Forward Swap VaR калькулятор

Математические основы

Форвардные свопы, исторические временные ряды

Русский

Вольфганг Бёме

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

7 ноября 2026 г.

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Обзор **2**
1.1 Обозначения . . . 2

2 Кривая доходности **2**
2.1 Бескупонные ставки и дисконт-факторы . . . 2
2.2 Интерполяция текущей кривой . . . 3
2.3 Интерполяция исторических кривых . . . 3

3 Оценка форвардного свопа **3**
3.1 График платежей . . . 3
3.2 Форвардные ставки . . . 3
3.3 Денежные потоки и приведённая стоимость . . . 4
3.4 Замкнутая форма . . . 4

4 Чувствительности **4**
4.1 DV01 . . . 4
4.2 Модифицированная дюрация . . . 5
4.3 Выпуклость . . . 5

5 Value at Risk **5**
5.1 Исторические ряды дисконт-факторов . . . 5
5.2 Логарифмические доходности . . . 5
5.3 Ковариационная и корреляционная матрицы . . . 6
5.4 Вектор чувствительностей . . . 6
5.5 Дисперсия портфеля и VaR . . . 6
5.6 Обратная функция нормального распределения . . . 6

6 Допущения и ограничения модели **7**
6.1 Допущения . . . 7
6.2 Сравнение с зафиксированными нетто-потоками . . . 7
6.3 Прочие замечания . . . 7

7 Соответствие формул и кода **8**

1 Обзор

Калькулятор оценивает *форвардный процентный своп* (forward starting interest rate swap) и измеряет его рыночный риск. Рассматривается **своп плательщика фиксированной ставки** (payer swap): владелец платит фиксированную ставку K и получает плавающую. Своп начинается в момент T_0 (forward start) и действует T лет.

Расчёт состоит из пяти шагов (рис. 1):

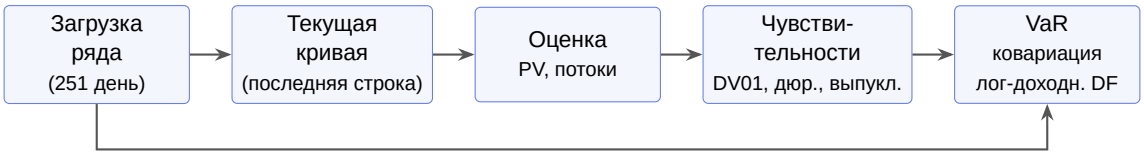


Рис. 1: Последовательность расчёта в калькуляторе

1.1 Обозначения

Символ	Значение	Код
N	номинал в евро	`notional`
K	фиксированная ставка (десятичная, годовая)	`fixedRate`
T_0	начало свопа (forward start) в годах	`forwardStart`
T	срок свопа (тенор) в годах	`tenor`
f	частота платежей в год $(1, 2, 4)$	`frequency`
$\delta = 1/f$	длина процентного периода в годах	`paymentInterval`
n	число платежей	`nPayments`
t_i	даты платежей, $i = 1, \ldots, n$	`paymentDates`
τ_j, r_j	узлы (теноры) и бескупонные ставки кривой	`yieldCurveTenors, yieldCurve`
$r(t)$	интерполированная бескупонная ставка для срока t	`interpolateRate`
$P(t)$	дисконт-фактор для срока t	`discountFactor`
F_i	простая форвардная ставка периода i	`forwardRates`
C_i	нетто-поток периода i	`netCashflows`
α	доверительный уровень	`confidence`
h	горизонт в торговых днях	`horizon`

Все сроки выражаются в долях года; календарь и конвенция подсчёта дней не применяются.

2 Кривая доходности

2.1 Бескупонные ставки и дисконт-факторы

Кривая задана m узлами $(\tau_j, r_j)_{j=1,\ldots,m}$. Ставки трактуются как **непрерывно начисляемые бескупонные ставки** (zero rates). Дисконт-фактор для срока t:

$$P(t) = e^{-r(t)\,t}. \tag{1}$$

Реализация в коде: discountFactor(rate, time)

```
return Math.exp(-rate * time);
```

Временной ряд берётся из CSV-файла или из одного из двух встроенных в калькулятор примеров. *Текущая* кривая — это последняя строка загруженного временного ряда. В файле ставки указаны в процентах; при чтении они делятся на 100.

