Финансовая математика Часть 3b

Д-р Вольфганг Бёме

Март 2021

Оглавление

0.1 Риск сберегательных продуктов 1
0.1.1 Планы накопления 2
0.1.2 Срочный депозит 3
0.2 Риск кредитов 4
0.2.1 Процентный кредит 4
0.2.2 Кредит с равными долями погашения 5
0.2.3 Аннуитетный кредит 6
0.3 Риск внебиржевых форвардных контрактов 6
0.3.1 Валютные форвардные контракты 6

0.1. Риск сберегательных продуктов

Для сберегательных продуктов риски определяются процентными ставками. Как и в предыдущих главах, для расчёта приведённой стоимости мы используем дисконтирующие множители, вычисленные на основе бескупонных процентных ставок. Если оценка риска должна проводиться методом дисперсий-ковариаций, необходимы длинные ряды бескупонных процентных ставок, из которых выводится волатильность дисконтирующих множителей. Банки, выполняющие расчёты риска на основе метода дисперсий-ковариаций, ежедневно определяют бескупонные процентные ставки и располагают поэтому длинными рядами, что позволяет им ежедневно определять волатильности, ковариации и коэффициенты корреляции. Немецкий федеральный банк публикует процентные ставки для гипотетических бескупонных облигаций без кредитного риска, которые также могут использоваться для оценки статистических параметров. В рамках данной публикации длинные ряды для определения дисперсий, ковариаций и корреляций не используются; вместо этого задаются правдоподобные статистические величины. В примерах расчётов используются — как и прежде — бескупонные ставки и производные дисконтирующие множители для 4 лет; статистические параметры также задаются для 4-летнего периода.

Дисперсии и среднеквадратические отклонения

Оставшийся срок (лет)	Бескупонная ставка	Дисконт. множитель	Дисперсия	СКО
1	0,0294	0,9714	0,000022	0,00469
2	0,0390	0,9262	0,000024	0,00490
3	0,0448	0,8750	0,000028	0,00529
4	0,0493	0,8262	0,000030	0,00548

Ковариации

	1	2	3	4
1		0,000005	0,000006	0,000007
2	0,000005		0,000008	0,000005
3	0,000006	0,000008		0,000003
4	0,000007	0,000005	0,000003	

Матрица дисперсий-ковариаций и матрица корреляций:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0{,}000022 & 0{,}000005 & 0{,}000006 & 0{,}000007 \\ 0{,}000005 & 0{,}000024 & 0{,}000008 & 0{,}000005 \\ 0{,}000006 & 0{,}000008 & 0{,}000028 & 0{,}000003 \\ 0{,}000007 & 0{,}000005 & 0{,}000003 & 0{,}000030 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2176 & 0{,}2418 & 0{,}2724 \\ 0{,}2176 & 1 & 0{,}3086 & 0{,}1862 \\ 0{,}2418 & 0{,}3086 & 1 & 0{,}1035 \\ 0{,}2724 & 0{,}1862 & 0{,}1034 & 1 \end{pmatrix}$$

С этими дисперсиями, ковариациями и коэффициентами корреляции можно определить риск финансовых продуктов в момент $t = 0$. Если же требуется рассчитать риски и в другие моменты времени, дисперсии, ковариации и коэффициенты корреляции для будущих процентных ставок и соответствующих дисконтирующих множителей также должны быть получены из длинных рядов данных. В принципе следует действовать аналогично расчёту статистических параметров для бескупонных процентных ставок и соответствующих дисконтирующих множителей. Однако мы ограничиваемся расчётом риска в момент $t = 0$, то есть на дату заключения договора.

0.1.1. Планы накопления

Рассматривается план накопления с постоянными годовыми взносами в конце периода. Заданы: годовой номинальный процент i_{nom} и постоянный взнос R. Начисление процентов производится после каждого взноса. В следующей таблице представлены взносы.



В разделе **??** приведённая стоимость этого плана накопления была рассчитана в момент $t = 0$ с использованием дисконтирующих множителей $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$ для каждого взноса в момент $t = 1, 2, \ldots, T$:

$$BW_0(R_1) = R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} \quad BW_0(R_2) = R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} \quad \ldots \quad BW_0(R_T) = R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)}$$

$$BW_0 = R \cdot \sum_{t=1}^{T} \hat{q}_{(0\leftarrow t)}$$

Как и любой процентный финансовый продукт, планы накопления сопряжены с риском. Теперь рассчитывается риск плана накопления при условии, что период удержания составляет ровно 10 банковских дней, то есть в ближайшие 10 дней план не будет ликвидирован. Риск показывает максимальный убыток, который возник бы при ликвидации через 10 банковских дней с вероятностью 99%. Для этих расчётов необходимы не только дисконтирующие множители $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$, но и дисперсии, ковариации и коэффициенты корреляции факторов риска.

