Финансовая математика Часть 2-1

Д-р Вольфганг Бёме

Март 2021

Оглавление

1 Оценка денежных потоков на основе безрисковых процентных ставок 2
1.1 Кривые доходности . . . 3
1.2 Кривая доходности бескупонных облигаций . . . 3
1.2.1 Бескупонные облигации . . . 3
1.2.2 Получение кривой доходности из бескупонных облигаций . . . 4
1.2.3 Получение кривой доходности из купонных облигаций . . . 7
1.3 Кривая доходности к погашению . . . 9
1.4 Кривые доходности для коротких сроков . . . 9
1.5 Оценка на основе бескупонных ставок . . . 10
1.5.1 Расчёт приведённой стоимости для простых процессов накопления капитала . 10
1.5.2 Приведённая стоимость денежных потоков — целочисленные моменты времени 10
1.5.3 Приведённая стоимость денежных потоков — дробные моменты времени . . . 11
1.5.4 Расчёт будущих бескупонных ставок и дисконтирующих множителей . . . 11
1.5.5 Расчёт дробных будущих бескупонных ставок и дисконтирующих множителей 12

Глава 1

Оценка денежных потоков на основе безрисковых процентных ставок

До сих пор денежные потоки финансового продукта — например, обычной ренты — оценивались с использованием процентной ставки, заложенной в самом продукте. Если взносы в обычной ренте приносят доход по ставке $i\%$, то та же ставка применяется и для оценки финансового продукта. Оценка означает определение стоимости или цены финансового продукта. Рассматривавшиеся ранее финансовые продукты не торговались, а потому не покупались и не продавались. Приведённая стоимость обычной ренты в момент t показывает единовременный платёж, которым можно заменить оставшиеся платежи ренты. Этот единовременный платёж генерирует в процессе накопления капитала ту же сумму, что и оставшиеся платежи ренты. Как рента, так и единовременная выплата приносят доход по одной и той же ставке i. Приведённая стоимость BW_t в момент t определяется с использованием дисконтирующих множителей $\frac{1}{q^{T-t}}$; этот процесс называется **дисконтированием**. Отправной точкой для дисконтирования обычной ренты является будущая стоимость оставшихся платежей ренты K_{T-t} на конец срока T:

$$BW_t = K_{T-t} \cdot \frac{1}{q^{T-t}} = K_{T-t} \cdot \frac{1}{(1+i)^{T-t}}$$

Процентная ставка i, используемая при конструировании финансового продукта, будет далее называться **номинальной процентной ставкой** в отличие от **рыночной процентной ставки** (называемой также **реальной процентной ставкой**). Реальная процентная ставка отражает преобладающие рыночные процентные условия в фиксированный момент времени. Для различения двух ставок номинальная ставка обозначается i_{nom}, реальная — i_{real}. **Реальная процентная ставка** должна удовлетворять ряду требований, необходимых для рыночно-последовательной оценки финансовых продуктов:

1. Ставка должна быть безрисковой, то есть не содержать надбавок за повышенный риск невозврата.
2. Ставка относится к конкретному моменту времени. В другой момент времени ставка, как правило, будет иной.
3. Ставка должна быть валютно-специфической. Финансовый продукт из еврозоны оценивается иначе, чем продукт из долларовой зоны.
4. Ставка должна — при необходимости — отражать специфику финансового продукта (например, денежно-рыночные ставки для соответствующего финансового продукта).
5. Ставка должна зависеть от срока, то есть отражать продолжительность будущего платежа (будущего денежного потока). Если, например, будущий платёж приходится через 3 года, следует выбрать рыночную ставку, соответствующую этому сроку (трёхлетнюю ставку).

Для оценки денежных потоков и финансовых продуктов используются так называемые кривые доходности, или структуры процентных ставок по срокам. Они рассматриваются в следующем разделе.

