Финансовая математика Часть 2b

Д-р Вольфганг Бёме

Март 2021

Оглавление

0.1 Процентные свопы 1
0.1.1 Ванильный своп (plain vanilla swap) 1
0.1.2 Форвардный своп 3
0.2 Валютные свопы 5
0.3 Золотые свопы 7
0.4 Облигации с фиксированным купоном 9
0.4.1 Облигация с годовым купоном 10
0.4.2 Облигация с внутригодовым купоном 11
0.4.3 Бескупонная облигация 12
0.5 Облигации с плавающим купоном (флоатеры) 12

0.1. Процентные свопы

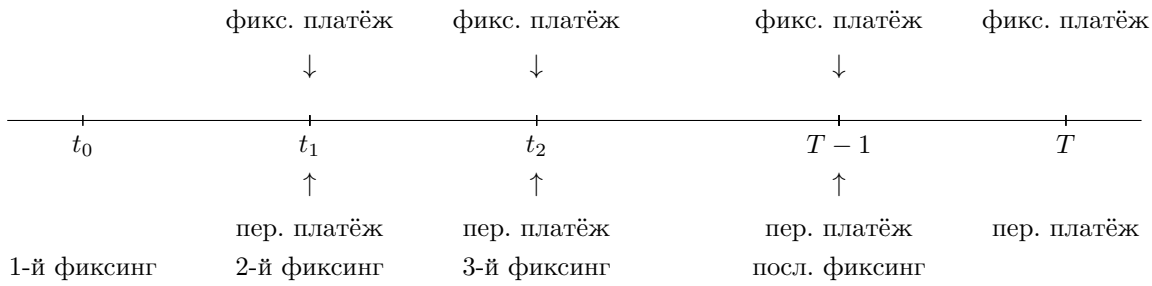
Процентные свопы — это производные финансовые инструменты, имеющие определённое сходство с соглашениями о будущей процентной ставке. Обе стороны договариваются об обмене процентными платежами в установленные даты — в данном случае фиксированных процентов на переменные. В FRA обе стороны фиксируют ставку, которая через определённый период сравнивается с референсной ставкой, порождая расчётный платёж — своего рода пари на уровень референсной ставки в будущем. В свопе, напротив, происходит чистый обмен фиксированных процентов на переменные или наоборот. Переменные проценты привязаны к референсной ставке, фиксируемой в установленную дату. В отличие от FRA, своп предполагает не единственный расчётный платёж, а серию согласованных процентных выплат. В этом смысле фиксированная нога напоминает облигацию с фиксированным купоном, выплачивающую постоянные периодические проценты по номинальной ставке; переменная нога напоминает облигацию с плавающим купоном (FRN), выплачивающую периодические переменные проценты.

Различают **своп-плательщик** и **своп-получатель**. В *свопе-плательщике* одна сторона платит фиксированные и получает переменные проценты; в **свопе-получателе** — платит переменные и получает фиксированные.

0.1.1. Ванильный своп (plain vanilla swap)

Ванильный своп — простейшая форма процентного свопа. По одной ноге выплачиваются проценты (фиксированные) по заранее установленной ставке свопа. По другой ноге выплачиваются переменные проценты на основе референсной ставки. Номинальный объём фиксирован и устанавливается при заключении договора (t_0). Референсная ставка впервые фиксируется в t_0. Процентный период начинается — как и в FRA — примерно через 2 рабочих дня после фиксинга; это различие здесь не учитывается. Процентные платежи производятся в конце каждого процентного периода (выплаты в конце периода). Как правило, согласовывается более одного процентного периода. Обмен номинальными объёмами (одинаковыми для обеих ног) не нужен, поскольку процентные суммы обмениваются в каждую дату выплаты и накопления номинала не происходит.

В t_0: согласовываются ставка свопа i_{SWAP} и номинальный объём N. Первый фиксинг референсной ставки ($i_{REF}(t_0 \to t_1)$) происходит в t_0; первые процентные платежи производятся в t_1. В t_1 референсная ставка фиксируется снова ($i_{REF}(t_1 \to t_2)$), и проценты за второй период выплачиваются в t_2. Последний процентный период — от $T-1$ до T.



Проценты рассчитываются отдельно для фиксированной ноги Z_{fix} и переменной ноги $Z_{j,var}$. Предполагается, что процентный период равен одному году и ставки заданы как годовые. Фактический поток — не полная сумма процентов, а разница процентных ставок $\Delta_{(t_j,t_{j+1})} = Z_{fix} - Z_{(t_j,t_{j+1},var)}$, которую несёт либо фиксированная нога (если $\Delta < 0$), либо переменная нога (если $\Delta > 0$):

$$\begin{aligned} Z_{fix} &= N \cdot i_{SWAP} = \text{const.} \\ Z_{(t_j,t_{j+1},var)} &= N \cdot i_{REF}(t_j \to t_{j+1}) \\ \Delta_{(t_j,t_{j+1})} &= Z_{fix} - Z_{(t_j,t_{j+1},var)} \end{aligned}$$

Приведённую стоимость можно вначале определить раздельно для фиксированной и переменной ног — фиксированная нога соответствует облигации с фиксированным купоном, переменная — флоатеру (см. разделы subsection 0.4.1 и section 0.5). Используются дисконтирующие множители $\hat{q}_{(t_0 \leftarrow t)}$, полученные из кривой доходности бескупонных облигаций.[1]

$$BW_0(Z_{fix,j}) = Z_{fix} \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow t_{j+1})} \tag{1}$$

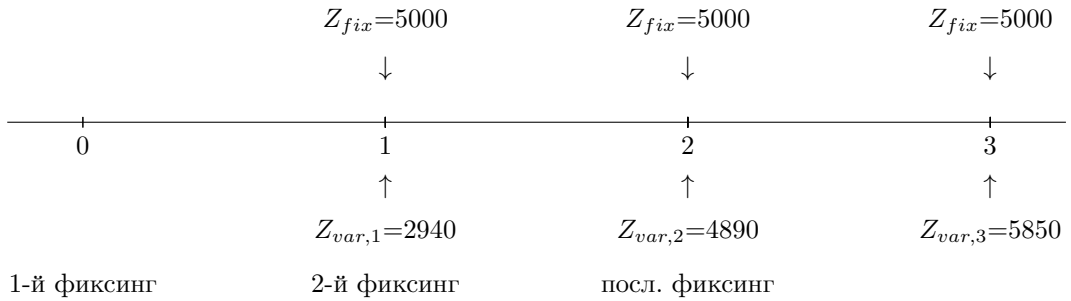
$$BW_0(Z_{var,j}) = Z_{var,j} \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow t_{j+1})} \tag{2}$$

$$BW_0 = \sum_{t=t_1}^{T} [BW_0(Z_{fix,j}) - BW_0(Z_{var,j})] \tag{3}$$

Переменные ставки $i_{REF}(t_j \to t_{j+1})$ неизвестны в t_j (кроме $t_j = t_0$); поэтому используются форвардные ставки, полученные из той же кривой доходности, что и дисконтирующие множители.

