# Сборник задач

## Портфельный VaR-Калькулятор 2

### Процентно-чувствительные продукты в четырёх валютных зонах

Русский

**Вольфганг Бёме**

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

---

Все численные задачи можно проверить с помощью калькулятора `rechner2.html` и набора данных `market_data_251days.csv`.

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

# 0 Содержание

**1 Блок A: Дисконтирующие факторы и логарифмические доходности** **2**

**2 Блок B: Оценка инструментов** **3**

**3 Блок C: Ковариационная матрица и факторы риска** **6**

**4 Блок D: Расчёт VaR и субаддитивность** **7**

**5 Блок E: Эксперименты с калькулятором** **9**

**Справочный листок формул** **12**

# 1 Блок А: Дисконтирующие факторы и логарифмические доходности

**Задача 1** ***Л — Дисконтирующий фактор***

Дана EUR спот-ставка для срока $t = 5$ лет:

$$r^{\text{EUR}}(5) = 3{,}50\,\%.$$

**(a)** Вычислите дисконтирующий фактор $\text{DF}(5)$ без кредитного спреда.

**(b)** EUR-облигация имеет рейтинг A. Кредитный спред для 5 лет составляет $s^{\text{A}}(5) = 0{,}80\,\%$. Вычислите спред-скорректированный дисконтирующий фактор $\text{DF}^{\text{A}}(5)$.

**(c)** На сколько процентов $\text{DF}^{\text{A}}(5)$ ниже $\text{DF}(5)$? Каков экономический смысл этой разницы?

**Задача 2** ***Л — Логарифмическая доходность дисконтирующего фактора***

В течение двух последовательных торговых дней наблюдались следующие EUR спот-ставки для $t = 2$ лет:

$$r^{\text{EUR}}_{\text{Пн}}(2) = 3{,}20\,\%, \qquad r^{\text{EUR}}_{\text{Вт}}(2) = 3{,}35\,\%.$$

**(a)** Вычислите $\text{DF}_{\text{Пн}}(2)$ и $\text{DF}_{\text{Вт}}(2)$.

**(b)** Вычислите логарифмическую доходность $\ell = \ln(\text{DF}_{\text{Вт}}(2)/\text{DF}_{\text{Пн}}(2))$.

**(c)** Покажите вычислением, что выполняется: $\ell \approx -t \cdot \Delta r = -2 \cdot 0{,}0015$. Когда это приближение точно?

**(d)** Какой знак имеет $\ell$ при росте процентных ставок? Что это означает для покупателя облигации?

**Задача 3** ***С — Линейная интерполяция кривой доходности***

Кривая EUR спот-ставок имеет следующие опорные точки:

| Срок | 1 г. | 2 г. | 5 л. | 10 л. |
|---|---|---|---|---|
| Ставка (%) | 3,20 | 3,40 | 3,70 | 4,00 |

**(a)** Методом линейной интерполяции вычислите спот-ставки для $t = 3$ лет и $t = 4$ лет.

**(b)** Вычислите $\mathrm{DF}(3)$ и $\mathrm{DF}(4)$ с использованием интерполированных ставок.

**(c)** Облигация выплачивает купон в 10 000 EUR в момент $t = 3{,}5$ лет. Какую ставку вы используете для дисконтирования? Вычислите приведённую стоимость этого отдельного денежного потока.

**(d)** Что происходит при $t = 0{,}5$ лет? Калькулятор использует постоянную экстраполяцию — обоснуйте, почему это разумное упрощение.

## 2 Блок B: Оценка инструментов

**Задача 4** ***Л — Оценка облигации***

Оцените следующую EUR-облигацию (без кредитного спреда):

| | |
|---|---|
| Номинал | 100 000 EUR |
| Купон | 4,00 % годовых, ежегодно |
| Срок | 3 года |

EUR спот-ставки: $r(1) = 3{,}20\,\%$, $r(2) = 3{,}40\,\%$, $r(3) = 3{,}55\,\%$.

**(a)** Перечислите все денежные потоки с указанием моментов выплаты.

**(b)** Для каждого денежного потока вычислите приведённую стоимость.

**(c)** Определите суммарную приведённую стоимость $\mathrm{PV}_{\mathrm{Bond}}$.

**(d)** Как изменится $\mathrm{PV}_{\mathrm{Bond}}$, если все спот-ставки вырастут на 50 б.п.? Вычислите изменение и укажите дюрацию (DV01) в EUR/б.п.