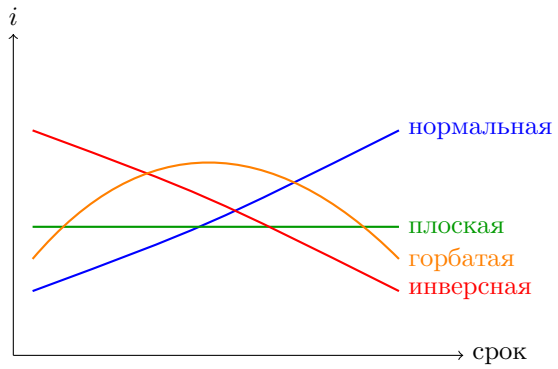
1.1. Кривые доходности

Кривая доходности, или **временна́я структура процентных ставок**, — это графическое представление срочно-зависимых процентных ставок в хронологической последовательности. Срочно-зависимые ставки относятся к конкретным финансовым продуктам или их группам. Кроме того, необходимо учитывать валютную зону. Конкретные кривые доходности здесь не рассматриваются.

Независимо от конкретной кривой доходности можно выделить ряд особых типов в зависимости от того, как процентные ставки меняются со сроком. В литературе различают следующие типы. Это идеальные типы, которые на практике могут встречаться в изменённом виде:

- **Нормальная кривая доходности.** С ростом срока процентные ставки повышаются: $i_{t_1} < i_{t_2}$ при $t_1 < t_2$
- **Плоская кривая доходности.** Процентные ставки постоянны для всех сроков: $i_t = \text{const}\ \forall t$
- **Инверсная кривая доходности.** С ростом срока процентные ставки снижаются: $i_{t_1} > i_{t_2}$ при $t_1 < t_2$
- **Нерегулярная кривая доходности.** Нерегулярное изменение процентных ставок в зависимости от срока. Один из вариантов — «горбатая кривая доходности»: сначала ставки растут, затем снижаются.

Следующая диаграмма показывает типы на примере:



Для оценки финансовых продуктов, представленных в главах 2 и 3, используется так называемая **кривая доходности бескупонных облигаций**. Она подробно рассматривается в разделе section 1.2.

1.2. Кривая доходности бескупонных облигаций

Для оценки финансовых продуктов и денежных потоков необходимы дисконтирующие множители, основанные на безрисковых рыночных ставках. Для этой цели широко используются так называемые **кривые доходности бескупонных облигаций** (zero-coupon yield curves), получаемые из процентных ставок бескупонных облигаций. Эти бескупонные ставки удовлетворяют требованиям, изложенным выше. Бескупонная ставка соответствует структуре бескупонной облигации. Бескупонные ставки применяются, когда срок финансового продукта превышает один год. При более коротких сроках используются иные кривые доходности.

1.2.1. Бескупонные облигации

Бескупонная облигация — это долговая ценная бумага, по которой номинальная стоимость вместе с накопленными процентами выплачивается в конце срока. Номинальная стоимость облигации — это денежная сумма, лежащая в основе процесса накопления капитала. Если стоимость (цена) ценной бумаги при выпуске равна номинальной стоимости, говорят, что облигация размещается

по номиналу, то есть цена облигации равна 100%. Стоимость купонной облигации равна приведённой стоимости бескупонной облигации. Вместе с тем вполне возможно и обычно принято, что цена размещения отличается от номинальной стоимости. Процентная ставка, закреплённая в облигации — то есть ставка, используемая для расчёта накопленных процентов в конце срока, — называется **номинальной процентной ставкой**. Ставка, применяемая для оценки, является **реальной процентной ставкой**. Как отмечалось выше, кривая доходности бескупонных облигаций используется для определения реальной процентной ставки. Важно чётко различать номинальную процентную ставку бескупонной облигации и бескупонную ставку, получаемую из кривой доходности бескупонных облигаций. Последняя может быть построена с использованием бескупонных облигаций (см. раздел subsection 1.2.2); существуют и другие методы определения бескупонных ставок (см. раздел subsection 1.2.3).

