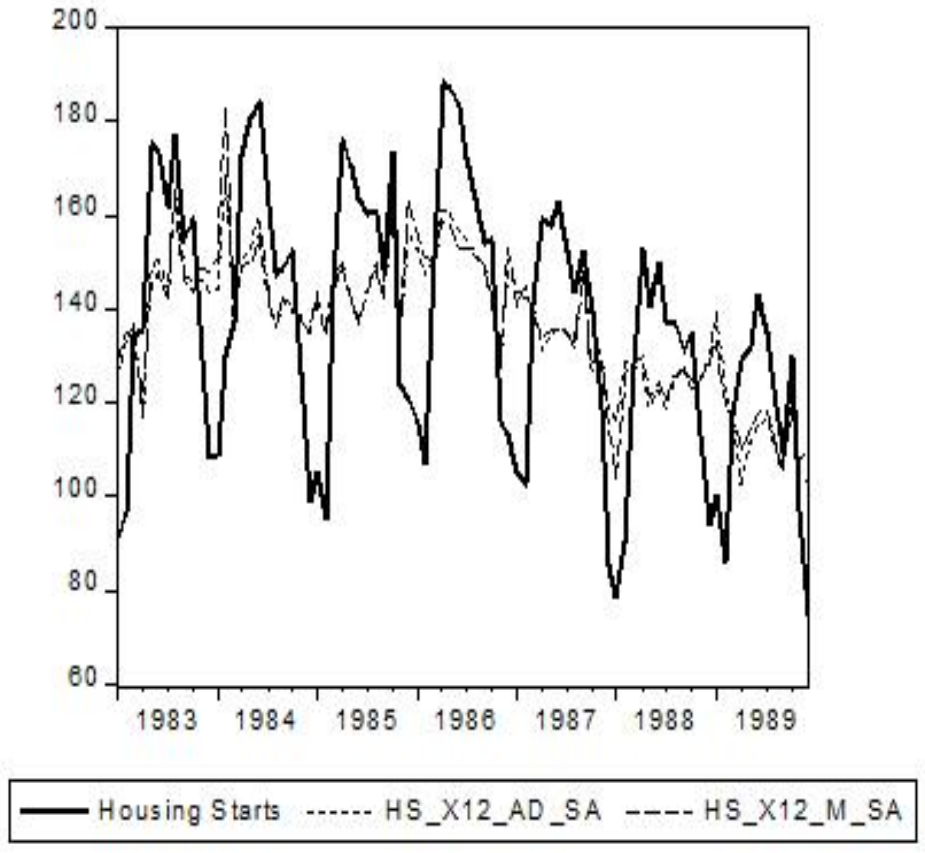
138.976178463= 100.099998474 – (-38.8761799895)

Zerlegung der saisonbereinigten Reihe in Trend_Konjunkturkomponente und irreguläre Komponente

HS_X12_AD_SA = HS_X12_AD_TC + HS_X12_AD_IR

138.976178463 = 124.612856439 + 14.3633220247

Сезонная корректировка Census-X12 – 5







4.5 Методы сезонной корректировки – Содержание

- 4.5.1 Вводный пример
- 4.5.2 Постановка задачи
- 4.5.3 Простая мультипликативная сезонная корректировка
- 4.5.4 Простая аддитивная сезонная корректировка
- 4.5.5 Census-X12
- **4.5.6 Прогнозирование с помощью методов сезонной корректировки**

Прогноз – сезонная корректировка 1

Prognose mit Hilfe von Saisonbereinigung

Prognose der saisonbereinigten Reihe HSSA1 mit Holt-Winter (ohne saisonale Komponente)

Date: 05/24/02 Time: 11:34			
Sample: 1959:01 1989:12			
Included observations: 372			
Method: Holt-Winters No Seasonal			
Original Series: HSSA1			
Forecast Series: HSSA1SM			
Parameters:	Alpha		0.6800
	Beta		0.0000
Sum of Squared Residuals			48030.30
Root Mean Squared Error			11.36282
End of Period Levels:		Mean	101.6135
		Trend	-0.149814

