Финансовая математика Часть 2а

Д-р Вольфганг Бёме

Март 2021

Оглавление

1 Будущие и приведённые стоимости простых финансовых продуктов 2
1.1 Сберегательные продукты . . . 2
1.1.1 Планы накопления . . . 2
1.1.2 Срочный депозит . . . 6
1.2 Кредиты . . . 6
1.2.1 Процентный кредит (единовременное погашение) . . . 6
1.2.2 Кредит с равными долями погашения . . . 7
1.2.3 Аннуитетный кредит . . . 8
1.3 Внебиржевые форвардные контракты . . . 8
1.3.1 Внебиржевые форвардные валютные контракты . . . 8
1.3.2 Внебиржевые форвардные товарные контракты . . . 9
1.4 Соглашения о будущей процентной ставке (FRA) . . . 10

Глава 1

Будущие и приведённые стоимости простых финансовых продуктов

Концепция оценки с использованием бескупонных ставок и дисконтирующих множителей применяется в данной и последующих главах к финансовым продуктам. Мы также опираемся на элементы теории процентных вычислений, теории рент и погашения кредитов. Вычисляются будущие и приведённые стоимости; при этом для оценки используется не только текущий момент времени.

1.1. Сберегательные продукты

1.1.1. Планы накопления

Под планом накопления понимается процесс накопления капитала, обусловленный регулярными постоянными взносами (R) или переменными взносами (R_t), изменяющимися по заранее установленному правилу. Процесс накопления графически представлен следующим образом:



Это обычная рента с выплатами в конце периода: взносы начинаются в $t = 1$, последний взнос — в конце срока. Рассматриваются следующие случаи (исключительно для выплат в конце периода):

1. Постоянные годовые взносы при заданной годовой ставке (один постоянный взнос в год, в конце года; процентный период 1 год).
2. Постоянные внутригодовые взносы при заданной годовой ставке (постоянные взносы внутри года; процентный период 1 год).
3. Переменные годовые взносы при заданной годовой ставке (переменный взнос в конце года; процентный период 1 год): сумма взноса увеличивается на постоянную величину или с постоянным темпом роста.
4. Постоянные годовые взносы (в конце года; процентный период 1 год) в сочетании с переменной процентной ставкой.

1. Планы накопления с постоянными годовыми взносами:

Из раздела **??** будущая стоимость K_T рассчитывается по номинальной ставке i_{nom}:

$$K_T = R \cdot \frac{(1 + i_{nom})^T - 1}{i_{nom}}$$

Для корректной оценки каждого платежа каждый взнос R и будущая стоимость K_T дисконтируются с помощью срочно-зависимого бескупонного дисконтирующего множителя. Взносы представляют собой отток для вкладчика (отрицательный знак); будущая стоимость — приток (положительный знак):

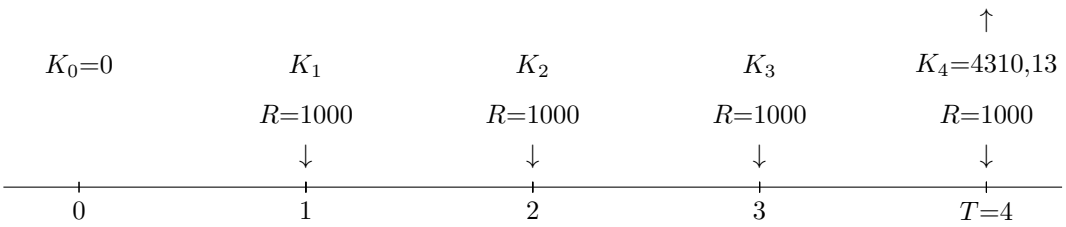
$$BW_0(R_t) = -R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)}, \quad t = 1, 2, \ldots, T$$
$$BW_0(K_T) = K_T \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)}$$

$$BW_0 = P(t=0) = -R \cdot \sum_{t=1}^{T} \hat{q}_{(0\leftarrow t)} + K_T \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)} \tag{1.1}$$

Приведённая стоимость всех платежей совпадает с ценовой функцией в $t = 0$.

Пример:

Как в примере из раздела **??**, в конце каждого года вносится 1 000 EUR. Ограничимся 4 взносами, используя бескупонные ставки и дисконтирующие множители из раздела **??**. Процентный период: 1 год; годовая ставка 5%. Требуется: накопленная сумма через 4 года и приведённая стоимость BW_0.