Риск (Value at Risk) рассчитывается методом дисперсий-ковариаций с помощью матрицы дисперсий-ковариаций или матрицы корреляций. Факторами риска являются темпы прироста дисконтирующих множителей $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$. Матрица дисперсий-ковариаций состоит из дисперсий и ковариаций темпов прироста дисконтирующих множителей и имеет размерность $(T \times T)$. Матрица корреляций образована из коэффициентов корреляции темпов прироста дисконтирующих множителей и также имеет размерность $(T \times T)$.

Пример (см. раздел ??):

В конце каждого года вносится 1 000 EUR. Ограничиваемся 4 взносами, используя бескупонные ставки и дисконтирующие множители, а также дисперсии и ковариации из раздела section 0.1. Процентный период — 1 год, заданная годовая ставка 5%. Рассчитывается VaR в $t = 0$ при уровне доверия 99% и периоде удержания 10 дней.

Для расчёта BW_0 в $t = 0$ каждый будущий платёж дисконтируется с помощью срочно-зависимых дисконтирующих множителей $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$ при $t = 1, 2, 3, 4$. Взносы представляют собой расход вкладчика (отрицательный знак), накопленная сумма — доход (положительный знак).

Будущая стоимость плана накопления: $K_4 = 1{,}000 \cdot \frac{1{,}05^4 - 1}{0{,}05} = 4{,}310{,}13$ EUR.

$$
\begin{aligned}
BW_0(R_1) &= -1{,}000 \cdot 0{,}9714 = -971{,}40 \\
BW_0(R_2) &= -1{,}000 \cdot 0{,}9262 = -926{,}20 \\
BW_0(R_3) &= -1{,}000 \cdot 0{,}8750 = -875{,}00 \\
BW_0(R_4) &= -1{,}000 \cdot 0{,}8262 = -826{,}20 \\
BW_0(K_4) &= 4{,}310{,}13 \cdot 0{,}8262 = 3{,}561{,}03 \\
BW_0 &= -971{,}40 - 926{,}20 - 875{,}00 - 826{,}20 + 3{,}561{,}03 = -37{,}77
\end{aligned}
$$

Ценовая функция $P(t{=}0) = -37{,}77$ EUR. Формула VaR:

$$VaR(t, p) = \sqrt{\Delta^{*T} \Sigma \Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(1 - p)$$

Чувствительности:

$$\Delta_1^* = -R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} = -971{,}40 \quad \Delta_2^* = -926{,}20 \quad \Delta_3^* = -875{,}00 \quad \Delta_4^* = (K_4 - R) \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 3{,}310{,}13 \cdot 0{,}8262 = 2{,}734{,}83$$

$$
\Sigma = \begin{pmatrix} 0{,}000022 & 0{,}000005 & 0{,}000006 & 0{,}000007 \\ 0{,}000005 & 0{,}000024 & 0{,}000008 & 0{,}000005 \\ 0{,}000006 & 0{,}000008 & 0{,}000028 & 0{,}000003 \\ 0{,}000007 & 0{,}000005 & 0{,}000003 & 0{,}000030 \end{pmatrix},\ \Delta^* = \begin{pmatrix} -971{,}40 \\ -926{,}20 \\ -875{,}00 \\ 2{,}734{,}83 \end{pmatrix},\ \Delta^{*T} = \begin{pmatrix} -971{,}40 & -926{,}20 & -875{,}00 & 2{,}734{,}83 \end{pmatrix}
$$

$$
VaR(10, 99\%) = \sqrt{\begin{pmatrix} -971{,}40 & -926{,}20 & -875{,}00 & 2{,}734{,}83 \end{pmatrix} \cdot \Sigma \cdot \begin{pmatrix} -971{,}40 \\ -926{,}20 \\ -875{,}00 \\ 2{,}734{,}83 \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{10} \cdot F^{-1}(0{,}01) = -86{,}62
$$

Максимально возможный убыток сберегательного продукта при периоде удержания 10 дней с вероятностью 99% составляет **86,62 EUR**.

