Options Risk Calculator

Технический справочник формул

Русский

Вольфганг Бёме

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Основы: дисконтирование и базовые активы **2**
1.1 Непрерывный коэффициент дисконтирования . . . 2
1.2 Спот-цена для каждого базового актива . . . 2
1.2.1 Бескупонная облигация (Zero-Coupon Bond) . . . 2

2 Модель ценообразования 1: Black-Scholes (BS) **2**
2.1 Допущения . . . 2
2.2 Вспомогательные величины d_1 и d_2 . . . 3
2.3 Цены опционов . . . 3
2.4 Греки (Black-Scholes) . . . 3

3 Модель ценообразования 2: Биномиальное дерево (CRR) **3**
3.1 Параметризация (Кокс-Росс-Рубинштейн) . . . 3
3.2 Обратная индукция . . . 4
3.3 Греки (приближение по первому/второму шагу дерева) . . . 4

4 Типы опционов и функции выплат **4**
4.1 Ванильный Call и Put . . . 4
4.2 Bull Call Spread ($K_1 < K_2$) . . . 4
4.3 Bear Put Spread ($K_1 < K_2$) . . . 4
4.4 Спред «Бабочка» ($K_1 < K_2 < K_3$, как правило $K_2 = \frac{K_1+K_3}{2}$) . . . 4

5 Меры риска: VaR и точка безубыточности **5**
5.1 Моделирование методом Монте-Карло . . . 5
5.2 Value at Risk (VaR) . . . 5
5.3 Точка безубыточности (Break-Even) . . . 5

6 Подробный пример: FX-опцион (EUR/USD), Call **6**
6.1 Входные параметры . . . 6
6.2 Шаг 1: Вспомогательные величины . . . 6
6.3 Шаг 2: Цена по Black-Scholes . . . 6
6.4 Шаг 3: Греки (Black-Scholes) . . . 6
6.5 Шаг 4: Биномиальное дерево (CRR, $N = 100$) . . . 7
6.6 Шаг 5: VaR (Монте-Карло, $N = 20\,000$) . . . 7
6.7 Шаг 6: Сценарии P&L . . . 7

7 Справочник выходных данных **8**

Основы: дисконтирование и базовые активы

Непрерывный коэффициент дисконтирования

Калькулятор повсеместно использует *непрерывное начисление процентов*. Безрисковый коэффициент дисконтирования для срока T (в годах) и процентной ставки r:

$$B(0,T) = e^{-rT}$$

Это согласуется с Black-Scholes и биномиальным деревом CRR. Ставка r задаётся как непрерывно начисляемая, а не как годовая дискретная.

Спот-цена для каждого базового актива

Базовый актив	Спот S	Особенность
Акция	Цена акции	—
Индекс	Уровень индекса	без дивидендной доходности
Валюта (FX)	Обменный курс	Стандартный BS (без иностранной ставки)
Товар	Спот-цена	—
Бескупонная облигация	$S = N \cdot e^{-yT}$	N = номинал, y = доходность (непрерывная)

Бескупонная облигация (Zero-Coupon Bond)

Справедливая цена бескупонной облигации с номиналом N, доходностью y (непрерывной) и оставшимся сроком T:

$$S_{\text{ZCB}} = N \cdot e^{-yT}$$

Это значение используется как спот-цена S в модели Black-Scholes. σ обозначает ценовую волатильность облигации.

Модель ценообразования 1: Black-Scholes (BS)

Допущения

- Геометрическое броуновское движение: $dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dW_t$
- Постоянная волатильность σ и процентная ставка r
- Отсутствие дивидендов (стандартная формулировка)
- Европейский опцион (исполнение только в момент истечения)
- Отсутствие транзакционных издержек; короткие продажи разрешены

Вспомогательные величины d_1 и d_2

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$\Phi(\cdot)$ обозначает функцию стандартного нормального распределения, $\phi(\cdot)$ — стандартную нормальную плотность.

Цены опционов

$$C = S\,\Phi(d_1) - K\,e^{-rT}\,\Phi(d_2) \tag{1}$$

$$P = K\,e^{-rT}\,\Phi(-d_2) - S\,\Phi(-d_1) \tag{2}$$

Паритет пут-колл: $C - P = S - K\,e^{-rT}$.

Греки (Black-Scholes)

Грек	Символ	Call	Put
Дельта	Δ	$\Phi(d_1)$	$\Phi(d_1) - 1$
Гамма	Γ	$\dfrac{\phi(d_1)}{S\,\sigma\sqrt{T}}$	
Тета	Θ	$-\dfrac{S\phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}\Phi(d_2)$	$-\dfrac{S\phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}\Phi(-d_2)$
Вега	ν	$S\,\phi(d_1)\,\sqrt{T}$	
Ро	ρ	$KTe^{-rT}\Phi(d_2)$	$-KTe^{-rT}\Phi(-d_2)$

Примечание: Тета выводится за календарный день (деление на 365). Вега и Ро относятся к изменению на $+1\%$ в абсолютном выражении по σ и r соответственно.