Оставив в стороне оценку бескупонных облигаций, сначала поясним природу бескупонной облигации. Как уже упоминалось, номинальная стоимость (N) вместе с накопленными процентами выплачивается в конце срока. В отличие от обычных облигаций, в течение срока купонные выплаты не производятся. Купонные выплаты — это выплаты процентов, как правило периодические и в равных размерах, в течение срока. Поскольку купонные выплаты отсутствуют, такие облигации называются **бескупонными облигациями**. Денежный поток бескупонной облигации может быть представлен графически:



Обозначения:

t_0	дата выпуска или дата приобретения бескупонной облигации
T	дата погашения
N	номинальная стоимость
Z_T	процентный платёж
P_{t_0}	цена

Покупатель приобретает в момент t_0 (который может совпадать с датой выпуска) бескупонную облигацию по цене P_{t_0} с номинальной стоимостью N, тем самым приобретая право на получение номинальной стоимости вместе с накопленными процентами в дату погашения T. Проценты рассчитываются по номинальной ставке i_{nom}:

$$Z_T = N \cdot [(1 + i_{nom})^T - 1]$$

1.2.2. Получение кривой доходности из бескупонных облигаций

До сих пор оставался открытым вопрос о том, как можно определить реальную процентную ставку. Один из подходов — хотя и не всегда практически осуществимый — состоит в использовании бескупонных облигаций, имеющихся на рынке. Реальная сложность связана не с методологией расчёта, а с тем, что на рынке зачастую недостаточно бескупонных облигаций. По этой причине для определения бескупонных ставок используются также купонные облигации, как описывается в разделе subsection 1.2.3.

Необходимо соблюдать требования к реальной процентной ставке, изложенные в разделе chapter 1. Особо важным является требование безрисковости. Поэтому используются исключительно высоконадёжные государственные ценные бумаги с наивысшим рейтингом (AAA).

Предполагается, что на рынке имеется достаточное количество бескупонных облигаций для построения кривой доходности. На практике кривые доходности, как правило, задаются для сроков от 1 до 10 лет с годовым шагом. Для ограничения вычислительных затрат здесь кривая доходности ограничена 4 годами.

Предположим, что на рынке наблюдаются бескупонные облигации с оставшимися сроками 1, 2, 3 и 4 года. Характеристики каждой используемой бескупонной облигации сведены в следующую таблицу:

Бескупонная облигация	Номинал	Номин. ставка	Оставшийся срок	Цена
A	100,000	0,050	1 год	102,0%
B	200,000	0,052	2 года	102,5%
C	500,000	0,048	3 года	101,0%
D	300,000	0,050	4 года	100,5%

Начнём с **бескупонной облигации A**:

В дату погашения выплачивается:

$$N_A + Z_A = N_A \cdot (1 + i_{nom,A}) = 100{,}000 \cdot 1{,}05 = 105{,}000$$

Дисконтированная стоимость (приведённая стоимость) в момент t_0 — обозначим $BW_{A,0}$ — с неизвестной реальной ставкой для оставшегося срока 1 год ($i_{real,RLZ=1}$):

$$BW_{A,0} = (N_A + Z_A) \cdot \frac{1}{1 + i_{real,RLZ=1}} = 105{,}000 \cdot \frac{1}{1 + i_{real,RLZ=1}}$$

Приведённая стоимость бескупонной облигации A в момент $t = 0$ должна равняться цене облигации в тот же момент. Для этого используется котировка облигации C_t — отношение цены P_t к номинальной стоимости N в момент t:

$$C_t = \frac{P_t}{N}$$

Поскольку цена облигации P_{t_0} равна приведённой стоимости BW_0, для облигации A с котировкой $C_{A,0}$ и номиналом N_A:

$$BW_{A,0} = N_A \cdot C_{A,0} = 100{,}000 \cdot 1{,}02 = 102{,}000$$

Накопленная сумма $N_A \cdot (1 + i_{nom,A})$ на конец оставшегося срока ($t = 1$), дисконтированная к $t = 0$ по искомой реальной ставке $i_{real,RLZ=1}$, должна быть равна $BW_{A,0} = N_A \cdot C_{A,0}$, откуда находится реальная ставка:

$$\begin{aligned}(N_A + Z_A) \cdot \frac{1}{1 + i_{real,RLZ=1}} &= N_A \cdot C_{A,0} \\ 1 + i_{real,RLZ=1} &= \frac{105{,}000}{102{,}000} = 1{,}0294 \\ i_{real,RLZ=1} &= 0{,}0294\end{aligned}$$

Реальная ставка при оставшемся сроке один год $i_{real,RLZ=1}$ составляет 0,0294, то есть 2,94%.