Накопленная сумма равна будущей стоимости ренты:

$$K_4 = 1{,}000 \cdot \frac{1{,}05^4 - 1}{0{,}05} = 4{,}310{,}13 \text{ EUR}$$

Бескупонные ставки и дисконтирующие множители (из раздела **??**):

Оставшийся срок	Бескупонная ставка	Дисконт. множитель
1 год	0,0294	0,9714
2 года	0,0391	0,9262
3 года	0,0455	0,8750
4 года	0,0489	0,8262

Дисконтирование каждого платежа:

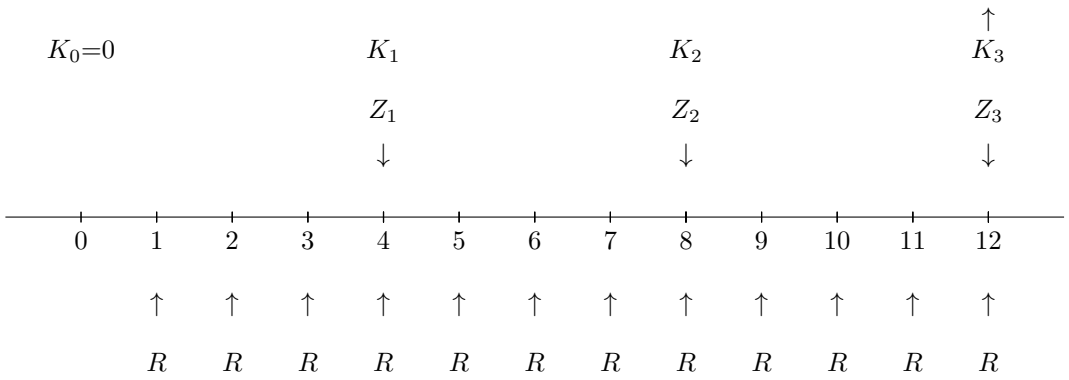
$$BW_0(R_1) = -1{,}000 \cdot 0{,}9714 = -971{,}40$$
$$BW_0(R_2) = -1{,}000 \cdot 0{,}9262 = -926{,}20$$
$$BW_0(R_3) = -1{,}000 \cdot 0{,}8750 = -875{,}00$$
$$BW_0(R_4) = -1{,}000 \cdot 0{,}8262 = -826{,}20$$
$$BW_0(K_4) = 4{,}310{,}13 \cdot 0{,}8262 = 3{,}561{,}30$$

$$BW_0 = \sum_{t=1}^{4} BW_0(R_t) + BW_0(K_4) = -3{,}598{,}80 + 3{,}561{,}30 = -37{,}50 \text{ EUR}$$

Приведённая стоимость плана накопления в $t = 0$ составляет $-37{,}50$ EUR. Заметим, что ценовая функция в $t = 0$ совпадает с приведённой стоимостью BW_0 (так как $K_0 = 0$).

2. Постоянные внутригодовые взносы при заданной годовой ставке:

Этот случай рассматривался в разделе **??**. Накопленный капитал (будущая стоимость ренты) составляет $K_{12} = 12{,}846{,}44$ EUR (ежеквартальные взносы по 1 000 EUR, срок 3 года, $i = 5\%$). Для расчёта приведённой стоимости с использованием бескупонных ставок требуются внутригодовые бескупонные ставки, получаемые интерполяцией (раздел **??**). Квартальные бескупонные ставки интерполируются из годовых ставок $i_{real}(0 \to 4)$, $i_{real}(0 \to 8)$ и $i_{real}(0 \to 12)$ (числа обозначают кварталы):



Интерполированные квартальные бескупонные ставки (кварталы пронумерованы 1–12):

$i_{real}(0 \to 1) = 0{,}0294 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}0074 \quad i_{real}(0 \to 2) = 0{,}0147 \quad i_{real}(0 \to 3) = 0{,}0220 \quad i_{real}(0 \to 4) = 0{,}0294$
$i_{real}(0 \to 5) = 0{,}75 \cdot 0{,}0294 + 0{,}25 \cdot 0{,}0391 = 0{,}0318 \quad i_{real}(0 \to 6) = 0{,}0343 \quad i_{real}(0 \to 7) = 0{,}0367 \quad i_{real}(0 \to 8) = 0$
$i_{real}(0 \to 9) = 0{,}75 \cdot 0{,}0391 + 0{,}25 \cdot 0{,}0455 = 0{,}0407 \quad i_{real}(0 \to 10) = 0{,}0423 \quad i_{real}(0 \to 11) = 0{,}0439 \quad i_{real}(0 \to 12) =$

Квартальные дисконтирующие множители (смешанное начисление для внутригодовых периодов):

$$\hat{q}_{(0\leftarrow 1)} = \tfrac{1}{1{,}0074} = 0{,}9927,\ \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} = 0{,}9855,\ \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} = 0{,}9785,\ \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 0{,}9714$$
$$\hat{q}_{(0\leftarrow 5)} = 0{,}9615,\ \hat{q}_{(0\leftarrow 6)} = 0{,}9505,\ \hat{q}_{(0\leftarrow 7)} = 0{,}9388,\ \hat{q}_{(0\leftarrow 8)} = 0{,}9262$$
$$\hat{q}_{(0\leftarrow 9)} = 0{,}9140,\ \hat{q}_{(0\leftarrow 10)} = 0{,}9014,\ \hat{q}_{(0\leftarrow 11)} = 0{,}8884,\ \hat{q}_{(0\leftarrow 12)} = 0{,}8750$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,9927	0,9855	0,9785	0,9714	0,9615	0,9505	0,9388	0,9262	0,9140	0,9014	0,8884	0,8750

