Финансовая математика Часть 3a

Д-р Вольфганг Бёме

Март 2021

Оглавление

1 Расчёт риска простых финансовых продуктов **2**
1.1 Основы расчёта риска 3
1.1.1 Статистические основы I 3
1.1.2 Историческое моделирование 7
1.1.3 Статистические основы II 9
1.1.4 Метод дисперсий-ковариаций 10

Глава 1

Расчёт риска простых финансовых продуктов

Экономические процессы — и финансовые в особенности — подвержены определённой неопределённости. Никто не способен с абсолютной уверенностью предсказать будущее развитие финансовых параметров, таких как процентные ставки или обменные курсы. Даже сложные инструменты прогнозирования и методы финансовой математики не могут гарантировать точного предсказания; каждый прогноз может реализоваться или нет — и в большинстве случаев он не реализуется. Как описано в предыдущих главах, финансовые инструменты договорно фиксируют условия будущих платежей. Будущие рыночные условия могут не совпадать с согласованными условиями выплат, хотя обе стороны стремятся закрепить в договоре как можно более обоснованный и точный прогноз. Расхождение между прогнозируемым и фактическим развитием рыночных параметров, как правило, приводит к убыткам одного контрагента, тогда как другой получает прибыль. Каждая сторона должна принимать возможность того, что заключённый договор окажется убыточным, одновременно рассчитывая на то, что рыночные условия сложатся в её финансовую пользу. Риск-менеджмент занимается прежде всего не возможными прибылями от контрактов на финансовых рынках, а финансовыми убытками. Если их можно заранее оценить, можно принять контрмеры, которые в значительной мере компенсируют потенциальные потери. Полная компенсация редко достижима, однако зачастую достаточно определить порядок величины или хотя бы верхнюю оценку возможных убытков.

В финансовом секторе существует ряд видов рисков, которые мы кратко охарактеризуем, прежде чем перейти к конкретным рискам, связанным с продуктами финансового рынка:

1. **Кредитный риск.** Потенциальные убытки в случае, если заёмщик не в состоянии выполнить обязательства по погашению долга полностью или частично. Это включает не только классический банковский кредит, но и так называемый риск эмитента — полную или частичную неплатёжеспособность эмитентов ценных бумаг, а также ухудшение кредитоспособности эмитента. Поскольку государства также привлекают заёмные средства или выпускают ценные бумаги, важен и страновой риск (неплатёжеспособность или нежелание платить со стороны государств).

2. **Рыночный риск.** Потенциальные убытки банков, кредитных организаций и держателей ценных бумаг, вызванные изменением рыночных условий. Для отдельных финансовых продуктов рыночный риск на конкретную дату оценки поддаётся количественному определению.

3. **Операционный риск.** «Операционный риск определён в статье 4(52) Регламента о требованиях к капиталу (CRR) как риск убытков вследствие неадекватности или отказа внутренних процессов, людей и систем либо вследствие внешних событий, включая правовые риски.» ([OR21])

4. **Риск ликвидности.** Организации различают: **риск ликвидности** в узком смысле (риск неплатёжеспособности) — риск того, что банк не сможет выполнить текущие и будущие платёжные обязательства полностью и в срок; **риск рефинансирования** — риск привлечения дополнительных средств рефинансирования лишь по более высоким рыночным ставкам; **риск рыночной ликвидности** — риск того, что в исключительных обстоятельствах активы придётся реализовать на рынке лишь с дисконтом. ([LR21])

В данной книге рассматривается в основном рыночный риск. Лишь для корпоративных облигаций (см. раздел **??**) дополнительно учитывается кредитный риск дефолта.

1.1. Основы расчёта риска

Расчёт риска связан с количественной оценкой возможных убытков при изменении рыночных условий. Поскольку точный убыток предсказать невозможно — развитие рыночных параметров неопределённо, — вычисляется максимально возможный убыток, то есть верхняя оценка убытков. Но и её нельзя определить точно; поэтому применяется теория вероятностей. Максимально возможный убыток вычисляется при уровне доверия 95%, 99% или 99,9%. Наши расчёты относятся к финансовым продуктам или портфелям (то есть совокупностям финансовых продуктов). Предполагается, что финансовый продукт или портфель удерживается неизменным в течение определённого периода — как правило, 1 или 10 банковских дней. Изменяться могут только рыночные условия.