Модель ценообразования 2: Биномиальное дерево (CRR)

Параметризация (Кокс-Росс-Рубинштейн)

Для N шагов, временной шаг $\Delta t = T/N$:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \qquad d = \frac{1}{u}, \qquad p = \frac{e^{r\,\Delta t} - d}{u - d}$$

p — риск-нейтральная вероятность движения вверх. В калькуляторе используется $N = 100$.

Обратная индукция

Цена в конечном узле при i движениях вниз: $S_{N,i} = S \cdot u^{N-i} \cdot d^{i}$. Значение опциона в конечных узлах:

$$V_{N,i} = \max(S_{N,i} - K,\ 0) \text{ (Call)}, \qquad V_{N,i} = \max(K - S_{N,i},\ 0) \text{ (Put)}$$

$$V_{j,i} = e^{-r\,\Delta t}\left[p \cdot V_{j+1,i} + (1-p) \cdot V_{j+1,i+1}\right]$$

Цена опциона: $V_{0,0}$.

Греки (приближение по первому/второму шагу дерева)

$$\Delta \approx \frac{V_{1,0} - V_{1,1}}{S(u-d)}, \qquad \Gamma \approx \frac{V_{2,0} - 2V_{2,1} + V_{2,2}}{\left[\frac{1}{2}(Su^2 - Sd^2)\right]^2 / S}$$

Тета, Вега, Ро вычисляются через приближение Black-Scholes в граничном узле.

Типы опционов и функции выплат

Все спреды оцениваются как комбинации ванильных опционов. Цена и Греки складываются.

Ванильный Call и Put

Тип	Выплата при истечении	Цена
Call	$\max(S_T - K,\ 0)$	$C(S, K, T, r, \sigma)$ по (1)
Put	$\max(K - S_T,\ 0)$	$P(S, K, T, r, \sigma)$ по (2)

Bull Call Spread ($K_1 < K_2$)

$$\text{Выплата} = \max(S_T - K_1, 0) - \max(S_T - K_2, 0)$$
$$\text{Цена} = C(S, K_1) - C(S, K_2)$$

Максимальная прибыль: $K_2 - K_1 -$ Премия. Максимальный убыток: Премия.

Bear Put Spread ($K_1 < K_2$)

$$\text{Выплата} = \max(K_2 - S_T, 0) - \max(K_1 - S_T, 0)$$
$$\text{Цена} = P(S, K_2) - P(S, K_1)$$

Спред «Бабочка» ($K_1 < K_2 < K_3$, как правило $K_2 = \frac{K_1+K_3}{2}$)

$$\text{Выплата} = \max(S_T - K_1, 0) - 2\,\max(S_T - K_2, 0) + \max(S_T - K_3, 0)$$
$$\text{Цена} = C(S, K_1) - 2\,C(S, K_2) + C(S, K_3)$$

Максимальная прибыль при $S_T = K_2$: $(K_2 - K_1) - \text{Премия}$.

Меры риска: VaR и точка безубыточности

Моделирование методом Монте-Карло

Калькулятор моделирует $N = 20\,000$ траекторий:

$$S_T^{(k)} = S \cdot \exp\Big[\big(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\big)T + \sigma\sqrt{T}\,Z^{(k)}\Big], \quad Z^{(k)} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

P&L на каждой траектории: $\pi^{(k)} = \text{Выплата}(S_T^{(k)}) - \text{Премия}$.

Value at Risk (VaR)

После сортировки $\pi^{(1)} \le \cdots \le \pi^{(N)}$:

$$\text{VaR}_{95\%} = -\pi^{(\lfloor 0{,}05\,N \rfloor)}, \qquad \text{VaR}_{99\%} = -\pi^{(\lfloor 0{,}01\,N \rfloor)}$$

Положительное значение VaR соответствует убытку.

Точка безубыточности (Break-Even)

Тип опциона	Точка безубыточности
Call (ванильный)	$K_1 + \text{Премия}$
Put (ванильный)	$K_1 - \text{Премия}$
Bull Call Spread	$K_1 + \text{Премия}$
Bear Put Spread	$K_2 - \text{Премия}$
Бабочка	K_2 (приближение)

Подробный пример: FX-опцион (EUR/USD), Call

Входные параметры

Параметр	Символ	Значение
Базовый актив	—	EUR/USD
Тип опциона	—	Европейский Call
Спот	S	1,0800
Страйк	K	1,0800 (на деньгах, ATM)
Волатильность	σ	8,00%
Процентная ставка (непрерывная)	r	3,00%
Срок до истечения	T	90 дней $= 90/365 = 0{,}24658$ лет