Приведённые стоимости каждого платежа (взносы со знаком минус):

$$BW_0(R_1) = -992{,}7,\ \ldots,\ BW_0(R_{12}) = -875{,}0$$
$$BW_0(K_{12}) = 12{,}846{,}44 \cdot 0{,}8750 = 11{,}240{,}64$$

$$BW_0 = \sum_{t=1}^{12} BW_0(R_t) + BW_0(K_{12}) = -11{,}283{,}90 + 11{,}240{,}64 = -43{,}26 \text{ EUR}$$

В общем случае (n процентных периодов, m взносов в периоде):

$$BW_0 = P_0 = -R \cdot \sum_{t=1}^{nm} \hat{q}_{(0\leftarrow t)} + K_{nm} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow nm)} \tag{1.2}$$

3. Переменные годовые взносы при заданной годовой ставке:

Этот план накопления отличается от постоянного тем, что взнос ежегодно увеличивается на постоянную величину. Приведённый выше пример (4 годовых взноса по 1 000 EUR) изменяется так, чтобы взносы ежегодно возрастали на 100 EUR.
Будущая стоимость:

$$K_4 = 1{,}000 \cdot 1{,}05^3 + 1{,}100 \cdot 1{,}05^2 + 1{,}200 \cdot 1{,}05 + 1{,}300 = 4{,}930{,}38$$

Каждый платёж дисконтируется срочно-зависимым множителем:

$$BW_0(R_1) = -1{,}000 \cdot 0{,}9714 = -971{,}40$$
$$BW_0(R_2) = -1{,}100 \cdot 0{,}9262 = -1{,}018{,}82$$
$$BW_0(R_3) = -1{,}200 \cdot 0{,}8750 = -1{,}050{,}00$$
$$BW_0(R_4) = -1{,}300 \cdot 0{,}8262 = -1{,}074{,}06$$
$$BW_0(K_4) = 4{,}930{,}38 \cdot 0{,}8262 = 4{,}073{,}48$$

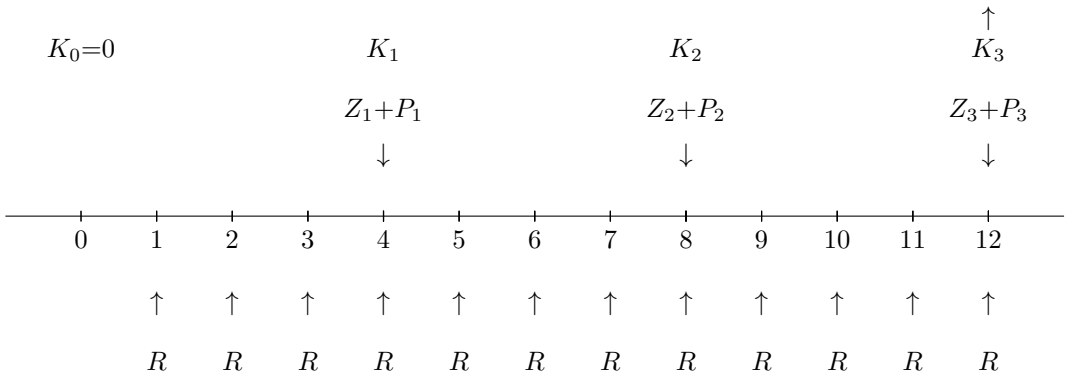
$$BW_0 = P_0 = -4{,}114{,}28 + 4{,}073{,}48 = -40{,}80 \text{ EUR}$$

Формулы из приложения **??** здесь *не применяются*, поскольку они основаны на дисконтировании по номинальной ставке, тогда как здесь используются срочно-зависимые бескупонные ставки.

4. Постоянные внутригодовые взносы с переменной ставкой (бонусный план накопления):

Дополнительное изменение: в конце каждого года начисляется бонус, рассчитываемый от суммы взносов за этот год и ежегодно возрастающий. Модификация внутригодового примера:

- Конец 1-го года: бонус 5% от годовых взносов ($P_1 = 200$ EUR)
- Конец 2-го года: бонус 10% ($P_2 = 400$ EUR)
- Конец 3-го года: бонус 15% ($P_3 = 600$ EUR)



(а) Дисконтированные бонусные выплаты $BW_0^*(P_t)$:

$$BW_0^*(P_1) = -200 \cdot 0{,}9714 = -194{,}28$$
$$BW_0^*(P_2) = -400 \cdot 0{,}9262 = -370{,}48$$
$$BW_0^*(P_3) = -600 \cdot 0{,}8750 = -525{,}00$$
$$BW_0^*(P) = -1{,}089{,}76$$

