# Транспортная задача

## Северо-западный угол, Минимальных затрат, Фогель и МОДИ

### Теория, алгоритмы и интерактивный инструмент

Русский

**Вольфганг Бёме**

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

---

Полное введение с пошаговыми алгоритмами и разобранным примером

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

# Содержание

**1 Введение и постановка задачи** **2**

**2 Обзор методов решения** **2**

**3 Начальное решение: метод северо-западного угла** **3**

**4 Начальное решение: метод минимальных затрат** **3**

**5 Начальное решение: аппроксимация Фогеля (VAM)** **4**

**6 Оптимизация: метод МОДИ (Стартовый камень)** **4**

**7 Полный пример** **5**
7.1 Шаг 1: Начальное решение (метод северо-западного угла) 5
7.2 Шаг 2: Оптимизация (метод МОДИ) . . . . . 5
7.3 Оптимальный план . . . . . 6

**8 Описание инструмента** **6**
8.1 Ввод данных . . . . . 6
8.2 Методы . . . . . 7
8.3 Вывод . . . . . 7

**9 Итоги** **7**

# 1. Введение и постановка задачи

**Транспортная задача** (ТЗ) — это задача линейного программирования специальной структуры. Требуется перевезти товар от $m$ **поставщиков** к $n$ **потребителям** с минимальными затратами.

**Определение: Транспортная задача**

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при условии:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall i \quad \text{(предложение поставщика } i\text{)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \forall j \quad \text{(спрос потребителя } j\text{)}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

где $c_{ij}$ — затраты, $x_{ij}$ — количество перевозимого товара, $a_i$ — предложение, $b_j$ — спрос.

**Типичные применения**

- Логистика: развозка товаров со складов в магазины
- Производство: распределение полуфабрикатов между заводами
- Энергетика: распределение электроэнергии от электростанций потребителям
- Кадровое планирование: назначение сотрудников на задания

**Сбалансированная задача:** $\sum a_i = \sum b_j$. Если задача несбалансирована, добавляется фиктивный поставщик или потребитель с нулевыми затратами.

# 2. Обзор методов решения

| Метод | Тип | Качество начального решения |
|---|---|---|
| Северо-западного угла | Начальное | Плохое (не учитывает затраты) |
| Минимальных затрат | Начальное | Среднее |
| Аппроксимация Фогеля | Начальное | Хорошее |
| МОДИ (Стартовый камень) | Оптимизация | Оптимальное |

# 3. Начальное решение: метод северо-западного угла

**Алгоритм: Метод северо-западного угла**

1. Начать с ячейки $(1, 1)$ — верхний левый угол.
2. Выделить $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$.
3. Если $a_i \leq b_j$: строка $i$ исчерпана → перейти на строку $i + 1$.
4. Если $a_i > b_j$: столбец $j$ исчерпан → перейти на столбец $j + 1$.
5. Повторять до исчерпания всех запасов и потребностей.

**Недостаток:** не учитывает затраты — обычно далеко от оптимума.

# 4. Начальное решение: метод минимальных затрат

**Алгоритм: Метод минимальных затрат**

1. Найти ячейку с минимальными затратами $c_{ij}$ среди незаполненных.
2. Выделить максимально возможное количество: $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$.
3. Вычеркнуть исчерпанную строку или столбец.
4. Повторять до получения полного плана.

**Преимущество:** учитывает затраты → лучше, чем северо-западный угол.

# 5. Начальное решение: аппроксимация Фогеля (VAM)

**Алгоритм: Аппроксимация Фогеля**

1. Для каждой строки и столбца вычислить **штраф** = разность двух наименьших затрат.
2. Выбрать строку/столбец с наибольшим штрафом.
3. В этой строке/столбце выделить максимальное количество в ячейке с минимальными затратами.
4. Вычеркнуть исчерпанную строку/столбец, пересчитать штрафы.
5. Повторять до заполнения плана.

**Преимущество:** обычно даёт хорошее начальное решение, близкое к оптимуму.

# 6. Оптимизация: метод МОДИ (Стартовый камень)

**Алгоритм: Метод МОДИ**

1. Вычислить потенциалы $u_i$ и $v_j$: для базисных ячеек $u_i + v_j = c_{ij}$. Установить $u_1 = 0$ и найти остальные.
2. Для небазисных ячеек вычислить **сокращённые затраты**: $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$.
3. Если все $\Delta_{ij} \geq 0$: **оптимум достигнут!**
4. Иначе: выбрать ячейку с наименьшим $\Delta_{ij} < 0$ как входящую.
5. Построить цикл (замкнутый путь через базисные ячейки), чередуя знаки $+/-$.
6. Определить выходящую переменную (наименьшее значение на «$-$»-позиции), перераспределить.
7. Повторять с шага 1.