HSSA1 – Saisonbereinigte Reihe

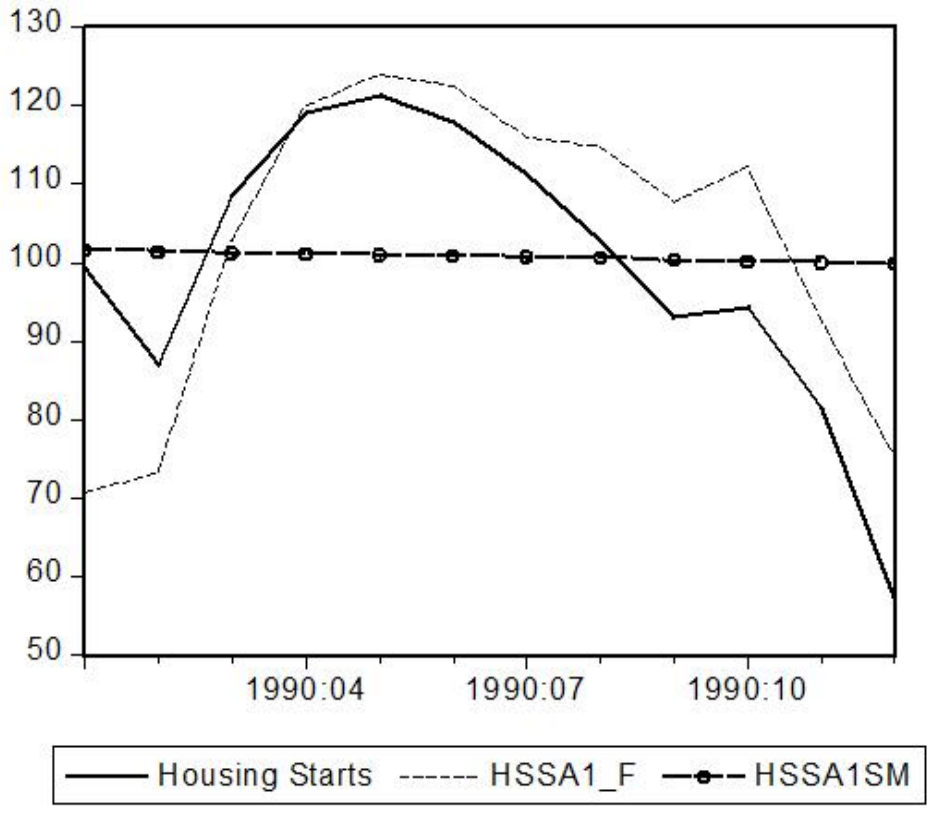
HSSA1SM – geglättete Reihe (ab 1990:1 bis 1990:12 – Prognose)

HSSA1_F – Prognose der nichtsaisonbereinigten Reihe mit Hilfe von der Prognose HSSA1SM und der Saisonfigur SF_M

HSSA1_F = HSSA1SM * SF_M (ab 1990:1 bis 1990:12)