Введём ряд определений. Рассмотрим финансовый инструмент в два момента времени t_0 и t_1. Цена финансового инструмента определяется ценовой функцией $P(t)$ и рыночными параметрами (рыночными данными), определяющими цену. Обозначим значение рыночного данного j в момент t через $y_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Рыночными данными могут быть: процентные ставки, обменные курсы и подобные величины, определяющие цену финансового продукта. В контексте анализа рисков рыночные данные также называются **данными рыночного риска** — подчёркивая, что изменения рыночных данных являются причиной возможных убытков:

$$\begin{aligned} P(t) &= P(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) \\ P(t_0) &= P(y_1(t_0), y_2(t_0), \ldots, y_n(t_0)) \\ P(t_1) &= P(y_1(t_1), y_2(t_1), \ldots, y_n(t_1)) \end{aligned}$$

t_0	начало периода удержания
t_1	конец периода удержания
$t_1 - t_0$	длительность периода удержания

Изменение стоимости финансового инструмента за период удержания $\Delta P(t_0, t_1)$:

$$\Delta P(t_0, t_1) = P(t_1) - P(t_0)$$

В зависимости от знака изменение стоимости является прибылью или убытком. Оно также называется **прибылью и убытком (PnL)**.

1.1.1. Статистические основы I

1. Распределение частот и функция распределения набора данных с индивидуальными значениями

Пусть задан набор данных из n индивидуальных значений x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, упорядоченных по возрастанию:

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$$

Если встречаются одинаковые значения, формируются различные характерные значения ξ_l с соответствующими абсолютными частотами $n_l = n(\xi_l)$. Они упорядочены:

$$\xi_1 \leq \xi_2 \leq \ldots \leq \xi_m, \quad n = \sum_{l=1}^{m} n_l$$

Распределение абсолютных частот сопоставляет каждому различному значению ξ_l его абсолютную частоту n_l. **Распределение относительных частот** сопоставляет каждому ξ_l его относительную частоту $p_l = \frac{n_l}{n}$, при этом $\sum p_l = 1$.

Табличное представление:

Различное значение	Абс. частота	Отн. частота
ξ_1	n_1	p_1
ξ_2	n_2	p_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
ξ_m	n_m	p_m

Пример:

Набор данных из 10 изменений стоимости портфеля (прибыль и убыток — PnL):

x_i	Значение
x_1	-1000
x_2	-500
x_3	-500
x_4	-500
x_5	-100
x_6	0
x_7	1000
x_8	2000
x_9	2000
x_{10}	2500

Некоторые значения совпадают ($x_2 = x_3 = x_4$ и $x_8 = x_9$). Распределение частот с различными значениями:

Различное значение	Абс. частота	Отн. частота
$\xi_1 = -1000$	1	0,1
$\xi_2 = -500$	3	0,3
$\xi_3 = -100$	1	0,1
$\xi_4 = 0$	1	0,1
$\xi_5 = 1000$	1	0,1
$\xi_6 = 2000$	2	0,2
$\xi_7 = 2500$	1	0,1

Накопленная частота:

Абсолютная накопленная частота: $H_l = \sum_{r=1}^{l} n_r$. Интерпретация: H_l наблюдений имеют значение $\leq \xi_l$.
Относительная накопленная частота: $F_l = \sum_{r=1}^{l} p_r$. Интерпретация: $F_l \cdot 100\%$ всех наблюдений имеют значение $\leq \xi_l$.

При $l = 3$: $H_3 = 1 + 3 + 1 = 5$, $F_3 = 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}5$. Пять наблюдений (50%) не превышают $\xi_3 = -100$.

Определение функции распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \forall x : x < \xi_1 \\ F_l = \sum_{r=1}^{l} p_r & \forall x : \xi_l \leq x < \xi_{l+1} \quad l = 1, 2, \ldots, m-1 \\ 1 & \forall x : x \geq \xi_m \end{cases}$$

$F(x)$ — это относительная накопленная частота значений $\leq x$.