Пример:

Оценивается своп с годовыми процентными периодами и 3-летним сроком. Это своп-плательщик: фиксированная нога платит, переменная получает. Номинальный объём: 100 000 EUR. Согласованная ставка свопа: 5%. Референсная ставка: кривая доходности бескупонных облигаций.



Бескупонные ставки и дисконтирующие множители (из раздела **??**):

Оставшийся срок	Бескупонная ставка	Дисконт. множитель
1 год	0,0294	0,9714
2 года	0,0391	0,9262
3 года	0,0455	0,8750

[1] На практике применяются бескупонные кривые EURIBOR или LIBOR (для сроков до одного года) или так называемые своп-кривые (для более длительных сроков). Их построение аналогично кривой доходности бескупонных облигаций; см. [SWR21].

Фиксированная нога: $Z_{fix} = 100{,}000 \cdot 0{,}05 = 5{,}000$ EUR в период.

Переменные ставки (форвардные; первый фиксинг известен: $i_{REF}(0 \to 1) = 0{,}0294$):

	1	2	3
0	**0,0294**	0,0391	0,0455
1		**0,0489**	0,0536
2			**0,0585**

$$Z_{var,1} = 100{,}000 \cdot 0{,}0294 = 2{,}940, \quad Z_{var,2} = 100{,}000 \cdot 0{,}0489 = 4{,}890, \quad Z_{var,3} = 100{,}000 \cdot 0{,}0585 = 5{,}850$$

Приведённые стоимости фиксированной ноги:

$$\begin{aligned} BW_0(Z_{fix,1}) &= 5{,}000 \cdot 0{,}9714 = 4{,}857 \\ BW_0(Z_{fix,2}) &= 5{,}000 \cdot 0{,}9262 = 4{,}631 \\ BW_0(Z_{fix,3}) &= 5{,}000 \cdot 0{,}8750 = 4{,}375 \\ BW_0(Z_{fix}) &= 13{,}863 \end{aligned}$$

Приведённые стоимости переменной ноги:

$$\begin{aligned} BW_0(Z_{var,1}) &= 2{,}940 \cdot 0{,}9714 = 2{,}855{,}92 \\ BW_0(Z_{var,2}) &= 4{,}890 \cdot 0{,}9262 = 4{,}529{,}12 \\ BW_0(Z_{var,3}) &= 5{,}850 \cdot 0{,}8750 = 5{,}118{,}75 \\ BW_0(Z_{var}) &= 12{,}503{,}78 \end{aligned}$$

$$BW_0 = P_0 = 13{,}863 - 12{,}503{,}78 = 1{,}359{,}22 \text{ EUR}$$

Приведённая стоимость составляет 1 359,22 EUR; согласованная ставка свопа не отражает рыночные условия. **Справедливую ставку свопа** можно определить ретроспективно:

$$i_{SWAP,fair} = \frac{12{,}503{,}78}{100{,}000 \cdot (0{,}9714 + 0{,}9262 + 0{,}8750)} = 0{,}0451 = \mathbf{4{,}51}\%$$

При этой ставке $BW_0 = 0$ в $t = 0$.

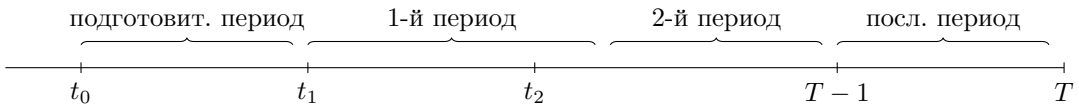
Приведённая стоимость в $t = 2$ (справедливая ставка 4,51%; фактическая референсная ставка $i_{REF}(2 \to 3) = 0{,}05$; $\hat{q}_{(2 \leftarrow 3)} = 0{,}9447$):

$$\begin{aligned} Z_{fix,3} &= 100{,}000 \cdot 0{,}0451 = 4{,}510 \\ Z_{var,3} &= 100{,}000 \cdot 0{,}05 = 5{,}000 \\ BW_2 = P_2 &= 4{,}510 \cdot 0{,}9447 - 5{,}000 \cdot 0{,}9447 = -462{,}89 \text{ EUR} \end{aligned}$$

Хотя в $t = 0$ была согласована справедливая ставка свопа, приведённая стоимость в $t = 2$ отличается от нуля, поскольку фактическая референсная ставка (5%) отличается от форвардной ставки (5,85%).

0.1.2. Форвардный своп

Форвардный своп отличается от ванильного свопа тем, что сам своп начинается только после подготовительного периода.

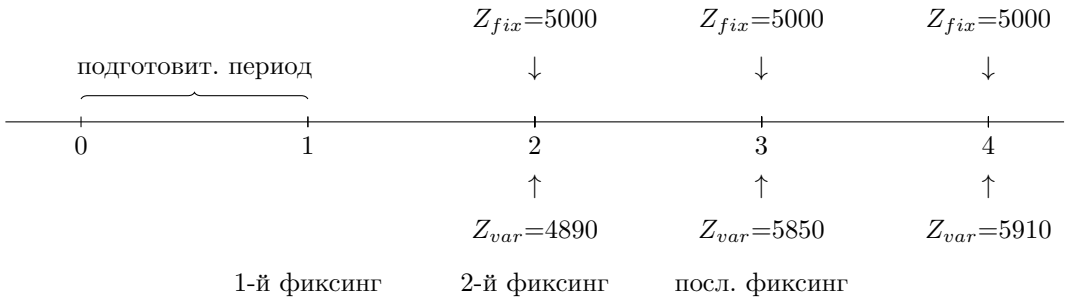


В t_0: согласовываются ставка свопа и номинал. В t_1 (начало первого процентного периода): первый фиксинг. Процентные платежи начинаются в t_2.