HS – ursprüngliche Reihe

Прогноз – сезонная корректировка 2

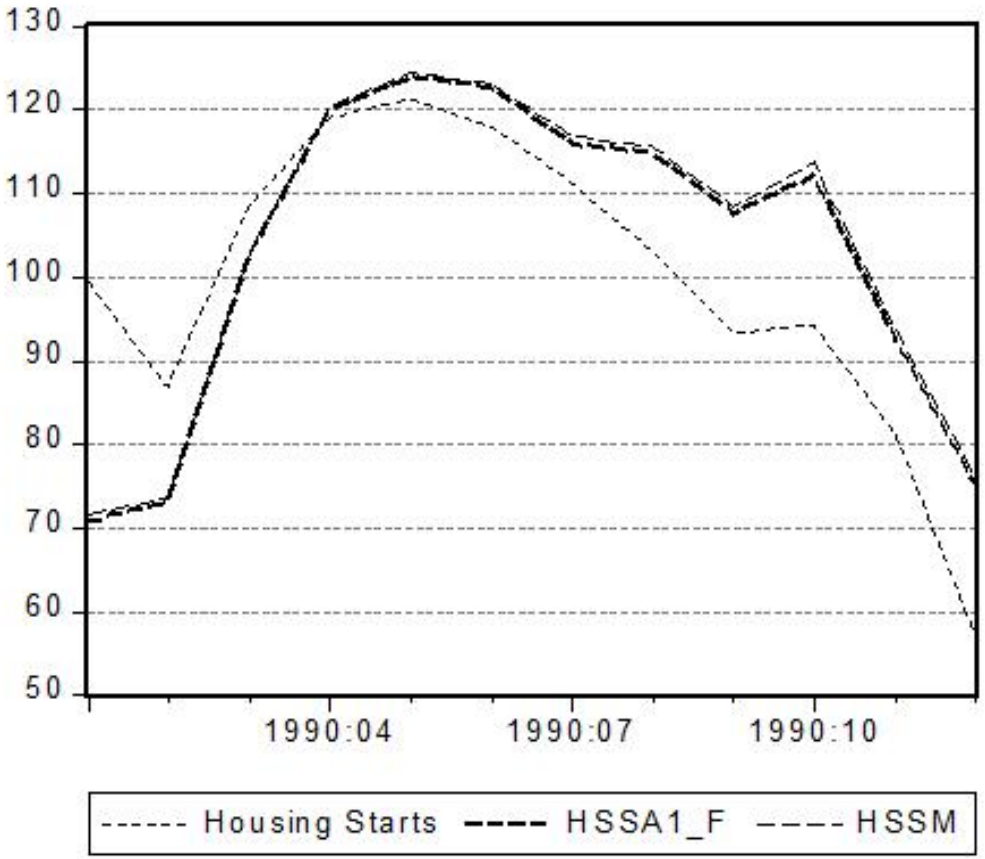


Прогноз – сезонная корректировка 3

im Vergleich zum Prognoseverfahren Holt-Winter-multiplikativ (3 Parameter)

Date: 05/24/02 Time: 11:56				
Sample: 1959:01 1989:12				
Included observations: 372				
Method: Holt-Winters Multiplicative Seasonal				
Original Series: HS				
Forecast Series: HSSM				
Parameters:	Alpha			0.6800
	Beta			0.0000
	Gamma			0.0000
Sum of Squared Residuals				45405.07
Root Mean Squared Error				11.04793
End of Period Levels:		Mean		103.5334
SF_M		Trend		-0.032616
0.697993		Seasonals:	1989:01	0.690070
0.720854			1989:02	0.710842
1.014795			1989:03	0.995281
1.185314			1989:04	1.163261
1.228217			1989:05	1.202820
1.215392			1989:06	1.188963
1.151345			1989:07	1.128528
1.142378			1989:08	1.117109
1.073383			1989:09	1.049528
1.119726			1989:10	1.101216
0.926476			1989:11	0.910375
0.755758			1989:12	0.742008

Прогноз – сезонная корректировка 4







- 4.1 Скользящие средние
- 4.2 Экспоненциальное сглаживание
- 4.3 Трендовые функции
- 4.4 Фильтры
- 4.5 Сезонная корректировка
- **4.6 Автокорреляция**
- 4.7 Перспективы: Множественный анализ временных рядов





4.6 Автокорреляция – Содержание

- **4.6.1 Постановка задачи**
- 4.6.2 Эмпирическая автокорреляция
- 4.6.3 Коррелограммы





Постановка задачи

Пусть задан временной ряд $\{y_t,\ t = 1, 2, ..., n\}$.

Из временного ряда $\{y_t,\ t = 1, 2, ..., n\}$ можно образовать сдвинутый во времени ряд $\{y_{t+k},\ 0 < k < t,\ t = 1, 2, ..., n - k\}$. Число k называется временным лагом (time lag).

Между обоими временными рядами можно вычислить метрический коэффициент корреляции. Если обнаруживается значимая корреляция, то говорят об **автокорреляции**.