Практически тот же результат (с округлением) получается при использовании матрицы корреляций. VaR для каждого фактора риска:

$$
\begin{aligned}
VaR_1 &= -1{,}000 \cdot 0{,}9714 \cdot 0{,}00469 \cdot 3{,}16228 \cdot (-2{,}32635) = 33{,}52 \\
VaR_2 &= -1{,}000 \cdot 0{,}9262 \cdot 0{,}00490 \cdot 3{,}16228 \cdot (-2{,}32635) = 33{,}39 \\
VaR_3 &= -1{,}000 \cdot 0{,}8750 \cdot 0{,}00529 \cdot 3{,}16228 \cdot (-2{,}32635) = 34{,}05 \\
VaR_4 &= 3{,}310{,}13 \cdot 0{,}8262 \cdot 0{,}00548 \cdot 3{,}16228 \cdot (-2{,}32635) = -110{,}25
\end{aligned}
$$

$$
VaR(10, 99\%) = -\sqrt{\begin{pmatrix} 33{,}52 & 33{,}39 & 34{,}05 & -110{,}25 \end{pmatrix} \cdot P \cdot \begin{pmatrix} 33{,}52 \\ 33{,}39 \\ 34{,}05 \\ -110{,}25 \end{pmatrix}} = -86{,}64
$$

Следует отметить, что планы накопления, как и рассматриваемые в следующем разделе срочные депозиты, не являются торгуемыми продуктами. Поэтому возможность продать продукт по истечении периода удержания отсутствует. Тем не менее рассчитанный VaR предоставляет информацию о возможных потерях стоимости плана накопления (срочного депозита), в том числе в сравнении с другими продуктами.

0.1.2. Срочный депозит

Как в разделе **??**, ограничиваемся простым случаем: процентный период 1 год, фиксированная ставка, выплата процентов в конце срока. Будущая стоимость:

$$K_T = K_0 \cdot (1 + i_{nom})^T$$

Для расчёта приведённой стоимости будущая стоимость дисконтируется с помощью бескупонного дисконтирующего множителя $\hat{q}_{(0\leftarrow T)}$:

$$BW_0 = K_T \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)}$$

Ценовая функция $P(0)$:

$$P(t{=}0) = -K_0 + K_T \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)}$$

Для расчёта риска применяется метод дисперсий-ковариаций с одним фактором риска (дисконтирующим множителем $\hat{q}_{(0\leftarrow T)}$):

$$VaR(t,p) = P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow T)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)}(t_0) \cdot \sigma_{\hat{q}_{(0\leftarrow T)}} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(p-1)$$

Пример:

Рассчитывается VaR при периоде удержания 1 день и вероятности 99% для срочного депозита со следующими условиями:

Номинальная стоимость $K_0 = 10{,}000$ EUR; номинальная ставка $i_{nom} = 5\%$; срок 4 года; бескупонная ставка с оставшимся сроком 4 года: $i_{real}(0 \to 4) = 0{,}0489$; бескупонный дисконтирующий множитель: $\hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 0{,}8262$; СКО фактора риска: $\sigma_{\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}} = 0{,}00548$.

$$K_4 = 10{,}000 \cdot 1{,}05^4 = 12{,}155{,}06$$
$$BW_0 = 12{,}155{,}06 \cdot 0{,}8262 = 10{,}042{,}51 \quad P(t{=}0) = -10{,}000 + 10{,}042{,}51 = 42{,}51$$

$$VaR(1; 0{,}99) = 12{,}155{,}06 \cdot 0{,}8262 \cdot 0{,}00548 \cdot 1 \cdot (-2{,}32635) = -128{,}03$$

Максимальный убыток при периоде удержания 1 день и вероятности 99% составляет **128,03 EUR**.

0.2. Риск кредитов

В данном разделе рассматривается исключительно рыночный риск. Кредитный риск дефолта не учитывается. Для заёмщика кредитный риск дефолта практически незначим. Трудности при урегулировании остатка долга могут возникнуть только в случае дефолта кредитной организации.

Для расчёта риска используется соответствующая ценовая функция и применяется метод дисперсий-ковариаций. Факторами риска являются дисконтирующие множители на основе бескупонных процентных ставок, перечисленные с дисперсиями и СКО в разделе section 0.1. Примеры расчёта VaR основаны на примерах из раздела **??**.