Пример:

Форвардный своп-плательщик с годовыми процентными периодами и общим сроком 4 года (включая 1-летний подготовительный период). Номинал: 100 000 EUR, ставка свопа 5%, референсная ставка: кривая доходности бескупонных облигаций.



Форвардные ставки (для форвардного свопа все переменные ставки, включая первый период, считаются неизвестными в $t = 0$):

	1	2	3	4
0	0,0294	0,0391	0,0455	0,0489
1		**0,0489**	0,0536	0,0554
2			**0,0585**	0,0588
3				**0,0591**

Переменные проценты:

$$Z_{var,(1,2)} = 100{,}000 \cdot 0{,}0489 = 4{,}890, \quad Z_{var,(2,3)} = 100{,}000 \cdot 0{,}0585 = 5{,}850, \quad Z_{var,(3,4)} = 100{,}000 \cdot 0{,}0591 = 5{,}910$$

Дисконтирующие множители (из раздела **??**):

	1	2	3	4
0	**0,9714**	**0,9262**	**0,8750**	**0,8262**
1		0,9534	0,9008	0,8505

Фиксированная нога ($t = 0$):

$$BW_0(Z_{fix,2}) = 5{,}000 \cdot 0{,}9262 = 4{,}631, \quad BW_0(Z_{fix,3}) = 5{,}000 \cdot 0{,}8750 = 4{,}375, \quad BW_0(Z_{fix,4}) = 5{,}000 \cdot 0{,}8262 = 4{,}13$$
$$BW_0(Z_{fix}) = 13{,}137$$

Переменная нога ($t = 0$):

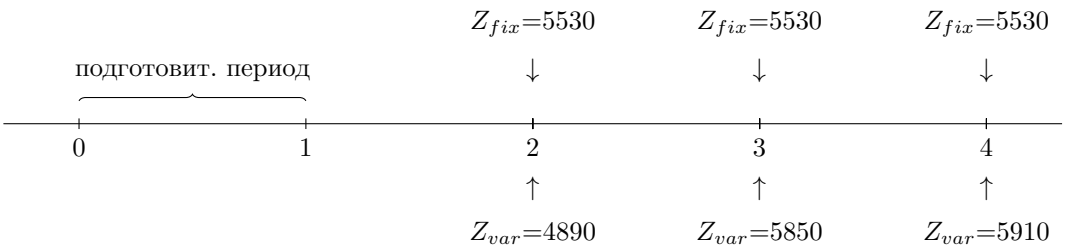
$$\begin{aligned} BW_0(Z_{var,(1,2)}) &= 4{,}890 \cdot 0{,}9262 = 4{,}529{,}12 \\ BW_0(Z_{var,(2,3)}) &= 5{,}850 \cdot 0{,}8750 = 5{,}118{,}75 \\ BW_0(Z_{var,(3,4)}) &= 5{,}910 \cdot 0{,}8262 = 4{,}882{,}84 \\ BW_0(Z_{var}) &= 14{,}530{,}71 \end{aligned}$$

$$BW_0 = 13{,}137 - 14{,}530{,}71 = -1{,}393{,}71 \text{ EUR}$$

Справедливая ставка свопа:

$$i_{SWAP,fair} = \frac{14{,}530{,}71}{100{,}000 \cdot (0{,}9262 + 0{,}8750 + 0{,}8262)} = 0{,}0553 = \mathbf{5{,}53}\%$$

При справедливой ставке $BW_0 = 0$. Обновлённые денежные потоки при $Z_{fix} = 100{,}000 \cdot 0{,}0553 = 5{,}530$ EUR:



Приведённая стоимость в $t = 1$ (справедливая ставка; дисконтирующие множители из строки $t = 1$):

$$\begin{aligned} BW_1(Z_{fix,2}) &= 5{,}530 \cdot 0{,}9534 = 5{,}272{,}30 \\ BW_1(Z_{fix,3}) &= 5{,}530 \cdot 0{,}9008 = 4{,}981{,}42 \\ BW_1(Z_{fix,4}) &= 5{,}530 \cdot 0{,}8505 = 4{,}703{,}27 \\ BW_1(Z_{fix}) &= 14{,}956{,}99 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BW_1(Z_{var,(1,2)}) &= 4{,}890 \cdot 0{,}9534 = 4{,}662{,}13 \\ BW_1(Z_{var,(2,3)}) &= 5{,}850 \cdot 0{,}9008 = 5{,}269{,}68 \\ BW_1(Z_{var,(3,4)}) &= 5{,}910 \cdot 0{,}8505 = 5{,}026{,}46 \\ BW_1(Z_{var}) &= 14{,}958{,}27 \end{aligned}$$

$$BW_1 = P_1 = 14{,}956{,}99 - 14{,}958{,}27 \approx -1{,}28 \text{ EUR}$$

Даже при справедливой ставке приведённая стоимость в $t = 1$ отличается от нуля, поскольку дисконтирование производится начиная с $t = 1$, а не с $t = 0$.

Дальнейшие модификации процентных свопов (свопы с запаздывающим фиксингом, своп с постоянным сроком) здесь не рассматриваются; см. [Wie18].

0.2. Валютные свопы

Валютные свопы — это обменные операции, при которых контрагенты договариваются обменять две суммы в разных валютах, включая начисленные проценты, в определённый момент. Различают: своп фиксированный/фиксированный (фиксированные ставки в обеих валютах), своп плавающий/плавающий (переменные ставки в обеих валютах) и кросс-валютный своп (одна нога фиксированная, другая переменная). Независимо от конкретной формы, капитальные суммы в разных валютах обмениваются по текущему спотовому курсу в начале срока. В конце срока капитальные суммы обмениваются обратно по курсу, согласованному при заключении договора. Процентные платежи обмениваются в конце каждого процентного периода.