**(e)** Проверьте результат с помощью калькулятора.

**Задача 5** ***С — USD-облигация с кредитным спредом***

USD-облигация с рейтингом BBB оценивается в EUR.

| | |
|---|---|
| Номинал | 200 000 USD |
| Купон | 5,50 % годовых, каждые полгода |
| Срок | 5 лет |
| Курс EUR/USD | 1,11 |

USD спот-ставки: $r^{\text{USD}}(0{,}5) = 4{,}80\,\%$, $r^{\text{USD}}(1) = 4{,}90\,\%$, $r^{\text{USD}}(2) = 5{,}00\,\%$, $r^{\text{USD}}(5) = 5{,}20\,\%$.
Кредитный спред BBB: $s(1) = 1{,}20\,\%$, $s(5) = 1{,}80\,\%$.

**(a)** Сколько денежных потоков у этой облигации?

**(b)** К каким из 29 факторов риска в калькуляторе чувствительна эта облигация? Обоснуйте выбор.

**(c)** Вычислите приведённую стоимость первого купонного платежа (при $t = 0{,}5$ лет) в EUR.

**(d)** Почему кредитный спред *прибавляется* к USD спот-ставке, а не рассматривается отдельно? Какое преимущество это даёт для ковариационной матрицы?

## Задача 6 — *C — Процентный своп с фиксированной ставкой*

Проанализируйте EUR Payer-своп:

| | |
|---|---|
| Номинал | 500 000 EUR |
| Фиксированная ставка | 3,00 % годовых, ежегодно |
| Срок | 5 лет |

Текущие EUR спот-ставки: $r(1) = 3{,}20\,\%$, $r(2) = 3{,}40\,\%$, $r(3) = 3{,}55\,\%$, $r(5) = 3{,}70\,\%$.

**(a)** Калькулятор аппроксимирует приведённую стоимость плавающей ноги формулой $\text{PV}_{\text{float}} = N \cdot (1 - \text{DF}(T))$. Объясните, почему эта формула верна. (*Подсказка: аргумент репликации*)

**(b)** Вычислите $\text{PV}_{\text{float}}$.

**(c)** Вычислите $\text{PV}_{\text{fixed}}$ (приведённая стоимость фиксированной ноги).

**(d)** Вычислите $\text{PV}_{\text{Swap}} = \text{PV}_{\text{float}} - \text{PV}_{\text{fixed}}$. Находится ли своп «в деньгах» или «вне денег»? Обоснуйте ответ через рыночные ставки.

**(e)** Каким было бы $\text{PV}_{\text{Swap}}$, если бы своп был заключён *точно по текущей рыночной ставке* (at-the-money)?

**Задача 7** ***C — Кросс-валютный своп***

Заключается EUR/USD-CCS:

| | |
|---|---|
| Нога 1 (платим) | EUR, 1 000 000 EUR, 3,00 % годовых |
| Нога 2 (получаем) | USD, ставка 4,50 % годовых |
| Срок | 3 года, ежегодно |
| Курс EUR/USD | 1,11 |

**(a)** Каков номинал в USD? Почему он выбирается именно таким?

**(b)** К каким факторам риска чувствителен данный CCS? Перечислите все релевантные факторы из списка 29-ти.

**(c)** Калькулятор отображает Ногу 1 на EUR-факторы, а Ногу 2 — на USD-факторы. Почему внедиагональная ковариация $\Sigma_{\text{EUR,USD}}$ может существенно влиять на VaR этого CCS?

**(d)** Опишите, при каких условиях $\text{PV}_{\text{CCS}} > 0$ (с точки зрения плательщика EUR).

**Задача 8** ***Л — Форвардный валютный контракт***

Компания покупает GBP и продаёт EUR по срочному курсу:

| | |
|---|---|
| Номинал | 300 000 GBP |
| Форвардный курс | EUR/GBP $= 0{,}870$ |
| Спот-курс | EUR/GBP $= 0{,}878$ |
| Срок | 1 год |

GBP спот-ставка: $r^{\text{GBP}}(1) = 5{,}10\,\%$.

**(a)** Вычислите $\text{PV}_{\text{FX}}$ в EUR.

**(b)** Чувствительность в калькуляторе задаётся формулой $\delta^{\text{FX}} \approx N \cdot S_0 / S_{\text{CCY2/EUR}}$. Вычислите $\delta^{\text{FX}}$ для данного контракта.

**(c)** На какой из трёх FX-факторов (EUR/USD, EUR/GBP, EUR/CHF) отображается этот форвард?

**(d)** Объясните интуитивно: почему $\text{PV}_{\text{FX}}$ растёт, когда GBP укрепляется к EUR (EUR/GBP падает)?

# 3 Блок C: Ковариационная матрица и факторы риска

**Задача 9** ***Л — Структура ковариационной матрицы***

Калькулятор оценивает ковариационную матрицу $29 \times 29$ по 251 наблюдению логарифмических доходностей.