0.2.1. Процентный кредит

Ценовая функция для процентных кредитов:

$$P(0) = -K_0 + BW_0 = -K_0 + \sum_{t=1}^{T} Z_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)}$$

Пример:

Процентный кредит 20 000 EUR при годовой ставке 5%, срок 4 года, выплаты в конце периода. Постоянные годовые проценты: $0{,}05 \cdot 20{,}000 = 1{,}000$ EUR. Рассчитывается VaR при периоде удержания 10 дней и уровне доверия 99%.

$$BW_0(Z_1) = 1{,}000 \cdot 0{,}9714 = 971{,}40$$
$$BW_0(Z_2) = 1{,}000 \cdot 0{,}9262 = 926{,}20$$
$$BW_0(Z_3) = 1{,}000 \cdot 0{,}8750 = 875{,}00$$
$$BW_0(Z_4) = 1{,}000 \cdot 0{,}8262 = 826{,}20$$
$$BW_0(K_0) = 20{,}000 \cdot 0{,}8262 = 16{,}524{,}00$$
$$BW_0 = 20{,}122{,}60 \text{ EUR} \quad P(t{=}0) = 122{,}60 \text{ EUR}$$

Чувствительности:

$$\Delta_1^* = Z \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} = 971{,}40 \quad \Delta_2^* = 926{,}20 \quad \Delta_3^* = 875{,}00 \quad \Delta_4^* = (Z + K_0) \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 21{,}000 \cdot 0{,}8262 = 17{,}350{,}20$$

$$VaR(10, 99\%) = \sqrt{(971{,}40 \quad 926{,}20 \quad 875{,}00 \quad 17{,}350{,}20) \cdot \Sigma \cdot \begin{pmatrix} 971{,}40 \\ 926{,}20 \\ 875{,}00 \\ 17{,}350{,}20 \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{10} \cdot F^{-1}(0{,}01) = -721{,}30$$

Максимально возможный убыток процентного кредита при 10-дневном удержании с вероятностью 99% составляет **721,30 EUR**.

0.2.2. Кредит с равными долями погашения

Ценовая функция:

$$P(0) = -K_0 + BW_0 = -K_0 + \sum_{t=1}^{T} AN_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)}$$

Аннуитеты вычисляются из суммы погашения и процентов. Постоянная доля погашения: $TB = \frac{K_0}{m}$. Из остаточного долга RS_t вычисляются проценты Z_t, откуда получаются непостоянные аннуитеты $AN_t = TB + Z_t$.

Пример:

Долг 80 000 EUR погашается равными долями за 4 года, годовая ставка 5%, проценты начисляются в конце каждого периода. Рассчитывается VaR при 10-дневном удержании и уровне доверия 99%. Постоянная доля погашения: $TB = \frac{80{,}000}{4} = 20{,}000$.

j	RS_j	TB	Z_j	AN_j
0	80,000			
1	60,000	20,000	4,000	24,000
2	40,000	20,000	3,000	23,000
3	20,000	20,000	2,000	22,000
4	0	20,000	1,000	21,000

$$BW_0(AN_1) = 24{,}000 \cdot 0{,}9714 = 23{,}313{,}60 \quad BW_0(AN_2) = 23{,}000 \cdot 0{,}9262 = 21{,}302{,}60$$
$$BW_0(AN_3) = 22{,}000 \cdot 0{,}8750 = 19{,}250{,}00 \quad BW_0(AN_4) = 21{,}000 \cdot 0{,}8262 = 17{,}350{,}20$$
$$BW_0 = 81{,}216{,}40 \text{ EUR} \quad P(0) = 1{,}216{,}40 \text{ EUR}$$

Чувствительности: $\Delta_t^* = AN_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)}$, то есть $\Delta^{*T} = (23{,}313{,}60\ 21{,}302{,}60\ 19{,}250{,}00\ 17{,}350{,}20)$.

$$VaR(10, 99\%) = \sqrt{(23{,}313{,}60 \quad 21{,}302{,}60 \quad 19{,}250{,}00 \quad 17{,}350{,}20) \cdot \Sigma \cdot \begin{pmatrix} 23{,}313{,}60 \\ 21{,}302{,}60 \\ 19{,}250{,}00 \\ 17{,}350{,}20 \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{10} \cdot F^{-1}(0{,}01) = -1{,}953{,}74$$

Максимально возможный убыток кредита с равными долями погашения при 10-дневном удержании с вероятностью 99% составляет **1 953,74 EUR**.