Сначала предположим, что процентный период равен одному году и срок один год. Денежные потоки:



Капитальные суммы в t_0 обмениваются по спотовому курсу $wk_{t_0}(1,2)$; в T — обратно по согласованному курсу $wk_T(1,2)$.
Капитальные суммы:

$$K_{t_0}(1) = K_{t_0}(2) \cdot wk_{t_0}(1,2)$$
$$K_T(1) = K_T(2) \cdot wk_T(1,2)$$

Проценты:

$$Z_T(1) = K_{t_0}(1) \cdot i_1(t_0 \to T)$$
$$Z_T(2) = K_{t_0}(2) \cdot i_2(t_0 \to T)$$

Приведённые стоимости (дисконтирование с помощью валютно-специфических бескупонных дисконтирующих множителей):

$$BW_{t_0}(1) = K_T(1) \cdot \hat{q}_{1,(t_0 \leftarrow T)} \tag{4}$$
$$BW_{t_0}(2) = K_T(2) \cdot \hat{q}_{2,(t_0 \leftarrow T)} \tag{5}$$

С точки зрения плательщика валюты 1:

$$BW_{t_0} = BW_{t_0}(1) - BW_{t_0}(2) \cdot wk_{t_0}(1,2) \tag{6}$$

С точки зрения плательщика валюты 2:

$$BW_{t_0} = BW_{t_0}(2) - \frac{BW_{t_0}(1)}{wk_{t_0}(1,2)} \tag{7}$$

Пример (один процентный платёж):

В t_0: 1 000 000 EUR обменивается на USD по wk_0(EUR,USD) = 0,84 EUR/USD, получая 1 190 476,19 USD. Через 1 год долларовая сумма обменивается обратно по $wk_T = 0{,}88$ EUR/USD. Бескупонные ставки: $i_{EUR} = 0{,}04$, $i_{USD} = 0{,}05$; дисконтирующие множители: $\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 1)} = 0{,}9714$, $\hat{q}_{USD(0\leftarrow 1)} = 0{,}9662$.

$$K_T(USD) = 1{,}190{,}476{,}19 \cdot 1{,}05 = 1{,}250{,}000$$
$$K_T(EUR) = 1{,}000{,}000 \cdot 1{,}04 = 1{,}040{,}000$$
$$BW_0(USD) = 1{,}250{,}000 \cdot 0{,}9662 = 1{,}207{,}750$$
$$BW_0(EUR) = 1{,}040{,}000 \cdot 0{,}9714 = 1{,}010{,}256$$

С точки зрения плательщика EUR:

$$BW_0 = 1{,}010{,}256 - 1{,}207{,}750 \cdot 0{,}84 = -4{,}254 \text{ EUR}$$

С точки зрения плательщика USD:

$$BW_0 = 1{,}207{,}750 - \frac{1{,}010{,}256}{0{,}84} = 5{,}064{,}29 \text{ USD}$$

Суммы эквивалентны: $5{,}064{,}29 \cdot 0{,}84 = 4{,}254$ EUR.

Пример (несколько процентных платёжных дат):

Общие формулы для свопов фикс./фикс., пл./пл. и кросс-валютных:

$$BW_{t_0}(1) = \sum_{j=1}^{T-1} Z_j(1) \cdot \hat{q}_{1,(0\leftarrow j)} + (K_{t_0}(1) + Z_T(1)) \cdot \hat{q}_{1,(0\leftarrow T)} \tag{8}$$

$$BW_{t_0}(2) = \sum_{j=1}^{T-1} Z_j(2) \cdot \hat{q}_{2,(0\leftarrow j)} + (K_{t_0}(2) + Z_T(2)) \cdot \hat{q}_{2,(0\leftarrow T)} \tag{9}$$

Пример: 1 000 000 EUR обменивается по $wk_0 = 0{,}84$ EUR/USD на 1 190 476,19 USD; срок 2 года; USD по фиксированной ставке 3,5%; EUR по плавающей ставке; обратный обмен по $wk_2 = 0{,}88$.

Рыночные условия при $t = 0$: $\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 1)} = 0{,}9714$, $\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)} = 0{,}9262$; $\hat{q}_{USD(0\leftarrow 1)} = 0{,}9662$, $\hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)} = 0{,}9246$; $i_{EUR}(0 \to 1) = 0{,}0294$, $i_{EUR}(1 \to 2) = 0{,}0391$.
Процентные платежи:

$$\begin{aligned} Z_{fix}(USD) &= 1{,}190{,}476{,}19 \cdot 0{,}035 = 41{,}666{,}67 \\ Z_{(0,1)}(EUR) &= 1{,}000{,}000 \cdot 0{,}0294 = 29{,}400 \\ Z_{(1,2)}(EUR) &= 1{,}000{,}000 \cdot 0{,}0391 = 39{,}100 \end{aligned}$$

Приведённые стоимости:

$$\begin{aligned} BW_0(USD) &= 41{,}666{,}67 \cdot 0{,}9662 + (1{,}190{,}476{,}19 + 41{,}666{,}67) \cdot 0{,}9246 = 1{,}179{,}497{,}62 \\ BW_0(EUR) &= 29{,}400 \cdot 0{,}9714 + (1{,}000{,}000 + 39{,}100) \cdot 0{,}9262 = 990{,}973{,}58 \end{aligned}$$

С точки зрения плательщика EUR:

$$BW_0 = 990{,}973{,}58 - 1{,}179{,}497{,}62 \cdot 0{,}84 = \mathbf{195{,}57}\ \text{EUR}$$

С точки зрения плательщика USD:

$$BW_0 = 1{,}179{,}497{,}62 - \frac{990{,}973{,}58}{0{,}84} = -232{,}83\ \text{USD}$$

Суммы эквивалентны при $wk_0 = 0{,}84$.

Приведённая стоимость в $t = 1$. Рыночные условия: $wk_1 = 0{,}83$; $\hat{q}_{EUR(1\leftarrow 2)} = 0{,}9534$; $\hat{q}_{USD(1\leftarrow 2)} = 0{,}9524$.

$$\begin{aligned} BW_1(USD) &= (1{,}190{,}476{,}19 + 41{,}666{,}67) \cdot 0{,}9524 = 1{,}173{,}492{,}86 \\ BW_1(EUR) &= (1{,}000{,}000 + 39{,}100) \cdot 0{,}9534 = 990{,}677{,}94 \\ BW_1 &= 990{,}677{,}94 - 1{,}173{,}492{,}86 \cdot 0{,}83 = \mathbf{16{,}679{,}58}\ \text{EUR} \end{aligned}$$

0.3. Золотые свопы

При золотом свопе (обмене золота) золото передаётся на согласованный срок и по фиксированной цене в обмен на иностранную валюту. Это помогает странам, переживающим кризис, получить ликвидность в краткосрочной перспективе. В странах, располагающих золотыми резервами или добывающих золото, центральные банки предоставляют золото на краткосрочной основе, чтобы снабдить свою экономику иностранной валютой. Взамен они получают свободно конвертируемые иностранные валюты, которые, однако, должны быть возвращены с процентами по истечении согласованного срока. Сделка особенно проста, когда золотые резервы — по крайней мере частично — депонированы в иностранных банках. Эти банки предлагают золотые свопы особенно обременённым долгами развивающимся странам. Золотой своп — это товарная срочная сделка, осуществляемая на внебиржевом рынке (OTC-сделки). Структура договора не стандартизована. Для оценки золотого свопа помимо процентных ставок иностранной валюты необходима цена золота. Она котируется на биржах ежедневно.