(б) Будущая стоимость бонусных выплат и её дисконтированное значение:

$$EW = 200 \cdot 1{,}05^2 + 400 \cdot 1{,}05 + 600 = 1{,}240{,}50$$
$$BW_0^*(EW) = 1{,}240{,}50 \cdot 0{,}8750 = 1{,}085{,}44$$

(в) Чистая приведённая стоимость бонусной составляющей:

$$BW_0(P) = -1{,}089{,}76 + 1{,}085{,}44 = -4{,}32$$

Суммарная приведённая стоимость:

$$BW_0 = P_0 = -43{,}26 - 4{,}32 = -47{,}58 \text{ EUR}$$

1.1.2. Срочный депозит

Срочный депозит — это простой финансовый продукт, при котором фиксированная сумма приносит доход в течение фиксированного срока. По истечении срока депозит возвращается. Проценты выплачиваются либо в конце срока, либо в конце каждого процентного периода. Процентный период, как правило, составляет 1 год.

Рассматривается простой случай: процентный период 1 год, фиксированная ставка, выплата процентов в конце срока:

$$K_T = K_0 \cdot (1 + i_{nom})^T$$

Приведённая стоимость (дисконтирование будущей стоимости с помощью бескупонного дисконтирующего множителя):

$$BW_0 = K_T \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)}$$

Пример: $K_0 = 10{,}000$ EUR, $i_{nom} = 5\%$, срок 4 года, $\hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 0{,}8262$:

$$K_4 = 10{,}000 \cdot 1{,}05^4 = 12{,}155{,}06$$
$$BW_0 = 12{,}155{,}06 \cdot 0{,}8262 = 10{,}042{,}51 \text{ EUR}$$

Приведённая стоимость (10,042,51 EUR) превышает номинальную сумму, поскольку реальная ставка (4,89%) ниже номинальной (5%): срочный депозит предлагает условия выше рыночных.

Осуществляются два платежа: вложение $-10{,}000$ EUR при $t = 0$; получение $+12{,}155{,}06$ EUR при $t = 4$. Ценовая функция:

$$P(0) = -K_0 + K_T \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)} = -10{,}000 + 12{,}155{,}06 \cdot 0{,}8262 = 42{,}51 \text{ EUR}$$

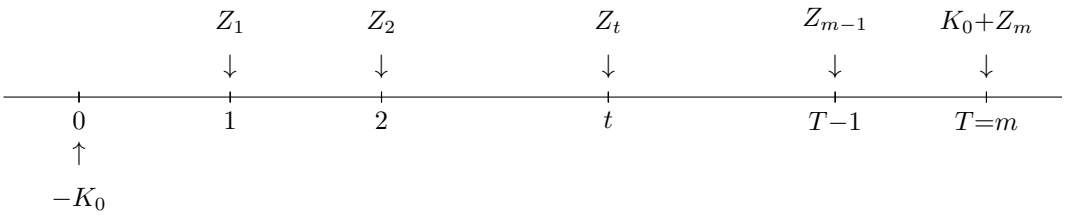
Положительная сумма указывает, что срочный депозит приносит несколько больше, чем предполагают рыночные условия в $t = 0$.

1.2. Кредиты

В данном разделе рассматриваются расчёт приведённой стоимости и ценовая функция для различных форм кредитования. Заёмщик получает от кредитной организации денежную сумму K_0 в момент $t = 0$ и обязуется погасить долг вместе с накопленными процентами к концу срока. Применяются различные методы, некоторые из которых были введены в главе **??**.

1.2.1. Процентный кредит (единовременное погашение)

Когда основной долг полностью погашается в конце срока, а проценты уплачиваются в конце каждого процентного периода, такая схема называется **процентным кредитом** или **кредитом с единовременным погашением**. За срок T производится ровно m платежей. Денежные потоки (с точки зрения кредитора: поступления положительны, выдача K_0 отрицательна):



Суммы процентов рассчитываются по номинальной ставке; дисконтирование производится с помощью бескупонных дисконтирующих множителей:

$$Z_t = K_0 \cdot i_{nom}$$

$$BW_0 = \sum_{t=1}^{m} Z_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} + K_0 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow m)} \tag{1.3}$$

Ценовая функция (включая выданный в $t = 0$ основной долг):

$$P(0) = -K_0 + BW_0 = -K_0 + \sum_{t=1}^{m} Z_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} + K_0 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow m)} \tag{1.4}$$

Пример: Процентный кредит 20 000 EUR, годовая ставка 5%, срок 4 года, платежи в конце периода. Годовые проценты: $0{,}05 \cdot 20{,}000 = 1{,}000$ EUR.

$$\begin{aligned} BW_0(Z_1) &= 1{,}000 \cdot 0{,}9714 = 971{,}40 \\ BW_0(Z_2) &= 1{,}000 \cdot 0{,}9262 = 926{,}20 \\ BW_0(Z_3) &= 1{,}000 \cdot 0{,}8750 = 875{,}00 \\ BW_0(Z_4) &= 1{,}000 \cdot 0{,}8262 = 826{,}20 \\ BW_0(K_0) &= 20{,}000 \cdot 0{,}8262 = 16{,}524{,}00 \\ BW_0 &= 20{,}122{,}80 \text{ EUR} \quad P(0) = 122{,}80 \text{ EUR} \end{aligned}$$