0.2.3. Аннуитетный кредит

Аннуитетный кредит подробно рассматривался в разделе **??**. Постоянная аннуитет AN:

$$AN = K_0 \cdot (1 + i_{nom})^m \cdot \frac{i_{nom}}{(1 + i_{nom})^T - 1}$$

Пример: Долг 80 000 EUR, 4 года, 5%:

$$AN = 80{,}000 \cdot 1{,}05^4 \cdot \frac{0{,}05}{1{,}05^4 - 1} = 22{,}560{,}95 \text{ EUR}$$

$$BW_0(AN_1) = 22{,}560{,}95 \cdot 0{,}9714 = 21{,}915{,}71 \quad BW_0(AN_2) = 22{,}560{,}95 \cdot 0{,}9262 = 20{,}895{,}95$$
$$BW_0(AN_3) = 22{,}560{,}95 \cdot 0{,}8750 = 19{,}740{,}83 \quad BW_0(AN_4) = 22{,}560{,}95 \cdot 0{,}8262 = 18{,}639{,}86$$
$$BW_0 = 81{,}192{,}35 \text{ EUR} \quad P(0) = 1{,}192{,}35 \text{ EUR}$$

Чувствительности: $\Delta_t^* = AN \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)}$, то есть $\Delta^{*T} = (21{,}915{,}71\ 20{,}895{,}95\ 19{,}740{,}83\ 18{,}639{,}86)$.

$$VaR(10, 99\%) = \sqrt{(21{,}915{,}71 \quad 20{,}895{,}95 \quad 19{,}740{,}83 \quad 18{,}639{,}86) \cdot \Sigma \cdot \begin{pmatrix} 21{,}915{,}71 \\ 20{,}895{,}95 \\ 19{,}740{,}83 \\ 18{,}639{,}86 \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{10} \cdot F^{-1}(0{,}01) = -1{,}954{,}32$$

Максимально возможный убыток аннуитетного кредита при 10-дневном удержании с вероятностью 99% составляет **1 954,32 EUR**.

0.3. Риск внебиржевых форвардных контрактов

Здесь рассматривается исключительно рыночный риск. Факторами риска являются дисконтирующие множители на основе бескупонных процентных ставок, а также — для валютных форвардов — обменный курс.

0.3.1. Валютные форвардные контракты

Ценовая функция внебиржевых валютных форвардных контрактов (с точки зрения плательщика EUR, раздел **??**):

$$P(0) = A_t(1) \cdot \hat{q}_{1(0\leftarrow t)} + A_t(2) \cdot wk_0(1,2) \cdot \hat{q}_{2(0\leftarrow t)}$$

Факторы риска: темп прироста обменного курса wk(EUR,USD), дисконтирующий множитель EUR $\hat{q}_{EUR(0\leftarrow t)}$ и дисконтирующий множитель USD $\hat{q}_{USD(0\leftarrow t)}$.

Пример (из раздела **??**): обмен 1 000 000 EUR на 1 192 536,28 USD при $t = 2$; $wk_0 = 0{,}84$; $\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)} = 0{,}9262$; $\hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)} = 0{,}9246$.

Чувствительности:

$$\Delta_{wk}^* = 1{,}192{,}536{,}28 \cdot 0{,}9246 \cdot 0{,}84 = 926{,}200{,}00$$
$$\Delta_{\hat{q}_{EUR}}^* = -1{,}000{,}000 \cdot 0{,}9262 = -926{,}200{,}00$$
$$\Delta_{\hat{q}_{USD}}^* = 926{,}200{,}00$$

Матрица дисперсий-ковариаций:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0{,}000024 & 0{,}000005 & 0{,}000006 \\ 0{,}000005 & 0{,}000024 & 0{,}000008 \\ 0{,}000006 & 0{,}000008 & 0{,}000028 \end{pmatrix}$$

$$VaR(10, 99\%) = \sqrt{(926{,}200 \quad -926{,}200 \quad 926{,}200) \cdot \Sigma \cdot \begin{pmatrix} 926{,}200 \\ -926{,}200 \\ 926{,}200 \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{10} \cdot F^{-1}(0{,}01) = -53{,}650{,}69 \text{ EUR}$$

Максимально возможный убыток при уровне доверия 99% за 10 дней составляет **53 650,69 EUR**.

Литература

[Böh21] Böhme, Wolfgang: *Finanzmathematik*. Skript, März 2021.

[Wie18] Wiedemann, Arnd: *Financial Engineering*. efiport GmbH, 2018.