Пример: Накопленные частоты для приведённого набора данных:

Различное значение	Абс. накопл. H_l	Отн. накопл. F_l
$\xi_1 = -1000$	1	0,1
$\xi_2 = -500$	4	0,4
$\xi_3 = -100$	5	0,5
$\xi_4 = 0$	6	0,6
$\xi_5 = 1000$	7	0,7
$\xi_6 = 2000$	9	0,9
$\xi_7 = 2500$	10	1,0

Функция распределения: $F(x) = \begin{cases} 0 & \forall x < -1000 \\ 0{,}1 & \forall x : -1000 \le x < -500 \\ 0{,}4 & \forall x : -500 \le x < -100 \\ 0{,}5 & \forall x : -100 \le x < 0 \\ 0{,}6 & \forall x : 0 \le x < 1000 \\ 0{,}7 & \forall x : 1000 \le x < 2000 \\ 0{,}9 & \forall x : 2000 \le x < 2500 \\ 1 & \forall x \ge 2500 \end{cases}$

2. Квантиль набора данных с индивидуальными значениями

Пусть наблюдения упорядочены: $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$.

Медиана $\widetilde{x}$:

$$\widetilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}} \quad \text{(нечётное } n\text{)} \qquad \widetilde{x} = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) \quad \text{(чётное } n\text{)}$$

Интерпретация: не менее 50% наблюдений $\le \widetilde{x}$; не менее 50% $\ge \widetilde{x}$.

Обобщение — квантиль:

Набор данных делится не на две равные части, а на две произвольные части в отношении p $(0 \le p \le 1)$. Это обобщение называется **квантилем** и обозначается x_p или $x_{p\cdot 100\%}$.

Интерпретация: не менее $p \cdot 100\%$ наблюдений $\le x_p$; не менее $(1-p)\cdot 100\% \ge x_p$:

$$\underbrace{x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_k}_{p\cdot 100\%} \quad \underbrace{\le x_{k+1} \le \ldots \le x_n}_{(1-p)\cdot 100\%}$$

Для нахождения квантиля x_p вычисляется $g = n \cdot p$. Если g — целое число: $x_p = x_g$. Иначе пусть $\widetilde{g}$ — целая часть g, $r = g - \widetilde{g}$:

$$x_p = (1-r)\cdot x_{\widetilde{g}} + r \cdot x_{\widetilde{g}+1} \quad \text{или} \quad x_p = \frac{x_{\widetilde{g}} + x_{\widetilde{g}+1}}{2}$$

Также: $x_p = \min(x \mid F(x) \ge p)$.

Пример (для приведённого набора данных):

- Медиана: $g = 10 \cdot 0{,}5 = 5$ (целое), но используем $\widetilde{x} = \frac{1}{2}(x_5 + x_6) = \frac{-100+0}{2} = -50$.
- 20%-квантиль: $g = 10 \cdot 0{,}2 = 2$ (целое), $x_{0,2} = x_2 = -500$.
- 99%-квантиль: $g = 10 \cdot 0{,}99 = 9{,}9$; $\widetilde{g} = 9$, $r = 0{,}9$:

$$x_{0,99} = \frac{x_9 + x_{10}}{2} = \frac{2000 + 2500}{2} = 2250 \quad \text{(среднее)}$$
$$x_{0,99} = 0{,}1 \cdot x_9 + 0{,}9 \cdot x_{10} = 0{,}1 \cdot 2000 + 0{,}9 \cdot 2500 = 2450 \quad \text{(позиционный)}$$

99% всех значений ≤ 2250 (или 2450); 1% > 2250 (или 2450).

Пример 2:

В расчёте риска обычно анализируются долгосрочные временны́е ряды темпов прироста (процентных изменений) рыночных данных. В качестве примера используется обменный курс USD/EUR с 2 января 2020 по 22 декабря 2020 — ровно 250 темпов прироста w_{wk_t}:

$$w_{wk_t}(\text{USD,EUR}) = \frac{wk_t(\text{USD,EUR}) - wk_{t-1}(\text{USD,EUR})}{wk_{t-1}(\text{USD,EUR})}$$

Дата	Обменный курс	Темп прироста
02 янв 2020	1,1193	–
03 янв 2020	1,1147	−0,0041
04 янв 2020	1,1194	0,0042
...	...	...
22 дек 2020	1,2239	0,0054

1%-квантиль при $n = 250$ находится между 2-м и 3-м наблюдениями ($g = 250 \cdot 0{,}01 = 2{,}5$, $r = 0{,}5$):

$$x_{0,01} = \frac{w_{wk_2} + w_{wk_3}}{2} = \frac{-0{,}0157 - 0{,}0122}{2} = -0{,}01395$$

Интерпретация: 1% всех темпов прироста $\leq -0{,}01395$; 99% $> -0{,}01395$.