Золотой своп функционирует как валютный своп, при этом цена золота интерпретируется как обменный курс к иностранной валюте. Особенность золотого свопа состоит в том, что золото, в отличие от капитала в иностранной валюте, не приносит процентов.

Пример:

Центральный банк, располагающий золотыми резервами, желает обменять часть этих резервов на EUR. Сделка осуществляется на Лондонском рынке золота (рынке OTC). Обычно торгуется 5 000 унций (одна тройская унция золота — 1 oz — имеет массу 31,1034768 г). 5 000 тройских унций составляют примерно 155 517 г = 155,517 кг. Центральный банк ссужает банку 5 000 тройских унций золота на 1 месяц и получает взамен по текущему курсу EUR/USD 0,84 и цене золота 1 780 USD за тройскую унцию 7 476 000 EUR ($K_{t_0}(\text{EUR})$). Через месяц возвращается сумма в EUR плюс проценты, при этом в качестве референсной ставки выбирается EURIBOR сроком 1 месяц. Фиксинг производится в начале договора. Договорено, что в конце срока эквивалент 5 000 тройских унций чистого золота будет возвращён по текущей цене золота и текущему обменному курсу. Зафиксированный EURIBOR составляет 0,0275 г.г. ($i_{EURIBOR}(t_0) = 0{,}0275$). Обменный курс на конец срока равен 0,83 $\frac{\text{EUR}}{\text{USD}}$, цена тройской унции чистого золота — 1 750 USD. С учётом текущей цены золота и обменного курса центральный банк должен выплатить 7 262 500 EUR ($1{,}750 \cdot 0{,}83 \cdot 5{,}000$) плюс проценты.

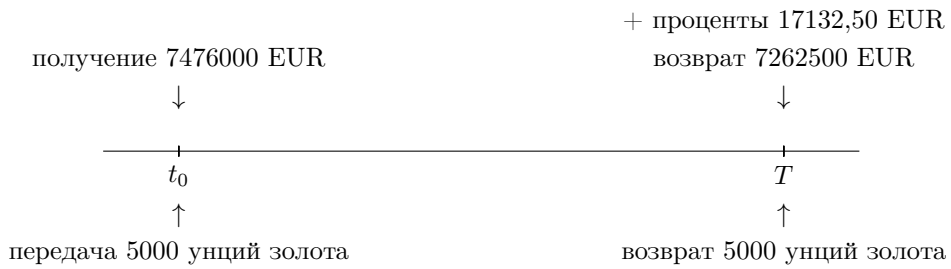
Проценты составляют:

$$\begin{aligned} Z_T(\text{EUR}) &= K_{t_0}(\text{EUR}) \cdot i_{EURIBOR}(t_0 \to T) = K_{t_0}(\text{EUR}) \cdot i_{EURIBOR}(t_0) \cdot \tfrac{1}{12} \\ &= 7{,}476{,}000 \cdot 0{,}0275 \cdot \tfrac{1}{12} = 17{,}132{,}50 \end{aligned}$$

Общая сумма к возврату составляет $7{,}262{,}500 + 17{,}132{,}50 = 7{,}279{,}632{,}50$ EUR. Очевидно, центральный банк заключил выгодную сделку, поскольку полученная в начале сумма в EUR значительно превышает сумму, подлежащую выплате в конце срока. Следует, однако, учитывать, что ни цена золота, ни обменный курс не были известны на момент заключения договора. Центральный банк, по всей видимости, ожидал снижения цены золота и обменного курса EUR/USD — и оказался прав.

Если бы цена золота выросла (до 1 800 USD) и курс EUR/USD также увеличился до 0,85 EUR/USD, цена обратного выкупа составила бы 7 650 000 EUR ($1{,}800 \cdot 0{,}85 \cdot 5{,}000 = 7{,}650{,}000$). При обратном выкупе 5 000 тройских унций пришлось бы уплатить $7{,}650{,}000 + 17{,}132{,}50 = 7{,}667{,}132{,}50$ EUR — значительно больше, чем было получено изначально. Очевидно, что золотой своп сопряжён с высоким риском ввиду неопределённости обменного курса и цены золота.

Денежные потоки с точки зрения центрального банка представлены на следующем рисунке:



За одним золотым свопом нередко следует другой золотой своп на аналогичных условиях, что позволяет центральному банку покрывать потребность в иностранной валюте на протяжении более длительного периода.

Определение приведённой стоимости затруднено тем, что ни цена золота, ни обменный курс не известны в начале срока и не могут быть предсказаны с помощью инструментов финансовой математики. Поэтому мы модифицируем пример таким образом, чтобы все будущие платежи были известны уже в начале срока. Вносятся следующие изменения:

1. Цена золота определяется не в долларах, а в евро. Это устраняет необходимость учёта обменного курса.

2. Вместо использования текущей цены золота на конец срока (как в примере) для расчёта возврата договаривается о цене, по которой золото будет выкуплено обратно.

Цена золота, номинированная в EUR, составляет 1,495,20 $\frac{\text{EUR}}{\text{тройская унция}}$ в начале срока (при цене золота 1 780 $\frac{\text{USD}}{\text{тройская унция}}$ и обменном курсе $wk_{t_0}(\text{EUR,USD}) = 0{,}84\ \frac{\text{EUR}}{\text{USD}}$).

Мы используем описанную выше ситуацию для момента T, однако рассматриваем цену золота и обменный курс на конец срока не как факторы риска, а как договорные величины. Из этого получается следующая цена золота в EUR: 1,495,00 $\frac{\text{EUR}}{\text{тройская унция}}$ (цена золота в USD: 1 750 $\frac{\text{USD}}{\text{тройская унция}}$; обменный курс: $wk_{t_0}(\text{EUR,USD}) = 0{,}83\ \frac{\text{EUR}}{\text{USD}}$; цена золота в EUR: $1{,}750 \cdot 0{,}83 = 1{,}452{,}50\ \frac{\text{EUR}}{\text{тройская унция}}$).