**(a)** Сколько независимых параметров содержит симметричная матрица $29 \times 29$? (*Подсказка: диагональ + верхний треугольник*)

**(b)** Соотношение наблюдения/параметры равно $251/29 \approx 8{,}7$. Почему большее соотношение лучше для устойчивого оценивания? Что происходит, если соотношение $< 1$?

**(c)** Назовите три пары факторов риска, для которых вы ожидаете *высокую* положительную корреляцию, и обоснуйте.

**(d)** Назовите пару с ожидаемой *отрицательной* корреляцией и дайте экономическое обоснование.

**Задача 10** ***С — Ковариация и корреляция***

Из калькулятора (вкладка *Матрицы и денежные потоки*) считаны следующие элементы ковариационной матрицы (значения $\times 10^{-8}$):

| Факторы $i, j$ | $\Sigma_{ij} \times 10^8$ |
|---|---|
| EUR_Zero_2Y / EUR_Zero_2Y (дисперсия) | 420 |
| USD_Zero_2Y / USD_Zero_2Y (дисперсия) | 380 |
| EUR_Zero_2Y / USD_Zero_2Y (ковариация) | 290 |
| EUR_Zero_2Y / EUR/USD (ковариация) | $-35$ |

**(a)** Вычислите корреляцию между EUR_Zero_2Y и USD_Zero_2Y.

**(b)** Вычислите корреляцию между EUR_Zero_2Y и EUR/USD. Каков экономический смысл результата?

**(c)** Как изменится VaR EUR-облигации, если корреляция между EUR- и USD-ставками возрастёт с $\rho = 0{,}7$ до $\rho = 0{,}9$? Качественный ответ с обоснованием.

**(d)** Дисперсии в калькуляторе отображаются в единицах $\times 10^{-8}$. Чему равно стандартное отклонение логарифмической доходности EUR_Zero_2Y в процентах?

**Задача 11** ***T — Отображение на факторы риска***

Калькулятор относит каждую позицию к *ближайшему* сроку в списке факторов.

**(a)** Облигация выплачивает купон при $t = 1{,}5$ лет. На какой из пяти EUR-сроков (0,25 г., 1 г., 2 г., 5 л., 10 л.) она будет отображена?

**(b)** Покажите, что данное отображение делает матрицу чувствительностей разреженной (sparse): облигация с 4 денежными потоками может отображаться всего на 3 различных фактора — почему?

**(c)** **Rho-mapping как альтернатива:** вместо ближайшего срока можно линейно распределить чувствительность на два соседних срока. Для $t = 1{,}5$ г. с чувствительностью $\delta = 1000$:

$$\delta_{1\text{Y}} = 1000 \cdot \frac{2 - 1{,}5}{2 - 1} = 500, \quad \delta_{2\text{Y}} = 1000 \cdot \frac{1{,}5 - 1}{2 - 1} = 500.$$

Какое преимущество у такого подхода? Какое условие должна выполнять интерполяция, чтобы сохранялась полная приведённая стоимость?

**(d)** Облигация с рейтингом A имеет денежный поток при $t = 3$ лет. Калькулятор отображает его на CS_A_5Y (ближайший CS-срок — 5 л.). Опишите, в какую сторону эта ошибка искажает VaR.

## 4 Блок D: Расчёт VaR и субаддитивность

**Задача 12** ***Л — Базовый расчёт VaR***

Портфель состоит из двух позиций со следующими характеристиками:

| | **Позиция A** | **Позиция B** |
|---|---|---|
| Чувствительность $\delta$ | 50 000 | $-30\,000$ |
| Соответствующий фактор | EUR_Zero_5Y | EUR_Zero_5Y |
| Дисперсия $\sigma^2$ ($\times 10^{-8}$) | 550 | 550 |

**(a)** Вычислите суммарный вектор весов $w = \delta_A + \delta_B$.

**(b)** Вычислите $\sigma_P^2 = w^2 \cdot \sigma^2$.

**(c)** Вычислите $\text{VaR}_{99\%} = z_{0,99} \cdot \sigma_P$ при $z_{0,99} = 2{,}326$.

**(d)** Почему VaR меньше $|\text{VaR}_A| + |\text{VaR}_B|$, хотя обе позиции отображаются на один и тот же фактор риска? (*Ключевое слово: естественное хеджирование*)

## Задача 13 — *C — Портфель из двух факторов*

Портфель имеет чувствительности к двум факторам риска:

$$w_1 = 80\,000 \text{ (EUR_Zero_5Y)}, \qquad w_2 = 60\,000 \text{ (USD_Zero_5Y)}.$$