Бескупонная облигация B:

В дату погашения:

$$N_B + Z_B = N_B \cdot (1 + i_{nom,B})^2 = 200{,}000 \cdot 1{,}052^2 = 221{,}340{,}80$$

Приведённая стоимость $BW_{B,0}$:

$$\begin{aligned}BW_{B,0} &= (N_B + Z_B) \cdot \frac{1}{(1 + i_{real,RLZ=2})^2} \\ BW_{B,0} &= N_B \cdot C_{B,0} = 200{,}000 \cdot 1{,}025 = 205{,}000\end{aligned}$$

Реальная ставка $i_{real,RLZ=2}$:

$$\begin{aligned}(1 + i_{real,RLZ=2})^2 &= \frac{221{,}340{,}80}{205{,}000} = 1{,}0797 \\ i_{real,RLZ=2} &= \sqrt{1{,}0797} - 1 = 0{,}0391\end{aligned}$$

Реальная ставка при оставшемся сроке два года $i_{real,RLZ=2}$ составляет 3,91%.

Бескупонная облигация C:

В дату погашения:

$$N_C + Z_C = N_C \cdot (1 + i_{nom,C})^3 = 500{,}000 \cdot 1{,}049^3 = 577{,}160{,}32$$

Приведённая стоимость $BW_{C,0}$:

$$BW_{C,0} = N_C \cdot C_{C,0} = 500{,}000 \cdot 1{,}01 = 505{,}000$$

Реальная ставка $i_{real,RLZ=3}$:

$$(1 + i_{real,RLZ=3})^3 = \frac{577{,}160{,}32}{505{,}000} = 1{,}1429$$
$$i_{real,RLZ=3} = \sqrt[3]{1{,}1429} - 1 = 0{,}0455$$

Реальная ставка при оставшемся сроке три года составляет 4,55%.

Бескупонная облигация D:

В дату погашения:

$$N_D + Z_D = N_D \cdot (1 + i_{nom,D})^4 = 300{,}000 \cdot 1{,}05^4 = 364{,}651{,}87$$

Приведённая стоимость $BW_{D,0}$:

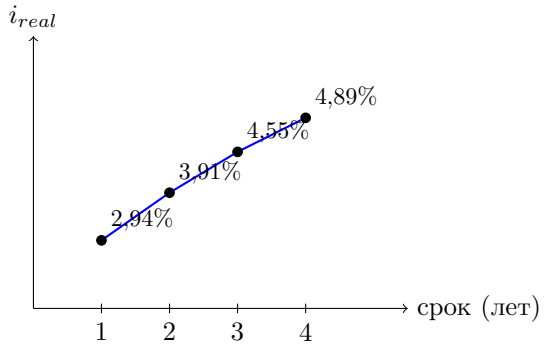
$$BW_{D,0} = N_D \cdot C_{D,0} = 300{,}000 \cdot 1{,}005 = 301{,}500$$

Реальная ставка $i_{real,RLZ=4}$:

$$(1 + i_{real,RLZ=4})^4 = \frac{364{,}651{,}87}{301{,}500} = 1{,}2095$$
$$i_{real,RLZ=4} = \sqrt[4]{1{,}2095} - 1 = 0{,}0489$$

Реальная ставка при оставшемся сроке четыре года составляет 4,89%.