4.6 Автокорреляция – Содержание

- 4.6.1 Постановка задачи
- **4.6.2 Эмпирическая автокорреляция**
- 4.6.3 Коррелограммы

Эмпирические коэффициенты автокорреляции

Определение: Пусть задан временной ряд $\{y_t,\ t = 1, 2, ..., n\}$ и сдвинутый ряд $\{y_{t+k},\ 0 < k < t,\ t = 1, 2, ..., n - k\}$.

Рассматриваются $n - k$ пар наблюдений:

$$(y_1, y_{1+k}),\ (y_2, y_{2+k}),\ \ldots$$

Первое наблюдение каждой пары можно рассматривать как значение метрического признака $Y^{(1)}$, второе – как значение метрического признака $Y^{(2)}$. Тогда вычисляется эмпирический коэффициент корреляции $r_{Y^{(1)}Y^{(2)}}$:

$$r_k = r_{Y^{(1)}Y^{(2)}} = \frac{d_{Y^{(1)}Y^{(2)}}}{\sqrt{d_Y^{(1)}}\sqrt{d_Y^{(2)}}}$$

Он называется **эмпирическим коэффициентом автокорреляции с временным лагом k**.





Эмпирическая функция автокорреляции

Для $k = 1, 2, ..., K$ $(k < n)$ можно образовать K эмпирических коэффициентов корреляции r_k $(k = 1, 2, ..., K)$.

Из коэффициентов автокорреляции с лагом k получают последовательность: $\{r_1, r_2, ...\}$.

Определение: Последовательность эмпирических коэффициентов автокорреляции $\{r_1, r_2, ..., r_K\}$ называется **эмпирической функцией автокорреляции** и обозначается ACF (autocorrelation function).

Интерпретация: показывает все автокорреляции до временного лага K.

Эмпирические частные коэффициенты автокорреляции

Применение линейных трендовых функций к анализу автокорреляции. Для всех $k = 1, 2, \ldots, K$ пошагово выполняются следующие оценки параметров:

$$
\begin{aligned}
y_t &= a_0 + a_1 y_{t-1} \Rightarrow \theta_1 = a_1 \\
y_t &= a_0 + \theta_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} \Rightarrow \theta_2 = a_2 \\
&\ldots \quad \ldots \\
y_t &= a_0 + \sum_{k=1}^{K-1} \theta_k y_{t-k} + a_K y_{t-K} \Rightarrow \theta_K = a_K
\end{aligned}
$$

Определение: Коэффициенты θ_k $(k = 1, 2, \ldots, K)$ называются **частными коэффициентами автокорреляции**.

Определение: Последовательность частных коэффициентов автокорреляции $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K\}$ называется **частной функцией автокорреляции** и обозначается **PACF**.

Интерпретация: частный коэффициент автокорреляции θ_{k_0} показывает автокорреляцию между y_t и y_{t-k_0}, при которой все автокорреляции между y_t и y_{t-k} при $k < k_0$ отфильтрованы.