В момент t_0 расчёта приведённой стоимости остаётся только один платёж: 7 279 632,50 EUR в момент T. Взамен центральный банк получает обратно 5 000 тройских унций золота. Приведённая стоимость единственного платежа может быть рассчитана путём дисконтирования суммы 7 279 632,50 EUR с использованием EURIBOR:

$$\begin{aligned} BW_{t_0} &= 7{,}279{,}632{,}50 \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(t_0 \to T)} = 7{,}279{,}632{,}50 \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(t_0) \cdot \frac{1}{12}} \\ &= 7{,}279{,}632{,}50 \cdot \frac{1}{1 + 0{,}0275 \cdot \frac{1}{12}} = 7{,}262{,}988{,}15 \end{aligned}$$

Приведённая стоимость единственного, ещё не погашенного платежа составляет 7 262 988,15 EUR. Эта сумма сопоставляется с суммой в EUR, полученной при $t = 0$ за переданное золото: 7 476 000 EUR. Ценовая функция, следовательно, равна:

$$P_{t_0} = K_{t_0}(\text{EUR}) - BW_{t_0} = 7{,}476{,}000 - 7{,}262{,}988{,}15 = 213{,}011{,}85$$

Рассмотрим альтернативный случай: цена золота в USD равна 1 800 $\frac{\text{USD}}{\text{тройская унция}}$, обменный курс $wk_{t_0}(\text{EUR,USD}) = 0{,}85\ \frac{\text{EUR}}{\text{USD}}$, цена золота в EUR $1{,}800 \cdot 0{,}85 = 1{,}530{,}00\ \frac{\text{EUR}}{\text{тройская унция}}$. Обратный выкуп 5 000 тройских унций золота теперь стоит 7 650 000 EUR ($1{,}530 \cdot 5{,}000 = 7{,}650{,}000$). Дисконтирование с коэффициентом $\frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(t_0 \to T) \cdot \frac{1}{12}} = 0{,}9977$:

$$\begin{aligned} BW_{t_0} &= 7{,}667{,}132{,}50 \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(t_0) \cdot \frac{1}{12}} \\ &= 7{,}667{,}132{,}50 \cdot \frac{1}{1 + 0{,}0275 \cdot \frac{1}{12}} = 7{,}667{,}132{,}50 \cdot 0{,}9977 = 7{,}649{,}602{,}16 \end{aligned}$$

Ценовая функция тогда равна:

$$P_{t_0} = K_{t_0}(\text{EUR}) - BW_{t_0} = 7{,}476{,}000 - 7{,}649{,}602{,}16 = -173{,}602{,}16$$

Очевидно, что при таких обстоятельствах сделка невыгодна для центрального банка.

0.4. Облигации с фиксированным купоном

Облигация с фиксированным купоном характеризуется следующими параметрами:

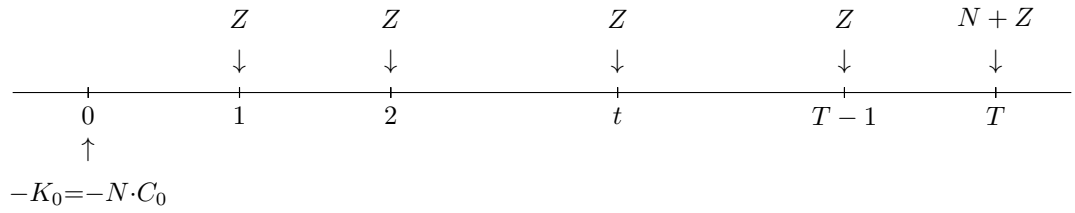
Номинальная стоимость	—	N
Номинальная ставка	—	i_{nom}
Срок	—	T
Процентный период	—	годовой, внутригодовой
Дата(ы) выплаты процентов	—	годовая, внутригодовая, в конце срока
Сумма процентов	—	рассчитывается из N и i_{nom}, обозначается Z

Расчёт процентов:

$$Z = N \cdot i_{nom} \tag{10}$$

В конце срока выплачивается номинальная стоимость. Покупатель платит покупную цену при размещении по курсу C_0; лишь если $C_0 = 100\%$, покупная цена совпадает с номинальной стоимостью.

Денежные потоки (облигация приобретена по курсу C_0 на дату размещения; выплаты в конце периода):



Во всех примерах с облигациями используется 4-летняя облигация, что позволяет применять бескупонные ставки и дисконтирующие множители из раздела **??**.

0.4.1. Облигация с годовым купоном

Приведённая стоимость (все денежные потоки дисконтируются с помощью $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$):

$$BW_0 = \sum_{j=1}^{T-1} Z \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow j)} + (N+Z) \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)} \tag{11}$$

Ценовая функция (включая выплату K_0):

$$P_0 = BW_0 - K_0 \tag{12}$$

Расчётный курс размещения:

$$C_0 = \frac{BW_0}{N} \tag{13}$$

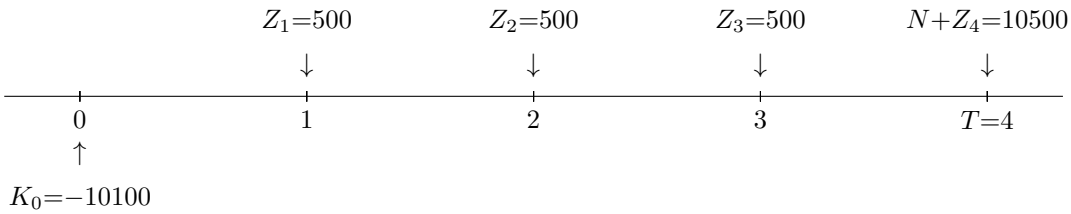
В будущий момент t:

$$BW_t = \sum_{j=t+1}^{T-1} Z \cdot \hat{q}_{(t\leftarrow j)} + (N+Z) \cdot \hat{q}_{(t\leftarrow T)} \tag{14}$$

$$P_t = BW_t - K_t \qquad C_t = \frac{BW_t}{N} \tag{15}$$

Пример:

4-летняя облигация; $i_{nom} = 5\%$; $N = 10{,}000$ EUR; $Z = 500$ EUR; курс размещения $C_0 = 101\%$, то есть $K_0 = 10{,}100$ EUR.



$$BW_0(Z_1) = 500 \cdot 0{,}9714 = 485{,}70$$
$$BW_0(Z_2) = 500 \cdot 0{,}9262 = 463{,}10$$
$$BW_0(Z_3) = 500 \cdot 0{,}8750 = 437{,}50$$
$$BW_0(N+Z_4) = 10{,}500 \cdot 0{,}8262 = 8{,}675{,}10$$
$$BW_0 = 10{,}061{,}40 \text{ EUR}$$

Расчётный курс: $C_{0,calc} = 100{,}61\%$ (фактический: 101%).

$$P_0 = 10{,}061{,}40 - 10{,}100 = -38{,}60 \text{ EUR}$$

Приведённая стоимость в $t = 2$: Оставшиеся платежи: $Z_3 = 500$ и $N + Z_4 = 10{,}500$. $\hat{q}_{(2\leftarrow 3)} = 0{,}9447$, $\hat{q}_{(2\leftarrow 4)} = 0{,}8920$:

$$BW_2 = 500 \cdot 0{,}9447 + 10{,}500 \cdot 0{,}8920 = 9{,}838{,}35 \text{ EUR} \quad C_{2,calc} = 98{,}38\%$$

Приведённая стоимость в $t = 2{,}25$: $\hat{q}_{(2{,}25\leftarrow 3)} = 0{,}9573$, $\hat{q}_{(2{,}25\leftarrow 4)} = 0{,}9039$:

$$BW_{2,25} = 500 \cdot 0{,}9573 + 10{,}500 \cdot 0{,}9039 = 9{,}969{,}60 \text{ EUR} \quad C_{2,25,calc} = 99{,}70\%$$

Расчётная цена в $t = 2{,}25$ включает полный купон за весь период $(2, 3)$, хотя покупатель держит облигацию лишь $\frac{3}{4}$ года. Поэтому необходимо рассчитать **накопленный купонный доход (НКД)** — проценты за интервал $[t_1, t]$ между последней датой выплаты купона t_1 и датой оценки t:



По конвенции 30/360, при $d_{t_1,t}$ днях:

$$Z_{t_1,t} = \frac{N \cdot i_{nom} \cdot d_{t_1,t}}{360}$$
$$Z_{2,2,25} = \frac{10{,}000 \cdot 0{,}05 \cdot 90}{360} = 125 \text{ EUR}$$

НКД составляет 125 EUR. Покупатель должен уплатить его дополнительно к покупной цене.

Чистая цена и грязная цена: Биржевая котировка не включает НКД и называется **чистой ценой**. Рассчитанная приведённая стоимость $BW_{2,25}$ содержит полные проценты за период, включая НКД. Если биржевая котировка в $t = 2{,}25$ равна 98%, то чистая цена составляет 9 800 EUR; **грязная цена** (фактический платёж) — $9{,}800 + 125 = 9{,}925$ EUR.

0.4.2. Облигация с внутригодовым купоном

Процентный период — один год; купонные выплаты — внутригодовые. Внутригодовые купоны:

$$Z_i = N \cdot i_{nom} \cdot \frac{1}{m}$$

Пример: 3-летняя облигация, $i_{nom} = 5\%$, ежеквартальные выплаты, $N = 10{,}000$ EUR. Квартальный купон: $Z_i = 125$ EUR; последний платёж: $N + Z_{12} = 10{,}125$ EUR.

Внутригодовые дисконтирующие множители (из раздела **??**):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,9927	0,9855	0,9785	0,9714	0,9615	0,9505	0,9388	0,9262	0,9140	0,9014	0,8884	0,8750

$$BW_0(Z_1) = 125 \cdot 0{,}9927 = 124{,}09 \quad \ldots \quad BW_0(Z_{11}) = 125 \cdot 0{,}8884 = 111{,}05$$
$$BW_0(N + Z_{12}) = 10{,}125 \cdot 0{,}8750 = 8{,}859{,}38 \quad BW_0 = 10{,}159{,}86 \text{ EUR}$$

$C_{0,calc} = 101{,}60\%$. При $K_0 = N = 10{,}000$: $P_0 = 159{,}86$ EUR.

Общие формулы (n лет, m выплат в год):

$$BW_0 = Z \cdot \sum_{t=1}^{nm} \hat{q}_{(0\leftarrow t)} + N \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow nm)} \tag{16}$$

$$P_0 = BW_0 + K_0 \qquad C_{0,calc} = \frac{BW_0}{N} \tag{17}$$

0.4.3. Бескупонная облигация

Бескупонная облигация предполагает только два платежа: покупная цена в начале и выплата номинала с накопленными процентами в конце срока. Накопленные проценты:

$$Z = N \cdot [(1 + i_{nom})^T - 1]$$

$$BW_0 = (N + Z) \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow T)} \qquad P_0 = BW_0 + K_0 \qquad C_{0,calc} = \frac{BW_0}{N} \tag{18}$$



Пример: $N = 10{,}000$ EUR, $i_{nom} = 5\%$, $T = 4$ года; $\hat{q}_{(0 \leftarrow 4)} = 0{,}8262$, $\hat{q}_{(2 \leftarrow 4)} = 0{,}8920$:

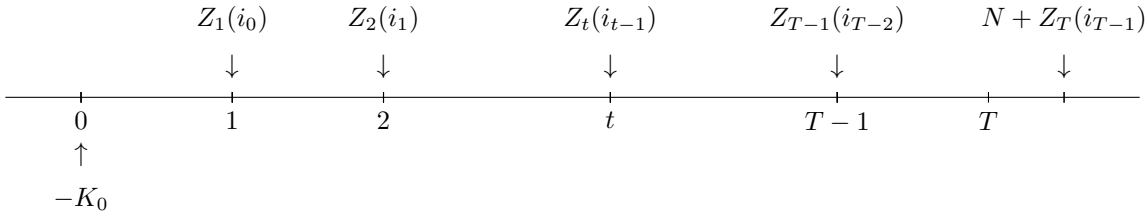
$$\begin{aligned} Z &= 10{,}000 \cdot (1{,}05^4 - 1) = 2{,}155{,}06 \\ BW_0 &= 12{,}155{,}06 \cdot 0{,}8262 = 10{,}042{,}51 \text{ EUR} \quad C_{0,calc} = 100{,}43\% \\ BW_2 &= 12{,}155{,}06 \cdot 0{,}8920 = 10{,}842{,}31 \text{ EUR} \quad C_{2,calc} = 108{,}42\% \end{aligned}$$

При курсе размещения $C_0 = 100\%$ ($K_0 = 10{,}000$): $P_0 = 42{,}51$ EUR.