Реальные ставки, полученные из бескупонных облигаций, называются **бескупонными ставками**. Кривая доходности бескупонных облигаций, состоящая из бескупонных ставок, принимает следующий вид:



Номинальные и реальные ставки различаются. Следующая таблица сравнивает оба вида ставок:

Оставшийся срок	Номинальная ставка	Реальная ставка
1 год	0,050	0,0294
2 года	0,052	0,0391
3 года	0,048	0,0455
4 года	0,050	0,0489

В общем случае процедура расчёта бескупонных ставок описывается следующим образом. Для бескупонных облигаций с оставшимся сроком RLZ лет применяется следующая расчётная схема. Ключевым элементом является использование котировки облигации C:

$$\begin{aligned} BW_0 &= (N + Z_{RLZ}) \cdot \frac{1}{(1 + i_{real,RLZ})^{RLZ}} \\ BW_0 &= N \cdot C_0 \\ (1 + i_{real,RLZ})^{RLZ} &= \frac{BW_0}{N \cdot C_0} \\ i_{real,RLZ} &= \sqrt[RLZ]{\frac{BW_0}{N \cdot C_0}} - 1 \end{aligned}$$

1.2.3. Получение кривой доходности из купонных облигаций

Если на рынке нельзя найти достаточного количества практически безрисковых бескупонных облигаций, для расчёта бескупонных ставок можно использовать также купонные облигации. Купонные облигации также имеют фиксированную номинальную ставку (i_{nom}). Однако процентные платежи Z производятся не единовременно в конце срока, а периодически — как правило, в конце каждого процентного периода. В конце срока вместе с последним процентным платежом выплачивается номинальная стоимость N. Процентные платежи купонной облигации показаны на следующем рисунке:



Процентные платежи постоянны и рассчитываются по номинальной стоимости N и номинальной (купонной) ставке i_{nom}:

$$Z = N \cdot i_{nom}$$

Параметры купонных облигаций заданы следующим образом:

Купонная облигация	Номинал	Номин. ставка	Оставшийся срок	Цена
A	100,000	0,050	1 год	102,00%
B	200,000	0,052	2 года	102,48%
C	500,000	0,048	3 года	100,80%
D	300,000	0,050	4 года	100,60%

Купонная облигация A — оставшийся срок 1 год:

Поскольку оставшийся срок купонной облигации A равен 1 году, реальная ставка (бескупонная ставка) выводится из параметров облигации и её котировки так же, как для бескупонных облигаций:

$$\begin{aligned} BW_0 &= (N_A + Z) \cdot \frac{1}{1 + i_{real,RLZ=1}} = 105{,}000 \cdot \frac{1}{1 + i_{real,RLZ=1}} \\ BW_0 &= N_A \cdot C_{A,0} = 100{,}000 \cdot 1{,}02 = 102{,}000 \\ i_{real,RLZ=1} &= 0{,}0294 \end{aligned}$$

Купонная облигация A является бескупонной в силу своего одногодичного оставшегося срока.

Купонная облигация B — оставшийся срок 2 года:

Теперь можно считать известной реальную ставку для оставшегося срока один год ($i_{real,RLZ=1} = 0{,}0294$). Необходимо учесть два платёжных момента:

1. Процентный платёж в $t = 1$: $Z = N_B \cdot i_{nom,B} = 200{,}000 \cdot 0{,}052 = 10{,}400$
2. Процентный платёж в $t = 2$: $Z = 10{,}400$, плюс возврат номинала 200,000; итого $N_B + Z = 210{,}400$

$$BW_0 = Z \cdot \frac{1}{1 + i_{real,RLZ=1}} + (N_B + Z) \cdot \frac{1}{(1 + i_{real,RLZ=2})^2} \tag{1.1}$$

$$BW_0 = N_B \cdot C_{B,0} = 200{,}000 \cdot 1{,}0248 = 204{,}966{,}71 \tag{1.2}$$

Из уравнений (1.1) и (1.2):

$$\begin{aligned} 204{,}966{,}71 &= 10{,}102{,}97 + 210{,}400 \cdot \frac{1}{(1 + i_{real,RLZ=2})^2} \\ i_{real,RLZ=2} &= \sqrt{1{,}0795} - 1 = 0{,}0391 \end{aligned}$$