3. Функция плотности и функция распределения случайной величины

Вместо дискретных распределений частот полезны непрерывные функции — особенно когда теоретические распределения могут приблизить дискретную гистограмму. Гистограмма темпов прироста обменного курса напоминает нормальное распределение. На практике распределение рыночных данных (темпов прироста процентных ставок и обменных курсов) и PnL можно аппроксимировать нормальным распределением.

Определения:

Функция плотности: Функция f называется функцией плотности случайной величины X, если:

$$\int_a^b f(t)\,dt = P(a \leq X \leq b)$$

Функция распределения:

$$F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Нормальное распределение:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt$$

Параметры: математическое ожидание μ и среднеквадратическое отклонение σ, определяемые из индивидуальных значений x_i:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n-1} \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

При $\mu = 0$ и $\sigma = 1$ получается **стандартное нормальное распределение**:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

При $\mu > 0$ кривая плотности сдвигается вправо; при $\mu < 0$ — влево. При $\sigma < 1$ кривая растягивается; при $\sigma > 1$ — сжимается.

4. Квантиль распределения случайной величины

Квантиль порядка p случайной величины X:

$$x_p = F_X^{-1}(p) = \inf[x \in \mathbb{R},\, F_X(x) \geq p] \tag{1.1}$$

Для нормального распределения квантиль интерпретируется как значение на оси x, делящее площадь под кривой плотности в отношении $p : (1-p)$.

1.1.2. Историческое моделирование

Цель исторического моделирования — получить 250 гипотетических значений PnL, из которых вычисляется квантиль.

Метод: Дневные темпы прироста рыночных данных за длительный исторический период (250 наблюдений) применяются к текущим значениям для получения 250 гипотетических будущих значений рыночных данных, из которых выводятся 250 гипотетических цен инструментов и значений PnL.

Темпы прироста:

$$w_{y_j}(t) = \frac{y_j(t) - y_j(t-1)}{y_j(t-1)} \quad \text{или} \quad w_{y_j}(t) = \ln \frac{y_j(t)}{y_j(t-1)} \tag{1.2}$$

Обе формулы дают приближённо равные значения. Темп прироста показывает, **на сколько процентов** изменилось рыночное данное по сравнению с предыдущим днём; $(1 + w_{y_j}(t))$ показывает отношение — **до какого процента** изменилось рыночное данное.

Гипотетические рыночные данные, цены и PnL:

$$y_j(T, t^*) = y_j(T-1) \cdot (1 + w_{y_j}(t^*)), \quad t^* = T-1, T-2, \ldots, T-250 \tag{1.3}$$

$$P(T, t^*) = P(y_1(T, t^*), y_2(T, t^*), \ldots, y_m(T, t^*)) \tag{1.4}$$

$$\Delta P(T, t^*) = P(T, t^*) - P(T-1) \tag{1.5}$$

Из 250 значений PnL определяется 1%- (или 5%-) квантиль.

1 фактор риска

При единственном рыночном данном в качестве фактора риска 1%-квантиль даёт максимальный убыток при уровне доверия 99% за 1-дневный период удержания: **Value at Risk (VaR)**:

$$VaR(t, 99\%) = x_{0,01} = \min(\Delta P(t) \mid F(\Delta P(t)) \geq 0{,}01)$$

Пример 1:

Позиция 100 000 USD, удерживаемая с 22 по 23 декабря 2020 г. Домашняя валюта: EUR. Обменный курс 22 декабря 2020: $wk(T-1) = 0{,}8171$ EUR/USD. Стоимость: $100{,}000 \cdot 0{,}8171 = 81{,}706{,}02$ EUR.

251 исторический обменный курс (2 января 2020 — 22 декабря 2020) даёт 250 темпов прироста.