Шаг 1: Вспомогательные величины

Коэффициент дисконтирования:

$$e^{-rT} = e^{-0{,}03\times 0{,}24658} = e^{-0{,}007397} = 0{,}99263$$

$$d_1 = \frac{\ln(1) + (0{,}03 + 0{,}0032) \times 0{,}24658}{0{,}08 \times 0{,}49657} = \frac{0{,}03320 \times 0{,}24658}{0{,}039726} = \frac{0{,}008187}{0{,}039726} = 0{,}2061$$

$$d_2 = 0{,}2061 - 0{,}08 \times 0{,}49657 = 0{,}2061 - 0{,}03973 = 0{,}1664$$

Значения нормального распределения:

$$\Phi(0{,}2061) = 0{,}5817, \qquad \Phi(0{,}1664) = 0{,}5661$$

Шаг 2: Цена по Black-Scholes

$$\begin{aligned} C_{\text{BS}} &= S\,\Phi(d_1) - K\,e^{-rT}\,\Phi(d_2) \\ &= 1{,}0800 \times 0{,}5817 - 1{,}0800 \times 0{,}99263 \times 0{,}5661 \\ &= 0{,}62824 - 0{,}60716 = \mathbf{0{,}02108} \end{aligned}$$

Цена: **0,0211 USD** на 1 EUR номинала (прибл. 211 USD на лот 10 000 EUR).

Шаг 3: Греки (Black-Scholes)

Плотность нормального распределения: $\phi(0{,}2061) = 0{,}39130$

Грек	Вычисление	Результат	Интерпретация
Δ	$\Phi(0{,}2061)$	$+0{,}5817$	Цена $+0{,}582$ на $+1$ спот
Γ	$\dfrac{0{,}39130}{1{,}08 \times 0{,}08 \times 0{,}49657}$	$+9{,}095$	Изменение Дельты на $+1$ сп
Θ	$-\dfrac{1{,}08 \times 0{,}39130 \times 0{,}08}{2 \times 0{,}49657} - 0{,}03 \times 1{,}08 \times 0{,}99263 \times 0{,}5661$	$-0{,}000456$	Убыток в день
ν	$1{,}08 \times 0{,}39130 \times 0{,}49657$	$+0{,}2096$	Цена на $+1\%$ волатильности
ρ	$\dfrac{1{,}08 \times 0{,}24658 \times 0{,}99263 \times 0{,}5661}{100}$	$+0{,}001490$	Цена на $+1\%$ ставки

Шаг 4: Биномиальное дерево (CRR, $N = 100$)

$$\Delta t = \frac{0{,}24658}{100} = 0{,}0024658, \qquad u = e^{0{,}08\times\sqrt{0{,}0024658}} = e^{0{,}003973} = 1{,}003981$$

$$d = \frac{1}{1{,}003981} = 0{,}996035, \qquad p = \frac{e^{0{,}03\times 0{,}0024658} - 0{,}996035}{1{,}003981 - 0{,}996035} = \frac{0{,}004039}{0{,}007946} = 0{,}50831$$

Обратная индукция по 100 шагам даёт:

$$C_{\text{Bin}} \approx \mathbf{0{,}02107}$$

Отклонение от BS: $< 0{,}005\%$ — ожидаемая сходимость дерева CRR при $N = 100$.

Шаг 5: VaR (Монте-Карло, $N = 20\,000$)

Показатель	Результат
$\text{VaR}_{95\%}$	$0{,}0211$ (полная потеря премии)
$\text{VaR}_{99\%}$	$0{,}0211$
Точка безубыточности	$1{,}0800 + 0{,}0211 = \mathbf{1{,}1011}$

Пояснение: Опцион ATM истекает без ценности примерно в 42% траекторий. Поскольку убыток ограничен премией, VaR равен полной потере премии.

Шаг 6: Сценарии P&L

EUR/USD при T	Δ Спот	Выплата	P&L нетто	Доходность
0,7560	-30%	0,0000	$-0{,}0211$	$-100{,}0\%$
0,8640	-20%	0,0000	$-0{,}0211$	$-100{,}0\%$
0,9720	-10%	0,0000	$-0{,}0211$	$-100{,}0\%$
1,0260	-5%	0,0000	$-0{,}0211$	$-100{,}0\%$
1,0800	$\pm 0\%$	0,0000	$-0{,}0211$	$-100{,}0\%$
1,1340	$+5\%$	0,0540	$+0{,}0329$	$+156{,}2\%$
1,1880	$+10\%$	0,1080	$+0{,}0869$	$+412{,}3\%$
1,2960	$+20\%$	0,2160	$+0{,}1949$	$+924{,}8\%$
1,4040	$+30\%$	0,3240	$+0{,}3029$	$+1437{,}0\%$

Справочник выходных данных

Выходные данные	Вычисление	Модель
Цена опциона	Формула BS или дерево CRR	BS / Bin
e^{-rT} (коэффициент дисконт.)	непрерывный, повсеместно	обе
Точка безубыточности	$K \pm$ Премия	—
$\Delta, \Gamma, \Theta, \nu, \rho$	аналитически (BS) / численно (Bin)	обе
$\text{VaR}_{95\%/99\%}$	Монте-Карло, $N = 20\,000$	—
Сценарии P&L	$\pm 5\%, 10\%, 20\%, 30\%$	—
Экспорт CSV	все вышеуказанные поля	—

Все формулы соответствуют реализации на JavaScript в файле options-risk-calculator.html (v1.1). Отклонения между BS и биномиальным деревом при $N = 100$ как правило не превышают $0{,}01\%$.