Использование уже выведенной однолетней бескупонной ставки для расчёта двухлетней бескупонной ставки называется **методом бутстрэппинга**. Этот метод применяется рекурсивно:

$$\begin{aligned} i_{real,RLZ=1} &= \text{выведена из бескупонных облигаций} \\ i_{real,RLZ=2} &= F(i_{real,RLZ=1}) \\ i_{real,RLZ=n} &= F(i_{real,RLZ=1}, \ldots, i_{real,RLZ=n-1}) \end{aligned}$$

Купонная облигация C — оставшийся срок 3 года:

$$\begin{aligned} Z &= 500{,}000 \cdot 0{,}048 = 24{,}000 \\ 504{,}000 &= 45{,}542{,}35 + 524{,}000 \cdot \frac{1}{(1 + i_{real,RLZ=3})^3} \\ i_{real,RLZ=3} &= 0{,}0455 \end{aligned}$$

Купонная облигация D — оставшийся срок 4 года:

$$\begin{aligned} Z &= 300{,}000 \cdot 0{,}05 = 15{,}000 \\ 301{,}800 &= 41{,}589{,}58 + 315{,}000 \cdot \frac{1}{(1 + i_{real,RLZ=4})^4} \\ i_{real,RLZ=4} &= 0{,}0489 \end{aligned}$$

Номинальные, бескупонные ставки и доходности к погашению различаются:

Оставшийся срок	Номин. ставка	Бескупонная ставка	Доходность
1 год	0,050	0,0294	0,0294
2 года	0,052	0,0391	0,0384
3 года	0,048	0,0455	0,0450
4 года	0,050	0,0489	0,0483

Немецкий федеральный банк (Deutsche Bundesbank) ежедневно публикует кривые доходности бескупонных облигаций для оставшихся сроков от 1 до 20 лет.

1.3. Кривая доходности к погашению

Альтернативной — но лишь ограниченно применимой для оценки финансовых продуктов — концепцией является построение **кривых доходности к погашению**. Срочно-зависимые ставки также определяются здесь, но в упрощённой форме.

На примере купонной облигации C: три платежа требуют дисконтирования. При использовании реальных ставок на основе бескупонных облигаций:

$$BW_0 = 24{,}000 \cdot \frac{1}{1{,}0294} + 24{,}000 \cdot \frac{1}{1{,}0391^2} + 524{,}000 \cdot \frac{1}{1{,}0455^3} = 504{,}063{,}30$$

При кривой доходности к погашению вместо этого применяется **единая ставка** для всех платежей. Ищется единая ставка $i_{rend,C}$ такая, что:

$$504{,}000 = 24{,}000 \cdot \frac{1}{1 + i_{rend,C}} + 24{,}000 \cdot \frac{1}{(1 + i_{rend,C})^2} + 524{,}000 \cdot \frac{1}{(1 + i_{rend,C})^3}$$
$$i_{rend,C} = 0{,}0450 = 4{,}50\%$$

Общая формула:

$$C \cdot N = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{Z}{(1 + i_{rend})^i} + \frac{N + Z}{(1 + i_{rend})^m} \tag{1.3}$$

Доходности к погашению дают лишь приближение для целей дисконтирования. Точный результат достигается только при плоской кривой доходности.

1.4. Кривые доходности для коротких сроков

Наряду с кривыми доходности бескупонных облигаций и кривыми доходности к погашению существуют иные кривые доходности для определённых сроков финансовых продуктов, которые не охватываются кривыми доходности бескупонных облигаций. Последние, как правило, охватывают сроки от 1 до 10 лет. Для финансовых продуктов с короткими сроками необходимо искать альтернативные кривые доходности. Одним из вариантов является использование ставок денежного рынка из межбанковской торговли, например EURIBOR (Euro InterBank Offered Rate) или LIBOR (London Interbank Offered Rate).

В связи с манипуляциями ЕЦБ принял решение ввести альтернативную базовую ставку: краткосрочную ставку евро (*e*STR). Аналогичные проблемы возникли и с LIBOR. Планируется замена EURIBOR и LIBOR другими базовыми ставками: SONIA (Sterling Overnight Index Average) для британского фунта; SOFR (Secured Overnight Financing Rate) для доллара США; SARON (Swiss Average Rate Overnight) для швейцарского франка; TONAR (Tokyo Overnight Average Rate) для японской иены; *e*STR для евро.