№	Дата	Курс	Темп прир.	Гип. курс	Гип. цена	Гип. PnL
0	02 янв	0,8934	–	–	–	–
1	03 янв	0,8971	0,0041	0,8204	82 043,20	337,17
2	06 янв	0,8933	−0,0042	0,8136	81 362,96	−343,06
3	07 янв	0,8951	0,0020	0,8187	81 866,92	160,90
...	...	...	...	...	...	...
250	22 дек	0,8171	−0,0054	0,8127	81 265,41	−440,61

Гипотетические обменные курсы:

$$wk(T, t^*) = wk(T-1) \cdot (1 + w_{wk}(t^*))$$
$$wk(T, 1) = 0{,}8171 \cdot (1 + 0{,}0041) = 0{,}8204$$

Упорядоченные гипотетические значения PnL (фрагмент):

Дата	PnL
26 мар 2020	−1,145,86
06 мар 2020	−1,073,94
02 мар 2020	−1,065,22
...	...
17 мар 2020	1,302,00

$VaR(T, 99\%)$: $g = 250 \cdot 0{,}01 = 2{,}5$; квантиль между 2-м и 3-м наблюдениями:

$$x_{0,01} = \frac{-1{,}073{,}94 - 1{,}065{,}22}{2} = -1{,}069{,}58 \text{ EUR}$$

Максимальный убыток при удержании 100 000 USD с 22 по 23 декабря 2020 при уровне доверия 99% составляет **1 069,58 EUR**.

Фактический обменный курс 23 декабря 2020: 0,8220. Фактический PnL: 82,196,28 − 81,706,02 = 490,26 EUR (прибыль; граница убытка не нарушена).

$VaR(T, 95\%)$: $g = 250 \cdot 0{,}05 = 12{,}5$; квантиль между 12-м и 13-м:

$$x_{0,05} = \frac{-728{,}68 - 724{,}10}{2} = -726{,}39 \text{ EUR}$$

Для 10-дневного периода удержания темпы прироста измеряются за 10-дневные интервалы.

2 фактора риска

Для портфеля из 100 000 USD и 200 000 GBP используются оба обменных курса (EUR/USD и EUR/GBP). Ценовая функция:

$$P(T, t^*) = 100{,}000 \cdot wk(\text{EUR,USD})(T, t^*) + 200{,}000 \cdot wk(\text{EUR,GBP})(T, t^*)$$

Стоимость портфеля при $T - 1$: $P(T-1) = 100{,}000 \cdot 0{,}8171 + 200{,}000 \cdot 1{,}0971 = 301{,}129{,}38$ EUR.

№	Дата	Курс USD	Курс GBP	Прирост USD	Прирост GBP	Гип.USD	Гип.GBP	Гип.цена	PnL
1	03 янв	0,8971	1,1749	0,0041	−0,0034	0,8204	1,0934	300 726,68	−402,70
2	06 янв	0,8933	1,1735	−0,0042	−0,0012	0,8136	1,0958	300 528,83	−600,55
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
250	22 дек	0,8171	1,0971	−0,0054	0,0051	0,8127	1,1027	301 800,96	671,58

Упорядоченные гипотетические значения PnL (фрагмент):

Дата	PnL
02 мар 2020	−5,594,09
23 мар 2020	−5,159,29
16 мар 2020	−4,848,14
...	...
20 мар 2020	5,434,68

$$x_{0,01} = \frac{-5{,}159{,}29 - 4{,}848{,}14}{2} = -5{,}003{,}72 \text{ EUR}$$

При уровне доверия 99% максимальный убыток портфеля составляет **5 003,72 EUR**. Позиция в GBP существенно увеличивает риск портфеля. Индивидуальные риски (−1,069,58 и −4,494,43) не складываются напрямую:

$$-1{,}069{,}58 + (-4{,}494{,}43) = -5{,}564{,}01 \neq -5{,}003{,}72$$

Совокупный риск ниже суммы индивидуальных рисков — **эффект диверсификации** вследствие корреляции между рыночными данными.

1.1.3. Статистические основы II

Дисперсия σ^2 и среднеквадратическое отклонение σ для одной рыночной переменной y_i:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2}{n-1} \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

При наличии нескольких рыночных переменных применяется многомерное распределение частот. При m рыночных переменных необходима матрица дисперсий-ковариаций.

Ковариация: Для двух рыночных переменных y_i и y_j:

$$\sigma^2_{y_i,y_j} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(y_i(k) - \mu_{y_i}) \cdot (y_j(k) - \mu_{y_j})}{n-1}$$

Ковариация отражает совместное изменение двух переменных. Если обе движутся в одном направлении, ковариация положительна; в противоположных — отрицательна.

Матрица дисперсий-ковариаций Σ:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2_{11} & \sigma^2_{12} & \dots & \sigma^2_{1m} \\ \sigma^2_{21} & \sigma^2_{22} & \dots & \sigma^2_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^2_{m1} & \sigma^2_{m2} & \dots & \sigma^2_{mm} \end{pmatrix}$$

$\sigma^2_{ij} = \sigma^2_{ji}$ (матрица симметрична).