0.5. Облигации с плавающим купоном (флоатеры)

У облигации с фиксированным купоном номинальная ставка постоянна на протяжении срока. У облигации с плавающим купоном (FRN, флоатер) ставка пересматривается в установленные **дни фиксинга** на основе референсной ставки (например, EURIBOR для европейских продуктов). Референсная ставка фиксируется в день фиксинга, как правило, с добавлением спреда Δ (например, 50 базисных пунктов). Эта ставка действует до следующего дня фиксинга.

При выпуске согласовываются референсная ставка и спред Δ. Фактические значения фиксируются в каждый день фиксинга.



Ставка для периода $(t-1, t)$:

$$i_{t-1} = i_{ref,t-1} + \Delta \qquad Z_t(i_{t-1}) = N \cdot i_{t-1}$$

Переменные ставки неизвестны при выпуске, но могут быть получены из кривой доходности бескупонных облигаций в виде форвардных бескупонных ставок.

Пример:

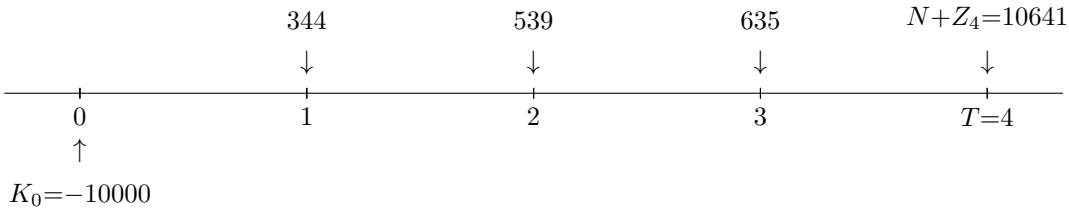
4-летний флоатер; $i_{nom} = 5\%$; спред $\Delta = 50$ б.п. $= 0{,}5\%$; $N = 10{,}000$ EUR; курс размещения $C_0 = 100\%$, $K_0 = 10{,}000$ EUR. Референсная ставка для первого периода $(0, 1)$: $i_{real}(0 \to 1) = 0{,}0294$.

$$i_0 = 0{,}0294 + 0{,}005 = 0{,}0344 \quad Z_1 = 344 \text{ EUR}$$

Форвардные ставки для оставшихся периодов:

	1	2	3	4
0	0,0294	0,0391	0,0455	0,0489
1		0,0489	0,0536	0,0554
2			0,0585	0,0588
3				0,0591

$$i_1 = 0{,}0539 \Rightarrow Z_2 = 539 \quad i_2 = 0{,}0635 \Rightarrow Z_3 = 635 \quad i_3 = 0{,}0641 \Rightarrow Z_4 = 641$$



$$BW_0(Z_1) = 344 \cdot 0{,}9714 = 334{,}16 \quad BW_0(Z_2) = 539 \cdot 0{,}9262 = 499{,}22$$
$$BW_0(Z_3) = 635 \cdot 0{,}8750 = 555{,}63 \quad BW_0(N + Z_4) = 10{,}641 \cdot 0{,}8262 = 8{,}791{,}59$$
$$BW_0 = 10{,}180{,}61 \text{ EUR} \quad C_{0,calc} = 101{,}80\% \quad P_0 = 180{,}61 \text{ EUR}$$

Ключевой результат: при $\Delta = 0$ выполняется $BW_0 = N$.

Если спред $\Delta = 0$, для расчёта процентов и дисконтирования используется одна и та же ставка; приведённая стоимость должна равняться номинальной стоимости. Это доказывается с помощью телескопической суммы:

$$BW_0 = N \cdot \left(1 - \frac{1}{q^T_{(0\leftarrow T)}} + \frac{1}{q^T_{(0\leftarrow T)}}\right) = N \tag{19}$$

При $\Delta \neq 0$ добавляется приведённая стоимость спредовой составляющей:

$$BW_0 = N + \Delta \cdot N \cdot \sum_{t=1}^{T} \hat{q}_{(0\leftarrow t)}$$

Для примера ($\Delta = 0{,}005$, $N = 10{,}000$, дополнительные проценты: 50 EUR в период):

$$(0{,}9714 + 0{,}9262 + 0{,}8750 + 0{,}8262) \cdot 50 = 179{,}94 \text{ EUR}$$
$$BW_0 = 10{,}000 + 179{,}94 = 10{,}179{,}94 \approx 10{,}180{,}61 \text{ EUR}$$

Приведённая стоимость в $t = 2{,}25$: При $t = 2$ фиксируется: $i_2 = 0{,}0635$, $Z_3 = 635$ EUR; $i_3 = 0{,}0641$, $Z_4 = 641$ EUR. $\hat{q}_{(2{,}25\leftarrow 3)} = 0{,}9573$, $\hat{q}_{(2{,}25\leftarrow 4)} = 0{,}9039$:

$$BW_{2,25} = 635 \cdot 0{,}9573 + 10{,}641 \cdot 0{,}9039 = 607{,}89 + 9{,}618{,}40 = \mathbf{10{,}226{,}28} \text{ EUR}$$

НКД в $t = 2{,}25$ (за период (2, 2,25), 90 дней по ставке $i_2 = 0{,}0635$):

$$Z_{2,2,25} = \frac{10{,}000 \cdot 0{,}0585 \cdot 90}{360} = 145{,}50 \text{ EUR}$$

Приведённая стоимость $BW_{2,25} = 10{,}226{,}28$ EUR включает полный купон за период $(2, 3)$; НКД в размере 145,50 EUR причитается продавцу при продаже облигации в $t = 2{,}25$.

Литература

[Böh21] Böhme, Wolfgang: *Finanzmathematik*. Skript, März 2021.

[Wie18] Wiedemann, Arnd: *Financial Engineering*. efiport GmbH, 2018.

[SWR21] Investing.com: *EUR 5 Years IRS Interest Rate Swap*. Website, 2021.