Приведённая стоимость в $t = 3$ (два платежа остаются: Z_3 и $K_0 + Z_4$; $\hat{q}_{(3\leftarrow 4)} = 0{,}9442$):

$$BW_3 = 1{,}000 + 1{,}000 \cdot 0{,}9442 + 20{,}000 \cdot 0{,}9442 = 20{,}828{,}20 \text{ EUR}$$

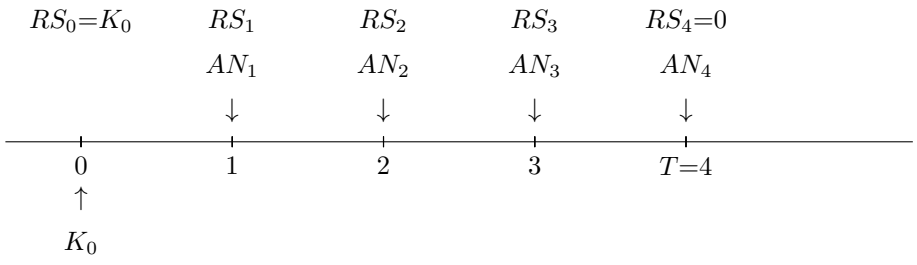
1.2.2. Кредит с равными долями погашения

Равнодолевое погашение рассматривалось в разделе **??**. Здесь акцент делается на приведённой стоимости и ценовой функции. Долг K_0, m процентных периодов, постоянная доля погашения:

$$TB = \frac{K_0}{m}, \quad RS_t = K_0 \cdot \left(1 - \frac{t}{m}\right), \quad Z_t = RS_{t-1} \cdot i_{nom}, \quad AN_t = TB + Z_t$$

Пример: Долг 80 000 EUR, 4 года, $i_{nom} = 5\%$. $TB = 20{,}000$ EUR.

j	RS_j	TB	Z_j	AN_j
0	80,000			
1	60,000	20,000	4,000	24,000
2	40,000	20,000	3,000	23,000
3	20,000	20,000	2,000	22,000
4	0	20,000	1,000	21,000



$$\begin{aligned} BW_0(AN_1) &= 24{,}000 \cdot 0{,}9714 = 23{,}313{,}60 \\ BW_0(AN_2) &= 23{,}000 \cdot 0{,}9262 = 21{,}302{,}60 \\ BW_0(AN_3) &= 22{,}000 \cdot 0{,}8750 = 19{,}250{,}00 \\ BW_0(AN_4) &= 21{,}000 \cdot 0{,}8262 = 17{,}350{,}20 \\ BW_0 &= 81{,}216{,}40 \text{ EUR} \quad P(0) = 1{,}216{,}40 \text{ EUR} \end{aligned}$$

Общие формулы:

$$BW_0 = \sum_{t=1}^{m} AN_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} \tag{1.5}$$

$$P(0) = -K_0 + \sum_{t=1}^{m} AN_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} \tag{1.6}$$

Приведённая стоимость в $t = 3$ ($\hat{q}_{(3\leftarrow 4)} = 0{,}9442$):

$$BW_3 = 22{,}000 + 21{,}000 \cdot 0{,}9442 = 41{,}828{,}20 \text{ EUR}$$

1.2.3. Аннуитетный кредит

Аннуитетный кредит (постоянная аннуитет) подробно рассматривался в разделе **??**. Постоянная аннуитет:

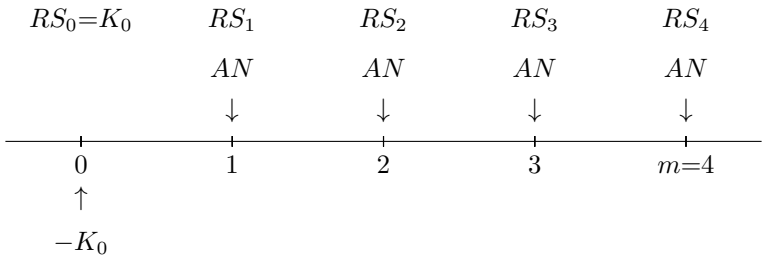
$$AN = K_0 \cdot (1 + i_{nom})^m \cdot \frac{i_{nom}}{(1 + i_{nom})^m - 1}$$