Кривая доходности EURIBOR предоставляет ставки для следующих сроков:

- одна неделя
- один месяц
- три месяца
- шесть месяцев
- двенадцать месяцев

1.5. Оценка на основе бескупонных ставок

1.5.1. Расчёт приведённой стоимости для простых процессов накопления капитала

Пусть начальный капитал K_0 приносит доход по номинальной ставке i_{nom} в течение T лет с ежегодным начислением:

$$K_T = K_0 \cdot (1 + i_{nom})^T$$

Дано: $K_0 = 10{,}000$, $i_{nom} = 0{,}05$, $T = 10$, $i_{real,RLZ=10} = 0{,}06$.

$$K_{10} = 10{,}000 \cdot 1{,}05^{10} = 16{,}288{,}95$$

Приведённая стоимость по номинальной ставке $BW_{0,nom}$:

$$BW_{0,nom} = 16{,}288{,}95 \cdot \frac{1}{1{,}05^{10}} = 10{,}000$$

Приведённая стоимость по реальной ставке $BW_{0,real}$:

$$BW_{0,real} = 16{,}288{,}95 \cdot \frac{1}{1{,}06^{10}} = 9{,}095{,}44$$

Приведённая стоимость составляет 9,095,44 EUR. При продаже контракта третьей стороне в момент $t = 0$ справедливая цена равна 9,095,44 EUR, а не номиналу 10,000 EUR.

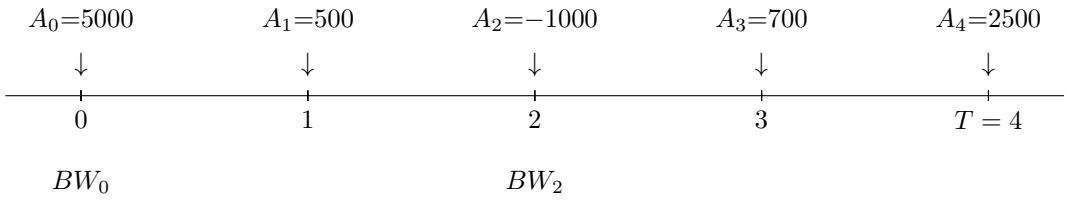
При $t = 6$ (оставшийся срок 4 года, $i_{real,RLZ=4} = 7\%$):

$$BW_{t,real} = 16{,}288{,}95 \cdot \frac{1}{1{,}07^{4}} = 12{,}426{,}46$$

$$BW_{t,nom} = 16{,}288{,}95 \cdot \frac{1}{1{,}05^{4}} = 13{,}400{,}63$$

1.5.2. Приведённая стоимость денежных потоков — целочисленные моменты времени

Пример: денежные потоки за 4 года с годовыми процентными периодами:



Бескупонные ставки и дисконтирующие множители (из раздела subsection 1.2.2):

Оставшийся срок	Реальная ставка	Дисконт. множитель
1 год	0,0294	0,9714
2 года	0,0391	0,9262
3 года	0,0455	0,8750
4 года	0,0489	0,8262

(a) Приведённая стоимость в $t = 0$ (BW_0):

$$\begin{aligned}
BW_0(A_0) &= 5{,}000 \\
BW_0(A_1) &= 500 \cdot 0{,}9714 = 485{,}72 \\
BW_0(A_2) &= -1{,}000 \cdot 0{,}9262 = -926{,}15 \\
BW_0(A_3) &= 700 \cdot 0{,}8750 = 612{,}53 \\
BW_0(A_4) &= 2{,}500 \cdot 0{,}8262 = 2{,}065{,}40 \\
BW_0 &= 7{,}237{,}48 \text{ EUR}
\end{aligned}$$