2.2 Интерполяция текущей кривой

Для оценки $r(t)$ определяется функцией `interpolateRate(t)`:

$$r(t) = \begin{cases} r_1, & t \le \tau_1, \\ r_j + \dfrac{r_{j+1} - r_j}{\tau_{j+1} - \tau_j}\,(t - \tau_j), & \tau_j \le t \le \tau_{j+1}, \\ r_m, & t \ge \tau_m. \end{cases} \tag{2}$$

Это линейная интерполяция бескупонных ставок с плоской экстраполяцией на обоих концах.

2.3 Интерполяция исторических кривых

Для расчёта VaR кривые всех исторических дней вычисляются функцией `interpolateFromData`. На краях она ведёт себя иначе, чем `interpolateRate`:

$$r(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{t}\ln\!\left(1 + \left(e^{-r_1\tau_1} - 1\right)\dfrac{t}{\tau_1}\right), & t < \tau_1 \quad \text{(линейно по дисконт-фактору)}, \\ r_j + \dfrac{r_{j+1} - r_j}{\tau_{j+1} - \tau_j}\,(t - \tau_j), & \tau_j < t < \tau_{j+1}, \\ r_j, & t = \tau_j \text{ (точный узел)}, \\ r_m, & t > \tau_m. \end{cases} \tag{3}$$

При $t < \tau_1$ дисконт-фактор интерполируется линейно между $P(0) = 1$ и $P(\tau_1)$: $P(t) = 1 + (P(\tau_1) - 1)\,t/\tau_1$; из него выводится подразумеваемая бескупонная ставка.

Примечание

Для сроков меньше первого узла τ_1 формулы (2) и (3) различаются: при оценке используется плоская ставка, при измерении риска — линейно интерполированный дисконт-фактор. Это существенно, только если даты платежей лежат до τ_1 (например, $\tau_1 = 1$ год и $T_0 + \delta < 1$).

3 Оценка форвардного свопа

3.1 График платежей

Число платежей и их даты:

$$n = \lfloor T \cdot f \rfloor, \qquad t_i = T_0 + i\,\delta, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Если $T \cdot f$ не целое, неполный остаточный период отбрасывается. Процентный период i длится от t_{i-1} до t_i, где $t_0 := T_0$.

3.2 Форвардные ставки

Простая (линейная) форвардная ставка для периода $[t_{i-1}, t_i]$ следует из условия отсутствия арбитража:

$$F_i = \frac{1}{t_i - t_{i-1}}\left(\frac{P(t_{i-1})}{P(t_i)} - 1\right) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{P(t_{i-1})}{P(t_i)} - 1\right). \tag{5}$$

3.3 Денежные потоки и приведённая стоимость

Денежные потоки периода i

$$\text{Фиксированный поток:} \quad X_i^{\text{fix}} = N K \delta, \tag{6}$$

$$\text{Плавающий поток:} \quad X_i^{\text{float}} = N F_i \delta, \tag{7}$$

$$\text{Нетто-поток (payer):} \quad C_i = X_i^{\text{float}} - X_i^{\text{fix}} = N \delta (F_i - K), \tag{8}$$

$$\text{Приведённая стоимость:} \quad \mathrm{PV}_i = C_i P(t_i), \qquad \mathrm{PV} = \sum_{i=1}^{n} C_i P(t_i). \tag{9}$$

В коде X_i^{fix} вычисляется как `notional * fixedRate / frequency`, а X_i^{float} — как `notional * forwardRate / frequency`; при $\delta = 1/f$ это совпадает с формулами выше.

3.4 Замкнутая форма

Утверждение 1 (Телескопическая сумма плавающей ноги)**.** *Из* (5) *следует* $X_i^{float} P(t_i) = N\big(P(t_{i-1}) - P(t_i)\big)$. *Отсюда*

$$\mathrm{PV} = N\big(P(T_0) - P(t_n)\big) \; - \; N K \delta \sum_{i=1}^{n} P(t_i). \tag{10}$$

Доказательство. $N F_i \delta P(t_i) = N\big(P(t_{i-1})/P(t_i) - 1\big)P(t_i) = N\big(P(t_{i-1}) - P(t_i)\big)$; сумма по i сворачивается в $N\big(P(t_0) - P(t_n)\big)$. □

Формула (10) служит для контроля оценки. Она также показывает, что стоимость зависит от дисконт-факторов в момент T_0, во все даты платежей и (дважды) в последнюю дату t_n.