Приведённая стоимость: каждая постоянная аннуитет умножается на соответствующий дисконтирующий множитель, частичные приведённые стоимости суммируются:

$$BW_0 = AN \cdot \sum_{t=1}^{m} \hat{q}_{(0 \leftarrow t)}$$

Пример: Долг 80 000 EUR, 4 года, $i_{nom} = 5\%$:

$$AN = 80{,}000 \cdot 1{,}05^4 \cdot \frac{0{,}05}{1{,}05^4 - 1} = 22{,}560{,}95 \text{ EUR}$$



$$BW_0(AN_1) = 22{,}560{,}95 \cdot 0{,}9714 = 21{,}915{,}71$$
$$BW_0(AN_2) = 22{,}560{,}95 \cdot 0{,}9262 = 20{,}895{,}95$$
$$BW_0(AN_3) = 22{,}560{,}95 \cdot 0{,}8750 = 19{,}740{,}83$$
$$BW_0(AN_4) = 22{,}560{,}95 \cdot 0{,}8262 = 18{,}639{,}86$$
$$BW_0 = 81{,}192{,}35 \text{ EUR} \quad P(0) = 1{,}192{,}35 \text{ EUR}$$

Приведённая стоимость в $t = 3$:

$$BW_3 = AN + AN \cdot \hat{q}_{(3 \leftarrow 4)} = 22{,}560{,}95 + 22{,}560{,}95 \cdot 0{,}9442 = 43{,}863{,}00 \text{ EUR}$$

1.3. Внебиржевые форвардные контракты

В форвардных контрактах два контрагента договариваются отложить исполнение (платёж или поставку) за пределы двух рабочих дней на согласованную будущую дату. Предметом форвардного контракта могут быть:

- платёж в иностранной валюте (обмен двух валют по фиксированному курсу в будущую дату)
- поставка товаров против денежного платежа в будущую дату

Форвардные контракты могут торговаться на бирже (стандартизованные, в форме ценных бумаг) или заключаться внебиржевым способом (OTC). Биржевые форвардные контракты подробно рассматриваются в главе **??**. В данном разделе рассматриваются только внебиржевые форвардные контракты.

1.3.1. Внебиржевые форвардные валютные контракты

Два контрагента договариваются обменять две денежные суммы в разных валютах по фиксированному обменному курсу в указанную будущую дату. Фактический обменный курс на дату обмена обеим сторонам неизвестен. В момент $t = 0$ согласуются два платежа:

$A_t(1)$	выплата суммы в валюте 1 в момент t
$A_t(2)$	получение суммы в валюте 2 в момент t
$t = 0$	дата заключения договора

Анализ денежных потоков ведётся с точки зрения плательщика валюты 1 (отрицательный знак) и получателя валюты 2 (положительный знак). Обменный курс валюты 1 к валюте 2 (wk_t: единиц валюты 1 за единицу валюты 2):

$$wk_t(1,2) = \frac{A_t(1)}{A_t(2)}$$



Необходимы дисконтирующие множители для обоих валютных пространств. Приведённая стоимость в валюте 1:

$$BW_0 = A_t(1) \cdot \hat{q}_{1(0\leftarrow t)} + A_t(2) \cdot wk_0(1,2) \cdot \hat{q}_{2(0\leftarrow t)} \tag{1.7}$$

Ценовая функция (совпадает с BW_0):

$$P_0 = A_t(1) \cdot \hat{q}_{1(0\leftarrow t)} + A_t(2) \cdot wk_0(1,2) \cdot \hat{q}_{2(0\leftarrow t)} \tag{1.8}$$

Пример: В $t = 0$ договорено обменять 1 000 000 EUR на 1 200 000 USD через два года.

Рыночные условия в $t = 0$:

$$wk_0(\text{EUR,USD}) = 0{,}84 \text{ EUR/USD}$$
$$i_{EUR,real}(0 \to 2) = 0{,}0391, \quad \hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)} = 0{,}9262$$
$$i_{USD,real}(0 \to 2) = 0{,}040, \quad \hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)} = 0{,}9246$$



$$BW_0 = -1{,}000{,}000 \cdot 0{,}9262 + 1{,}200{,}000 \cdot 0{,}84 \cdot 0{,}9246$$
$$= -926{,}200 + 931{,}996{,}80 = 5{,}796{,}80 \text{ EUR}$$

Приведённая стоимость составляет 5 796,80 EUR. Сделка представляется слегка выгодной для плательщика EUR. Для нулевой приведённой стоимости (справедливая цена для обеих сторон):

$$0 = -926{,}200 + A_2(2) \cdot 0{,}84 \cdot 0{,}9246$$
$$A_2(2) = 1{,}192{,}536{,}28 \text{ USD}$$

1.3.2. Внебиржевые форвардные товарные контракты

В отличие от валютных форвардов, товары не приносят процентов, поэтому денежный поток состоит из единственного будущего платежа — согласованной цены.