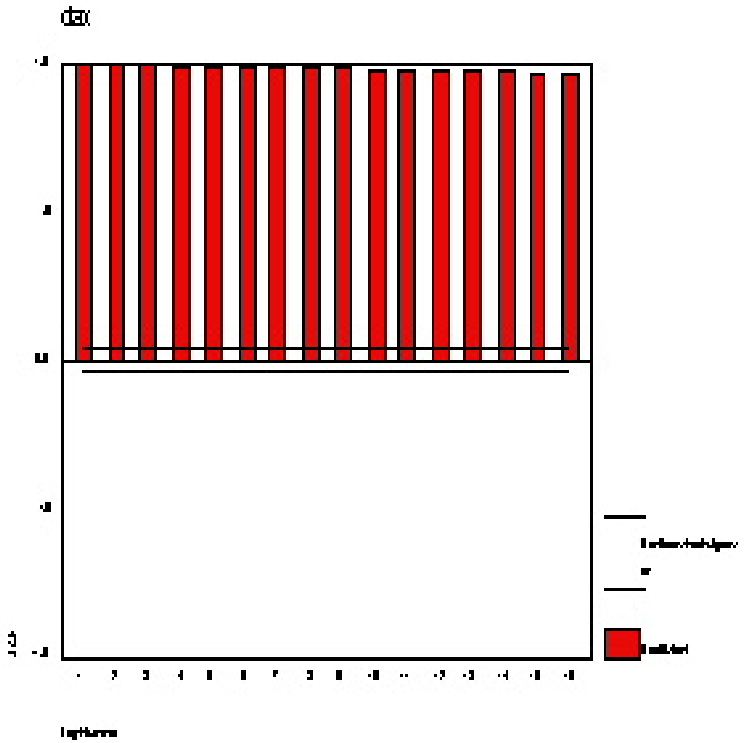


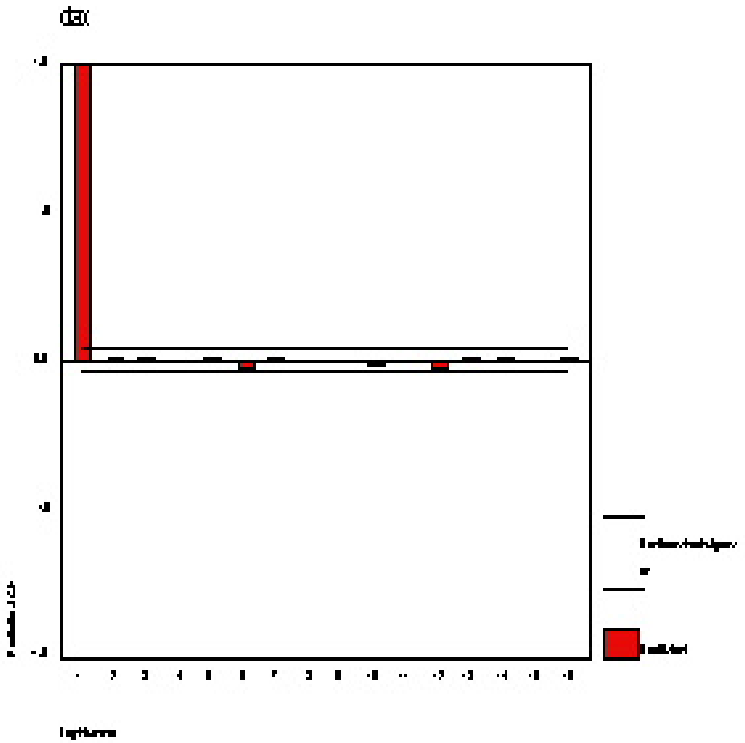
4.6 Автокорреляция – Содержание

- 4.6.1 Постановка задачи
- 4.6.2 Эмпирическая автокорреляция
- **4.6.3 Коррелограммы**

Коррелограммы

Для наглядности используются столбчатые диаграммы для отображения ACF и PACF (на примере DAX)





Примеры

Простой пример – временной ряд $\{y_t,\ t = 1, 2, ..., n\} = \{1, 2, 4, 7, 9, 10, 11\}$

Вычислить:

- Коэффициенты автокорреляции
- Функции автокорреляции

в Excel

Автокорреляция – пример

с Excel:

Пример 2: Zinssaetze 2007_2.xls
Пример 3: ConsumerpriceIndex.xls
Пример 4: DAX.xls

Задание: анализ автокорреляции

с SPSS:

Пример 2: Zinssaetze 2007_2.xls
Пример 3: ConsumerpriceIndex.xls
Пример 4: DAX.xls

Задание: анализ автокорреляции





- 4.1 Скользящие средние
- 4.2 Экспоненциальное сглаживание
- 4.3 Трендовые функции
- 4.4 Фильтры
- 4.5 Сезонная корректировка
- 4.6 Автокорреляция
- **4.7 Перспективы: Множественный анализ временных рядов**





Перспективы: Множественный анализ временных рядов

1. Частные коэффициенты автокорреляции
2. Подгонка кривой (напр., квадратичная, кубическая)
3. Временные ряды как результаты стохастических процессов
4. Сложный пример