Замечание (Паритетная ставка свопа). Фиксированная ставка, при которой $\mathrm{PV} = 0$, равна $S = \dfrac{P(T_0) - P(t_n)}{\delta \sum_i P(t_i)}$. Калькулятор её не выводит. При $K > S$ стоимость payer-свопа отрицательна.

4 Чувствительности

Все чувствительности получаются **полной переоценкой** после параллельного сдвига всех бескупонных ставок на $\Delta r = 1$ б. п. $= 0{,}0001$:

$$\mathrm{PV}^{\pm} = \mathrm{PV}\big(r_j \pm \Delta r, \; j = 1, \ldots, m\big).$$

Поскольку форвардные ставки пересчитываются по сдвинутой кривой, $\mathrm{PV}^{\pm}$ отражает как эффект дисконтирования, так и эффект прогнозирования ставок.

4.1 DV01

$$\mathrm{DV01} = -\big(\mathrm{PV}^{+} - \mathrm{PV}\big). \tag{11}$$

Положительный DV01 означает убыток при росте ставок. Стоимость payer-свопа растёт вместе со ставками, поэтому его DV01 обычно *отрицателен*.

4.2 Модифицированная дюрация

Дюрация рассчитывается по отношению к **номиналу** N:

$$D = \frac{\mathrm{DV01} \cdot 10000}{N} \approx -\frac{1}{N}\frac{\partial \mathrm{PV}}{\partial r}, \qquad \text{т. е.} \qquad \Delta\mathrm{PV} \approx -DN\Delta r. \tag{12}$$

При росте всех ставок на один процентный пункт стоимость меняется примерно на $-D$ процентов номинала. Для payer-свопа D отрицательна, так как его стоимость растёт вместе со ставками.

Примечание: отношение к номиналу

У свопов стоимость часто мала по сравнению с процентной чувствительностью (при заключении по рыночным условиям $\mathrm{PV} \approx 0$). Дюрация по отношению к стоимости, $\mathrm{DV01} \cdot 10000/|\mathrm{PV}|$, была бы тогда очень большой и могла бы менять знак. Отношение к номиналу для свопов общепринято и даёт устойчивые значения и при $\mathrm{PV} \approx 0$. Однако оно не сопоставимо напрямую с дюрацией облигации, рассчитанной по стоимости.

4.3 Выпуклость

$$\mathscr{C} = \frac{\mathrm{PV}^{+} + \mathrm{PV}^{-} - 2\,\mathrm{PV}}{N \cdot (\Delta r)^2}. \tag{13}$$

Числитель — центральная конечно-разностная аппроксимация второй производной по параллельному сдвигу. Как и дюрация, $\mathscr{C}$ рассчитывается по отношению к номиналу. Поскольку $N > 0$, знак определяется только числителем. Вместе с (12) получается приближение второго порядка

$$\Delta\mathrm{PV} \approx N\Big(-D\Delta r + \tfrac{1}{2}\mathscr{C}\,(\Delta r)^2\Big).$$

Для payer-свопа $\mathscr{C}$ обычно отрицательна, так как он *платит* фиксированную ногу (короткая позиция в потоке с фиксированной ставкой).

5 Value at Risk

VaR рассчитывается **дисперсионно-ковариационным (дельта-нормальным) методом**. Факторы риска — логарифмы дисконт-факторов на дату начала T_0 и в даты платежей; их ковариационная матрица оценивается по историческому ряду.

5.1 Исторические ряды дисконт-факторов

Ряд охватывает D дней ($D \geq 251$) с кривыми $\big(r_j^{(k)}\big)$, $k = 1, \ldots, D$. Для каждого дня k и каждой даты t_i ($i = 0, \ldots, n$, $t_0 = T_0$) по формуле (3) интерполируется ставка $r^{(k)}(t_i)$ и вычисляется

$$P_i^{(k)} = \exp\big(-r^{(k)}(t_i)\,t_i\big). \tag{14}$$

Даты платежей t_i одинаковы для всех дней (постоянные сроки).