Два контрагента договариваются, что в будущий момент t количество товара M_t поставляется за денежный платёж A_t по согласованной цене p. Спотовая цена p_0 известна при заключении договора; будущая цена p_t обеим сторонам неизвестна.



$$BW_0(A_t) = A_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} \tag{1.9}$$

$$P_0 = A_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} + M_t \cdot p_0 \tag{1.10}$$

Пример: Через 2 года поставляется 5 000 кг товара за 1 000 000 EUR. Спотовая цена $p_0 = 180$ EUR/кг; согласованная цена $p_2 = 200$ EUR/кг; $\hat{q}_{(0\leftarrow 2)} = 0{,}9534$:

$$BW_0(A_2) = -1{,}000{,}000 \cdot 0{,}9534 = -953{,}400$$
$$P_0 = -953{,}400 + 5{,}000 \cdot 180 = -53{,}400 \text{ EUR}$$

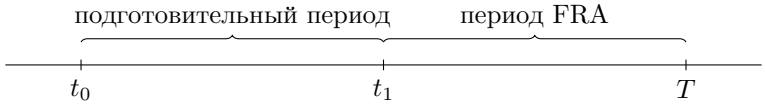
При неизменной спотовой цене сделка представляется невыгодной для покупателя товара.

1.4. Соглашения о будущей процентной ставке (FRA)

Соглашение о будущей процентной ставке (FRA) — это специальный форвардный контракт, по которому контрагенты договариваются об обмене процентными платежами за будущий период. Фиксированная ставка — **ставка FRA** — согласовывается до начала процентного периода. Переменная ставка фиксируется в будущую дату на основе референсной ставки. В течение последующего процентного периода FRA заранее согласованный номинальный объём (N) приносит доход как по фиксированной референсной ставке, так и по ставке FRA. В конце периода FRA покупатель уплачивает продавцу номинальный объём с процентами, а продавец, в свою очередь, уплачивает покупателю номинальный объём с процентами. Поскольку обе стороны обменивают одинаковый номинальный объём и проценты, фактический обмен сводится к разнице процентных ставок. Это даёт покупателю (как правило, компании) возможность зафиксировать процентные расходы (например, по кредиту) независимо от рыночной ставки.

FRA — это производные финансовые инструменты. Производные инструменты привязаны к базовому активу, из которого выводятся платежи. В FRA базовым активом является номинальный объём, из которого исчисляются проценты и, в конечном счёте, расчётный платёж.

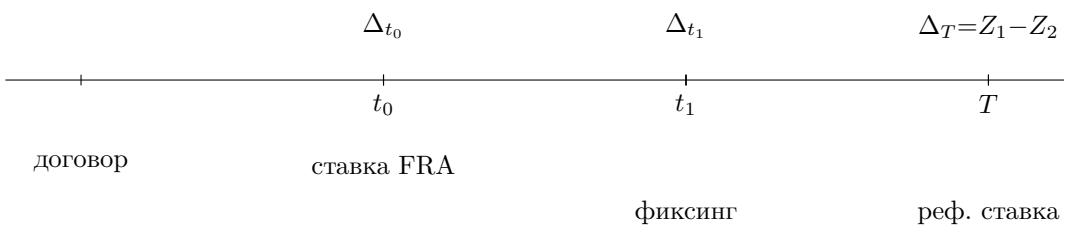
Определяются два временны́х промежутка (и три момента времени):



Два периода определяют также название FRA, выраженное в месяцах. FRA с подготовительным периодом $t_1 - t_0$ месяцев и периодом FRA $T - t_1$ месяцев обозначается t_1-t_0/T. Пример: подготовительный период 3 месяца, период FRA 6 месяцев: обозначение 3/9.

В t_0: согласовываются ставка FRA $i_{FRA}(t_1 \to T)$ и номинальный объём N. В t_1: фиксируется референсная ставка $i_{REF}(t_1 \to T)$. В T: рассчитываются суммы процентов и расчётный платёж Δ_T. Расчёт, как правило, производится в t_1 (дисконтирование с T до t_1 с помощью $\frac{1}{1+i_{REF}(t_1\to T)\cdot\frac{T-t_1}{360}}$):

- Если $i_{REF}(t_1 \to T) > i_{FRA}(t_1 \to T)$: разницу компенсирует продавец FRA (банк).
- Если $i_{FRA}(t_1 \to T) > i_{REF}(t_1 \to T)$: разницу компенсирует покупатель FRA.



t_0	дата заключения договора
t_1	день фиксинга; начало периода FRA
T	дата расчёта; конец периода FRA
(t_0, t_1)	подготовительный период
(t_1, T)	период FRA
Z_1	проценты по ставке FRA
Z_2	проценты по переменной ставке (зафиксированная референсная ставка)
Δ_T	расчётный платёж в T
Δ_{t_1}	расчётный платёж в t_1 (дисконтированный из T)
Δ_{t_0}	расчётный платёж в t_0 (дисконтированный из t_1)

Между днём фиксинга и началом периода FRA обычно проходят два рабочих дня; это здесь не учитывается.