Коэффициент корреляции:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma^2_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \quad (-1 \le \rho_{ij} \le 1)$$

Матрица корреляций P:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Пример: Обменные курсы USD/EUR и GBP/EUR (250 темпов прироста):

$$\sigma^2_{wk(\text{USD,EUR})} = 0{,}000024 \quad \sigma^2_{wk(\text{GBP,EUR})} = 0{,}000030$$
$$\sigma^2_{wk(\text{USD,EUR})/wk(\text{GBP,EUR})} = 0{,}000005$$

Матрица дисперсий-ковариаций:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0{,}000024 & 0{,}000005 \\ 0{,}000005 & 0{,}000030 \end{pmatrix}$$

Коэффициент корреляции:

$$\rho = \frac{0{,}000005}{\sqrt{0{,}000024} \cdot \sqrt{0{,}000030}} = 0{,}1863$$

Матрица корреляций:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1863 \\ 0{,}1863 & 1 \end{pmatrix}$$

Обменные курсы положительно коррелированы: при росте EUR/USD EUR/GBP также имеет тенденцию к росту.

1.1.4. Метод дисперсий-ковариаций

Метод дисперсий-ковариаций не требует генерирования гипотетических значений PnL. Вместо этого он использует аппроксимацию нормальным распределением для распределения темпов прироста рыночных данных.

При расчёте риска математическое ожидание темпов прироста рыночных данных принимается равным нулю ($\mu_y = 0$). Дисперсия и среднеквадратическое отклонение при этом допущении:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n-1} \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Квантиль нормально распределённой случайной величины X с параметрами μ_X и σ_X:

$$x_p = \mu_X + \sigma_X \cdot F^{-1}_{X_{norm}}(p) \tag{1.6}$$

При $\mu_X = 0$: $x_p = \sigma_X \cdot F^{-1}_{X_{norm}}(p)$.

1. Один фактор риска

Ценовая функция: $P(t) = P(y(t))$. **Чувствительность** цены инструмента к фактору риска y:

$$\Delta_y^* = P'_y(t) \cdot y(t_0)$$

Среднеквадратическое отклонение (волатильность) инструмента:

$$\sigma_P = \Delta_y^* \cdot \sigma_y = P'_y(t) \cdot y(t_0) \cdot \sigma_y$$

Value at Risk для периода удержания Δt дней:

$$VaR_P(t_0, p) = P'_y(t) \cdot y(t_0) \cdot \sigma_y \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}_{X_{norm}}(p)$$

Пример 1 (продолжение раздела subsection 1.1.2): 100 000 USD, удержание 1 день. Ценовая функция: $P(t) = N \cdot wk(t)$. Производная: $P'_{wk} = N$.

Дисперсия: $\sigma^2_{wk(\text{EUR,USD})} = 0{,}000024$; СКО: $\sigma_{wk(\text{EUR,USD})} = 0{,}004920$.

При уровне доверия 99%: $F^{-1}_{X_{norm}}(0{,}01; \mu = 0; \sigma = 1) = -2{,}326348$.

$$VaR_P(t_0, 0{,}99) = 100{,}000 \cdot 0{,}8171 \cdot 0{,}004920 \cdot \sqrt{1} \cdot (-2{,}326348) = -935{,}18 \text{ EUR}$$

Интерпретация:

- $N \cdot wk(t_0) = 81{,}710$ EUR: стоимость позиции в EUR.
- $\sigma_{wk} = 0{,}004920$: СКО темпа прироста обменного курса.
- $F^{-1}_{X_{norm}}(0{,}01) = -2{,}326348$: квантиль стандартного нормального распределения при 1%.
- VaR $-935{,}18$ EUR: максимальный убыток за 1 день при уровне доверия 99%.
- За 10 дней: $VaR(t_0, 0{,}99) = 100{,}000 \cdot 0{,}8171 \cdot 0{,}004920 \cdot \sqrt{10} \cdot (-2{,}326348) = -2{,}957{,}28$ EUR.

Историческое моделирование дало VaR $-1{,}069{,}58$ EUR; метод дисперсий-ковариаций — $-935{,}18$ EUR. Методы расходятся, поскольку метод дисперсий-ковариаций предполагает точное нормальное распределение.