5.2 Логарифмические доходности

Факторы риска: $X_i = \ln P(t_i)$. Их дневные изменения:

$$x_i^{(k)} = \ln \frac{P_i^{(k)}}{P_i^{(k-1)}} = -\big(r^{(k)}(t_i) - r^{(k-1)}(t_i)\big)\,t_i, \qquad k = 2, \ldots, D. \tag{15}$$

Получается $M = D - 1$ наблюдений (при 251 дне — 250). Из (15) видно: лог-доходность дисконт-фактора равна изменению бескупонной ставки с обратным знаком, умноженному на срок.

5.3 Ковариационная и корреляционная матрицы

С выборочными средними $\bar{x}_i = \frac{1}{M}\sum_k x_i^{(k)}$:

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{M-1}\sum_{k=2}^{D}\left(x_i^{(k)} - \bar{x}_i\right)\left(x_j^{(k)} - \bar{x}_j\right), \tag{16}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\Sigma_{ii}}, \qquad \rho_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sigma_i\,\sigma_j}. \tag{17}$$

Дополнительно выводятся два сводных показателя:

$$\text{Средняя волатильность:}\quad \bar{\sigma} = \sqrt{\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\Sigma_{ii}}\quad\text{(корень из средней дисперсии)}, \tag{18}$$

$$\text{Средняя корреляция:}\quad \bar{\rho} = \tfrac{1}{n-1}\textstyle\sum_{i=1}^{n-1}\rho_{i,i+1}\quad\text{(только соседние даты)}. \tag{19}$$

Оба показателя рассчитываются только по датам платежей $t_1,\dots,t_n$, носят информационный характер и в VaR не входят. При одном платеже ($n=1$) $\bar{\rho}$ не определена (выводится `NaN`).

5.4 Вектор чувствительностей

Плавающие потоки сами зависят от дисконт-факторов (формула (5)). Согласно утверждению 1 стоимость в факторах риска $X_i = \ln P(t_i)$, $t_0 := T_0$, равна

$$\mathrm{PV} = N\,e^{X_0} - N\,e^{X_n} - NK\delta\sum_{i=1}^{n} e^{X_i}. \tag{20}$$

Отсюда полные чувствительности $w_i := \partial\mathrm{PV}/\partial X_i$:

$$w_0 = N\,P(T_0), \qquad w_i = -NK\delta\,P(t_i)\ \ (1 \le i < n), \qquad w_n = -N\,P(t_n)\,(1+K\delta), \tag{21}$$

причём $\sum_{i=0}^{n} w_i = \mathrm{PV}$. Таким образом, VaR учитывает и фиксированную, и плавающую ногу свопа. При $T_0 = 0$ величина $P(T_0) = 1$ фактором риска не является; остаются $w_1,\dots,w_n$.

5.5 Дисперсия портфеля и VaR

В линейном приближении $\Delta\mathrm{PV} \approx \sum_i w_i\,\Delta X_i$. При предположении о нормальном распределении логдоходностей с нулевым средним:

$$\sigma_{\mathrm{PV}}^2 = w^{\top}\Sigma\,w = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} w_i\,\Sigma_{ij}\,w_j, \tag{22}$$

$$\mathrm{VaR}_{\alpha,h} = z_\alpha\;\sigma_{\mathrm{PV}}\;\sqrt{h}. \tag{23}$$

Здесь $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ — квантиль уровня α стандартного нормального распределения, h — горизонт в днях (масштабирование по правилу квадратного корня). Выводится $|\mathrm{VaR}_{\alpha,h}|$.