При простых процентах и конвенции подсчёта дней 30/360 (референсная и FRA ставки — годовые):

$$Z_1 = N \cdot i_{FRA}(t_1 \to T) \cdot \frac{T - t_1}{360} \tag{1.11}$$

$$Z_2 = N \cdot i_{REF}(t_1 \to T) \cdot \frac{T - t_1}{360} \tag{1.12}$$

$$\Delta_T = Z_1 - Z_2 \tag{1.13}$$

$$\Delta_{t_1} = \Delta_T \cdot \frac{1}{1 + i_{REF}(t_1 \to T) \cdot \frac{T-t_1}{360}} \tag{1.14}$$

Пример: Компания покупает FRA 3/9 в $t_0 = 0$ (подготовительный период 3 месяца, период FRA 6 месяцев; референсная ставка: EURIBOR). Справедливая ставка FRA выводится из структуры ставок EURIBOR:

$$i_{EURIBOR}(0 \to 3) = 0{,}02, \quad i_{EURIBOR}(0 \to 9) = 0{,}03$$

Вывод справедливой ставки FRA (как в разделе **??**):

$$\begin{aligned} \left(1 + 0{,}03 \cdot \tfrac{270}{360}\right) &= \left(1 + 0{,}02 \cdot \tfrac{90}{360}\right) \cdot \left(1 + i_{FRA}(3 \to 9) \cdot \tfrac{180}{360}\right) \\ 1{,}0225 &= 1{,}005 \cdot (1 + i_{FRA} \cdot 0{,}5) \\ i_{FRA}(3 \to 9) &= 0{,}0348 = 3{,}48\% \end{aligned}$$

Через 3 месяца фиксируется 6-месячный EURIBOR: $i_{EURIBOR}(3 \to 9) = 3{,}25\%$.

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1{,}000{,}000 \cdot 0{,}0348 \cdot 0{,}5 = 17{,}400 \\ Z_2 &= 1{,}000{,}000 \cdot 0{,}0325 \cdot 0{,}5 = 16{,}250 \\ \Delta_9 &= 17{,}400 - 16{,}250 = 1{,}150 \\ \Delta_3 &= 1{,}150 \cdot \frac{1}{1 + 0{,}0325 \cdot 0{,}5} = 1{,}131{,}61 \text{ EUR} \end{aligned}$$

Разница процентных ставок на конец срока Δ_9 составляет 1 150 EUR. Дисконтированный к t_1, расчётный платёж равен 1 131,61 EUR, выплачиваемый покупателем в начале периода FRA.

Приведённая стоимость BW_{t_0} расчётного платежа на дату договора равна нулю при справедливой ставке FRA. При другой ставке FRA (например, $i_{FRA} = 3\%$):

$$Z_1 = 15{,}000,\ Z_2 = 17{,}400,\ \Delta_9 = -2{,}400,\ \Delta_3 = -2{,}358{,}95,\ BW_{t_0} = -2{,}347{,}21 \text{ EUR}$$

Хотя номинальный объём фактически не выплачивается, для расчёта приведённой стоимости FRA можно использовать фиктивные платежи. С точки зрения покупателя: фиктивный платёж N в t_1; получение $N + N \cdot i_{FRA}(t_1 \to T)$ в T. Дисконтирование трёх составляющих к t_0:

1. $N \cdot \frac{1}{1+i_{EURIBOR}(t_0 \to t_1) \cdot \frac{t_1 - t_0}{360}}$
2. $-N \cdot \frac{1}{1+i_{EURIBOR}(t_0 \to T) \cdot \frac{T - t_0}{360}}$
3. $-N \cdot i_{FRA}(t_1 \to T) \cdot \frac{T-t_1}{360} \cdot \frac{1}{1+i_{EURIBOR}(t_0 \to T) \cdot \frac{T - t_0}{360}}$

Для примера ($i_{FRA} = 3{,}48\%$):

$$
\begin{aligned}
1{,}000{,}000 \cdot \frac{1}{1 + 0{,}02 \cdot \frac{90}{360}} &= 995{,}025 \\
- 1{,}000{,}000 \cdot \frac{1}{1 + 0{,}03 \cdot \frac{270}{360}} &= -977{,}995 \\
- 17{,}400 \cdot \frac{1}{1 + 0{,}03 \cdot \frac{270}{360}} &= -17{,}027{,}61
\end{aligned}
$$

$$
BW_{t_0} = 995{,}025 - 977{,}995 - 17{,}027{,}61 = 2{,}39 \approx 0
$$

Как и ожидается, при справедливой ставке FRA приведённая стоимость приблизительно равна нулю. Ценовая функция:

$$
\begin{aligned}
PW_{t_0} = N \cdot & \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(t_0 \to t_1) \cdot \frac{t_1 - t_0}{360}} \\
& - N \cdot (1 + i_{FRA}(t_1 \to T) \cdot \tfrac{T-t_1}{360}) \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(t_0 \to T) \cdot \frac{T - t_0}{360}}
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Литература

[Böh21] Böhme, Wolfgang: *Finanzmathematik*. Skript, März 2021.

[Wie18] Wiedemann, Arnd: *Financial Engineering*. efiport GmbH, 2018.