Соответствующие элементы ковариационной матрицы ($\times 10^{-8}$):

$$\Sigma_{11} = 550, \quad \Sigma_{22} = 480, \quad \Sigma_{12} = 350.$$

**(a)** Вычислите $\sigma_P^2 = w_1^2\Sigma_{11} + 2w_1w_2\Sigma_{12} + w_2^2\Sigma_{22}$.

**(b)** Вычислите $\text{VaR}_P = z_{0,99} \cdot \sigma_P$.

**(c)** Вычислите $\text{VaR}_1$ и $\text{VaR}_2$ из диагональных элементов.

**(d)** Вычислите эффект диверсификации: $\Delta\text{VaR} = (\text{VaR}_1 + \text{VaR}_2) - \text{VaR}_P$.

**(e)** Каким был бы $\text{VaR}_P$ при $\rho_{12} = 0$? При $\rho_{12} = 1$? Интерпретируйте оба крайних случая.

## Задача 14 — *C — Доказательство субаддитивности*

Докажите алгебраически для случая *двух* факторов с дисперсиями $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ и корреляцией $\rho \in [-1, 1]$:

$$\text{VaR}_P = z_\alpha\sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + 2\rho w_1w_2\sigma_1\sigma_2 + w_2^2\sigma_2^2} \;\le\; z_\alpha(|w_1|\sigma_1 + |w_2|\sigma_2) = \text{VaR}_1 + \text{VaR}_2.$$

**(a)** Покажите сначала, что достаточно доказать $A^2 \le (B+C)^2$, где $A = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + 2\rho w_1w_2\sigma_1\sigma_2 + w_2^2\sigma_2^2}$, $B = |w_1|\sigma_1$, $C = |w_2|\sigma_2$.

**(b)** Покажите: $A^2 = B^2 + 2\rho\,\text{sgn}(w_1w_2)\,BC + C^2$.

**(c)** Выведите из $\rho \le 1$ и $\text{sgn}(w_1w_2) \le 1$, что $A^2 \le (B+C)^2$.

**(d)** При каких условиях достигается равенство? Когда $\text{VaR}_P = \text{VaR}_1 + \text{VaR}_2$?

**Подсказка**

Неравенство $\sqrt{X} \leq Y$ для $X, Y \geq 0$ эквивалентно $X \leq Y^2$. Используйте $\rho \leq 1$ в ключевом шаге.

**Задача 15** ***Т — Методология диагональных блоков***

Калькулятор вычисляет индивидуальные VaR из *тех же* диагональных блоков глобальной матрицы. Почему это принципиально важно для субаддитивности?

**(a)** Предположим, что индивидуальный VaR облигаций вычисляется из *отдельной* матрицы $\tilde{\Sigma}_{\text{B}}$, а портфельный VaR — из глобальной $\Sigma$. Постройте контрпример, при котором: $\text{VaR}_P > \text{VaR}_{\text{Bonds}} + \text{VaR}_{\text{Swaps}}$. (*Подсказка: выберите $\tilde{\Sigma}_B$ так, чтобы $\text{VaR}_{Bonds}$ был очень мал, а соответствующий блок в $\Sigma$ — значительно больше.*)

**(b)** Объясните своими словами, почему использование *одной и той же* матрицы для всех VaR гарантирует субаддитивность.

**(c)** Какое регуляторное значение имеет субаддитивность? Почему мера риска, нарушающая субаддитивность, проблематична для банков?

## 5 Блок E: Эксперименты с калькулятором

**Задача 16** ***Л — Первый запуск***

Запустите калькулятор со стандартными значениями и загрузите `market_data_251days.csv`.

**(a)** Запишите текущие EUR, USD, GBP и CHF спот-ставки для 5 лет (из последней строки CSV).

**(b)** Рассчитайте все четыре вкладки продуктов (Bonds, Swaps, CCS, FX). Запишите для каждой вкладки: суммарный PV, индивидуальные VaR и суммарный VaR (с корреляцией).

**(c)** Рассчитайте портфельный VaR на вкладке *Portfolio VaR*. Является ли портфельный VaR меньше суммы VaR по вкладкам? Вычислите эффект диверсификации в процентах.

**(d)** Перейдите на вкладку *Матрицы и денежные потоки*. Сколько позиций в совокупном портфеле?

## Задача 17 — *C — Анализ чувствительности*

Исследуйте влияние различных параметров на VaR.

**(a)** **Срок:** установите срок всех облигаций равным 1 году. Вычислите VaR облигаций. Повторите для 10 лет. Объясните разницу с помощью формулы $\ell \approx -t \cdot \Delta r$.