Доверительный уровень α	95 %	99 %	99,9 %
z_α	1,644854	2,326348	3,090232

5.6 Обратная функция нормального распределения

Φ^{-1} вычисляется рациональной аппроксимацией П. Дж. Акклэма (P. J. Acklam; функция `normalInv`). Для $p \in [0{,}02425;\,0{,}97575]$ при $q = p - 0{,}5$ и $s = q^2$:

$$\Phi^{-1}(p) \approx q\,\frac{a_1 s^5 + a_2 s^4 + a_3 s^3 + a_4 s^2 + a_5 s + a_6}{b_1 s^5 + b_2 s^4 + b_3 s^3 + b_4 s^2 + b_5 s + 1},$$

в хвостах — аналогичная формула по $q = \sqrt{-2\ln p}$ или $q = \sqrt{-2\ln(1-p)}$. Относительная погрешность ниже $1{,}15\cdot 10^{-9}$ и для расчёта VaR несущественна.

6 Допущения и ограничения модели

6.1 Допущения

(A1) Одна кривая используется и для дисконтирования, и для прогноза плавающих ставок (однокривой подход).

(A2) Бескупонные ставки начисляются непрерывно; интервалы времени — точные доли года без календаря и конвенции подсчёта дней.

(A3) Дневные лог-доходности дисконт-факторов совместно нормальны с нулевым средним и постоянной во времени ковариацией; дневные доходности независимы (правило квадратного корня).

(A4) Все 250 наблюдений имеют одинаковый вес (без экспоненциального взвешивания).

(A5) Линеаризация (21) пренебрегает членами второго порядка.

6.2 Сравнение с зафиксированными нетто-потоками

Прежние версии калькулятора использовали $w_i = C_i\,P(t_i)$, т. е. считали нетто-потоки C_i постоянными. При этом не учитывался риск прогноза плавающей ноги, составляющий основную часть процентного риска свопа, а $P(T_0)$ не был фактором риска. Поэтому VaR получался слишком малым.

В примере из руководства пользователя (номинал 1 млн евро, 2Y×3Y, 99 %, 1 день) получается:

Вариант	VaR 99 %, 1 день
Калькулятор (полные чувствительности, 4 фактора)	3 480,51 EUR
Прежняя версия (фиксированные C_i, 3 фактора)	52,18 EUR
Приближение $z_{0,99}\cdot\lvert\mathrm{DV01}\rvert\cdot\sigma(\Delta r_{3\mathrm{Y}})$	2 952,55 EUR

VaR калькулятора имеет тот же порядок, что и приближение через DV01. Он несколько больше, так как чувствительности в T_0 и t_n имеют противоположные знаки, а ставки разных сроков меняются не строго параллельно.

6.3 Прочие замечания

- **Короткий конец кривой:** разная экстраполяция ниже τ_1 при оценке и при измерении риска (раздел 2.3).
- **DV01** учитывает только параллельные сдвиги; повороты и изменения кривизны проявляются лишь в VaR.
- **Дюрация и выпуклость** рассчитываются по отношению к номиналу и поэтому устойчивы и при $\mathrm{PV}\approx 0$. С показателями, нормированными на стоимость, они напрямую не сопоставимы.
- **Остаточный период:** при нецелом $T\cdot f$ неполный период игнорируется.
- **Среднее:** в ковариации (16) средние вычитаются, а в VaR (23) предполагается нулевое математическое ожидание.

7 Соответствие формул и кода

Функция	Назначение	Формула
`loadTimeSeries`	чтение выбранного CSV-файла	–
`importTimeSeriesText`	разбор ряда, проценты $\to$ доли, текущая кривая = последняя строка	–
`loadSampleData`	загрузка встроенного примера	–
`downloadSample`	сохранение примера в CSV	–
`discountFactor`	$P(t) = e^{-rt}$	(1)
`interpolateRate`	интерполяция текущей кривой	(2)
`interpolateFromData`	интерполяция исторических кривых	(3)
`calculateSwapPV`	график, форвардные ставки, потоки, PV	(5)–(10)
`calculateRisk`	DV01, дюрация, выпуклость, w, σ_{PV}, VaR	(12), (13), (21)–(23)
`calculateHistoricalCovarianceMatrix`	ряды DF, лог-доходности, Σ, $\bar{\sigma}$, $\bar{\rho}$	(15), (16)
`buildCorrelationMatrix`	ρ_{ij} из Σ	–
`normalInv`	$\Phi^{-1}(p)$ по Акклэму	–
`exportToCSV`	экспорт всех результатов и матриц	–