(б) Приведённая стоимость в $t = 2$ (BW_2):

$$\hat{q}_{(2\leftarrow 3)} = \frac{0{,}8750}{0{,}9262} = 0{,}9447 \qquad \hat{q}_{(2\leftarrow 4)} = \frac{0{,}8262}{0{,}9262} = 0{,}8920$$
$$BW_2 = -1{,}000 + 700 \cdot 0{,}9447 + 2{,}500 \cdot 0{,}8920 = 1{,}891{,}29 \text{ EUR}$$

1.5.3. Приведённая стоимость денежных потоков — дробные моменты времени

Для дробного оставшегося срока $t \in [t_1, t_2]$ применяется линейная интерполяция между двумя соседними ставками:

$$i_{real,RLZ=t} = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \cdot i_{real,RLZ=t_1} + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \cdot i_{real,RLZ=t_2}$$

Пример: $i_{real,RLZ=2{,}25}$, интерполяция между $i_{real,RLZ=2} = 0{,}0391$ и $i_{real,RLZ=3} = 0{,}0455$:

$$i_{real,RLZ=2{,}25} = 0{,}75 \cdot 0{,}0391 + 0{,}25 \cdot 0{,}0455 = 0{,}0407 = 4{,}07\%$$

Дополнительный платёж 800 EUR в $t = 2{,}25$:

$$BW_0(A_{2{,}25}) = 800 \cdot \frac{1}{(1{,}0407)^{2{,}25}} = 731{,}32$$
$$BW_0 = 7{,}237{,}48 + 731{,}32 = 7{,}968{,}80 \text{ EUR}$$

1.5.4. Расчёт будущих бескупонных ставок и дисконтирующих множителей

Обозначения:

$i_{real}(0 \to \theta)$	бескупонная ставка в момент 0 с оставшимся сроком θ
$i_{real}(t \to \theta)$	бескупонная ставка в момент t с оставшимся сроком θ

Ключевое соотношение:

$$\hat{q}_{(t_1\leftarrow t_2)} = \frac{\hat{q}_{(0\leftarrow t_2)}}{\hat{q}_{(0\leftarrow t_1)}} \tag{1.4}$$

Таблица всех текущих и будущих дисконтирующих множителей (4-летний пример):

	1	2	3	4
0	0,9714	0,9262	0,8750	0,8262
1		0,9534	0,9008	0,8505
2			0,9447	0,8920
3				0,9442

Таблица всех будущих бескупонных ставок:

	1	2	3	4
0	0,0294	0,0391	0,0455	0,0489
1		0,0489	0,0536	0,0554
2			0,0585	0,0588
3				0,0591

Приведённые стоимости во все целочисленные моменты времени:

$$BW_1 = 0 - 1{,}000 \cdot 0{,}9534 + 700 \cdot 0{,}9008 + 2{,}500 \cdot 0{,}8505 = 1{,}803{,}41$$
$$BW_3 = 700 + 2{,}500 \cdot 0{,}9442 = 3{,}060{,}50$$
$$BW_4 = 2{,}500$$

1.5.5. Расчёт дробных будущих бескупонных ставок и дисконтирующих множителей

Требуется $BW_{2,25}$. Из раздела subsection 1.5.3: $i_{real}(0 \to 2{,}25) = 0{,}0407$.

$$\hat{q}_{(0\leftarrow 2,25)} = \frac{1}{(1{,}0407)^{2,25}} = 0{,}9142 \quad \text{(приближённо)}$$

$$\hat{q}_{(2,25\leftarrow 3)} = \frac{0{,}8750}{0{,}9140} = 0{,}9573 \qquad \hat{q}_{(2,25\leftarrow 4)} = \frac{0{,}8262}{0{,}9140} = 0{,}9039$$

$$BW_{2,25} = 700 \cdot 0{,}9573 + 2{,}500 \cdot 0{,}9039 = \mathbf{2{,}929{,}96\ EUR}$$

Литература

[Böh21] Böhme, Wolfgang: *Finanzmathematik*. Skript, März 2021.

[Wie18] Wiedemann, Arnd: *Financial Engineering*. efiport GmbH, 2018.

[Hul01] Hull, John C.: *Options, Futures and Other Derivatives*. Pearson, 2001.