2. Два и более факторов риска

При нескольких факторах риска дисперсия заменяется матрицей дисперсий-ковариаций:

$$\sigma_P = \sqrt{\Delta^{*T} \Sigma \Delta^*}$$

Value at Risk:

$$VaR_P(t,p) = \sqrt{\Delta^{*T}\Sigma\Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}_{X_{norm}}(1-p)$$

Где Σ — матрица дисперсий-ковариаций, Δ^* — вектор-столбец чувствительностей:

$$\Delta^* = \begin{pmatrix} \Delta^*_1 \\ \Delta^*_2 \\ \vdots \\ \Delta^*_m \end{pmatrix}, \quad \Delta^*_j = P'_{y_j} \cdot y_j(t_0)$$

Альтернативный метод через матрицу корреляций P и индивидуальные VaR:

$$VaR(t,p) = -\sqrt{VaR_Y^T \cdot P \cdot VaR_Y}$$

Пример 2 (портфель 100 000 USD и 200 000 GBP):

Чувствительности:

$$\Delta^*_{wk(\text{EUR,USD})} = 100{,}000 \cdot 0{,}8171 = 81{,}710$$
$$\Delta^*_{wk(\text{EUR,GBP})} = 200{,}000 \cdot 1{,}0971 = 219{,}420$$

Матрица дисперсий-ковариаций (при $\mu = 0$; $\sigma^2_{wk(\text{EUR,GBP})} = 0{,}000033$):

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0{,}000024 & 0{,}000005 \\ 0{,}000005 & 0{,}000033 \end{pmatrix}$$

$VaR(1, 99\%)$ через матрицу дисперсий-ковариаций:

$$VaR(1,99\%) = \sqrt{(81{,}710 \;\; 219{,}420) \cdot \Sigma \cdot \begin{pmatrix} 81{,}710 \\ 219{,}420 \end{pmatrix}} \cdot (-2{,}326348) = -3{,}238{,}46 \text{ EUR}$$

Индивидуальные VaR:

$$VaR_{USD}(t_0, 0{,}99) = 100{,}000 \cdot 0{,}8171 \cdot 0{,}004920 \cdot 1 \cdot (-2{,}326348) = -935{,}18$$
$$VaR_{GBP}(t_0, 0{,}99) = 200{,}000 \cdot 1{,}0971 \cdot 0{,}005730 \cdot 1 \cdot (-2{,}326348) = -2{,}924{,}90$$

Матрица корреляций (при $\mu = 0$):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1933 \\ 0{,}1933 & 1 \end{pmatrix}$$

$VaR(1, 99\%)$ через матрицу корреляций:

$$VaR(1,99\%) = -\sqrt{(-935{,}18 \;\; -2{,}924{,}90) \cdot P \cdot \begin{pmatrix} -935{,}18 \\ -2{,}924{,}90 \end{pmatrix}} = -3{,}238{,}37 \text{ EUR}$$

Сравнение методов:

Историческое моделирование	Метод дисперсий-ковариаций
$-5{,}004$	$-3{,}238$

За 10-дневный период: $VaR(10, 99\%) = VaR(1, 99\%) \cdot \sqrt{10} \approx -10{,}240$ EUR.

Поскольку оба обменных курса коррелированы, индивидуальные VaR нельзя просто складывать ($-935{,}18 - 2{,}924{,}90 = -3{,}860{,}08 \neq -3{,}238$). Корреляция создаёт **эффект диверсификации**, снижающий риск:

$$\begin{aligned} VaR(1,99\%) &= \sqrt{VaR^2_{y_1} + VaR^2_{y_2} + 2 \cdot \rho_{y_1/y_2} \cdot VaR_{y_1} \cdot VaR_{y_2}} \\ &= \sqrt{(-935{,}18)^2 + (-2{,}924{,}90)^2 + 2 \cdot 0{,}1933 \cdot (-935{,}18) \cdot (-2{,}924{,}90)} = -3{,}238{,}37 \end{aligned}$$

Литература

[Böh21] Böhme, Wolfgang: *Finanzmathematik*. Skript, März 2021.

[Hul01] Hull, John C.: *Options, Futures and Other Derivatives*. Pearson, 2001.

[LR21] Deutsche Bundesbank: *Liquiditätsrisiko*. Website, 2021.

[OR21] Deutsche Bundesbank: *Operationelles Risiko*. Website, 2021.