**(b)** **Рейтинг:** измените рейтинг Облигации 1 с A на *без спреда*. Как изменится индивидуальный VaR? Почему он может измениться, хотя PV почти не меняется?

**(c)** **Валюта:** измените Своп 2 с USD на CHF. Изменится ли эффект диверсификации между свопами? Почему?

**(d)** **Встречная позиция:** добавьте вторую облигацию с теми же параметрами, что и Облигация 1, но с противоположным знаком (короткая позиция: отрицательный купон). Что вы ожидаете от суммарного VaR? Проверьте с помощью калькулятора.

## Задача 18 — *T — Анализ матрицы*

Экспортируйте глобальную ковариационную матрицу в CSV (*Матрицы и денежные потоки* $\rightarrow$ *Экспорт матрицы в CSV*).

**(a)** Откройте CSV в Excel или Python. Вычислите *корреляционную матрицу* из ковариационной матрицы:

$$\rho_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii} \cdot \Sigma_{jj}}}.$$

**(b)** Определите три пары факторов риска с *наибольшей* положительной корреляцией. Совпадают ли они с парами, которые вы ожидали в Задаче 9в?

**(c)** Существуют ли пары с отрицательной корреляцией? Какие именно, и как их можно объяснить экономически?

**(d)** Вычислите вручную VaR портфеля, состоящего из одной EUR-облигации (номинал 100 000 EUR, рейтинг A, 5 лет), и сравните с результатом калькулятора. (*Подсказка: также экспортируйте денежные потоки в CSV.*)

**Подсказка**

Python-код для корреляционной матрицы:

```
import pandas as pd, numpy as np
cov = pd.read_csv("kovarianzmatrix_29x29.csv",
                  index_col=0, sep=";",
                  skiprows=1)
std = np.sqrt(np.diag(cov.values))
corr = cov.values / np.outer(std, std)
```

# 5 Справочный листок формул

| **Величина** | **Формула** |
|---|---|
| Дисконтирующий фактор | $\mathrm{DF}(t) = e^{-(r(t)+s(t))\,t}$ |
| Линейная интерполяция | $r(t) = r(t_k)\,\frac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}-t_k} + r(t_{k+1})\,\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}$ |
| Логарифм. доходность DF | $\ell(d) = \ln\!\big(\mathrm{DF}_d/\mathrm{DF}_{d-1}\big) \approx -t \cdot \Delta r$ |
| Приближение (малые $\Delta r$) | $\ell \approx -t \cdot \big[\Delta r(t) + \Delta s(t)\big]$ |
| Приведённая стоимость облигации | $\mathrm{PV} = \frac{1}{S}\sum_j \mathrm{CF}_j \cdot \mathrm{DF}(t_j)$ |
| Плавающая нога свопа | $\mathrm{PV}_{\text{float}} = N \cdot (1 - \mathrm{DF}(T))$ |
| Чувствительность | $\delta_j = \partial \mathrm{PV}/\partial \mathrm{DF}(t_j) = \mathrm{CF}_j/S$ |
| Оценщик ковариации | $\Sigma_{ij} = \frac{1}{T-2}\sum_{d=1}^{T-1}(\ell_i(d) - \bar{\ell}_i)(\ell_j(d) - \bar{\ell}_j)$ |
| Дисперсия портфеля | $\sigma_P^2 = \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma}\, \mathbf{w}$ |
| VaR (нормальное распределение) | $\mathrm{VaR}_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma_P$ |
| Квантили | $z_{0,95} = 1{,}645, \quad z_{0,99} = 2{,}326$ |
| Корреляция | $\rho_{ij} = \Sigma_{ij}/\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}$ |
| Дисперсия (два фактора) | $\sigma_P^2 = w_1^2\sigma_1^2 + 2\rho w_1 w_2 \sigma_1\sigma_2 + w_2^2\sigma_2^2$ |
| Субаддитивность | $\mathrm{VaR}_P \le \sum_k \mathrm{VaR}_k$ |
| Эффект диверсификации | $\Delta\mathrm{VaR} = \sum_k \mathrm{VaR}_k - \mathrm{VaR}_P \ge 0$ |

| **Факторы риска (выборка)** | **Блок** |
|---|---|
| EUR/USD/GBP/CHF_Zero_3M/1Y/2Y/5Y/10Y | Индексы 0–19 |
| EUR/USD, EUR/GBP, EUR/CHF | Индексы 20–22 |
| CreditSpread_A_1Y/5Y/10Y | Индексы 23–25 |
| CreditSpread_BBB_1Y/5Y/10Y | Индексы 26–28 |