**Оптимальность критерия МОДИ**

Решение оптимально тогда и только тогда, когда все сокращённые затраты небазисных ячеек неотрицательны: $\Delta_{ij} \geq 0$ для всех

$(i, j) \notin B$.

# 7. Полный пример

**Исходная задача: 3 поставщика и 3 потребителя**

| | **П1** | **П2** | **П3** | Предложение |
|---|---|---|---|---|
| **А1** | 2 | 3 | 1 | 30 |
| **А2** | 5 | 4 | 8 | 40 |
| **А3** | 5 | 6 | 8 | 30 |
| Спрос | 25 | 35 | 40 | 100 |

$c_{ij}$ = затраты на единицу перевозки. Сумма предложения = сумма спроса = 100 → задача сбалансирована.

## 7.1. Шаг 1: Начальное решение (метод северо-западного угла)

| | П1 | П2 | П3 | Предл. |
|---|---|---|---|---|
| А1 | **25** | **5** | – | 30 |
| А2 | – | **30** | **10** | 40 |
| А3 | – | – | **30** | 30 |
| Спрос | 25 | 35 | 40 | |

Начальные затраты: $25 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 30 \cdot 4 + 10 \cdot 8 + 30 \cdot 8 = 50 + 15 + 120 + 80 + 240 =$ **505**

## 7.2. Шаг 2: Оптимизация (метод МОДИ)

**Вычисление потенциалов** (из $u_i + v_j = c_{ij}$ для базисных ячеек):
$u_1 = 0$: из $(1,1)$: $v_1 = 2$; из $(1,2)$: $v_2 = 3$; из $(2,2)$: $u_2 = 1$; из $(2,3)$: $v_3 = 7$; из $(3,3)$: $u_3 = 1$.

**Сокращённые затраты небазисных ячеек:**

$$\Delta_{13} = 1 - (0 + 7) = -6 \quad \leftarrow \text{ наименьший, входящая ячейка!}$$
$$\Delta_{21} = 5 - (1 + 2) = 2$$
$$\Delta_{31} = 5 - (1 + 2) = 2$$
$$\Delta_{32} = 6 - (1 + 3) = 2$$

$\Delta_{13} = -6 < 0$ → перераспределяем по циклу $(1,3) \to (2,3) \to (2,2) \to (1,2)$.

Минимум на «−»-позициях: $\min(10, 5) = 5$ → выходящая $(1,2)$.

Новые затраты после итерации 1: **475** (улучшение на 30).

После нескольких итераций МОДИ достигается **оптимальное решение** с затратами **335**.

## 7.3. Оптимальный план

| | П1 | П2 | П3 | Предл. |
|---|---|---|---|---|
| А1 | – | – | **30** | 30 |
| А2 | 25 | **15** | – | 40 |
| А3 | – | **20** | 10 | 30 |
| Спрос | 25 | 35 | 40 | |

$$Z^* = 30 \cdot 1 + 25 \cdot 5 + 15 \cdot 4 + 20 \cdot 6 + 10 \cdot 8 = 30 + 125 + 60 + 120 + 80 = \mathbf{415}$$

# 8. Описание инструмента

**Транспортная задача — Интерактивный инструмент**

Инструмент решает транспортную задачу пошагово и визуализирует результаты.

## 8.1. Ввод данных

- Таблица затрат: ввод $c_{ij}$ для каждой пары (поставщик, потребитель).
- Строка «Предложение»: $a_i$ для каждого поставщика.
- Строка «Спрос»: $b_j$ для каждого потребителя.
- Несбалансированные задачи: инструмент автоматически добавляет фиктивного участника.

### 8.2. Методы

- **Северо-западного угла**: быстрое начальное решение без учёта затрат.
- **Минимальных затрат**: начальное решение с учётом затрат.
- **Аппроксимация Фогеля**: лучшее начальное решение через штрафы.
- **МОДИ**: оптимизация через потенциалы и перераспределение.

### 8.3. Вывод

- **Таблица транспортного плана**: распределение с подсвеченными базисными ячейками.
- **Транспортная сеть**: граф поставщиков и потребителей.
- **Пошаговые итерации МОДИ**: каждый шаг улучшения с объяснением.
- **Оптимальное решение**: финальный план и минимальные затраты.

## 9. Итоги

**Ключевые положения: Транспортная задача**

1. ТЗ минимизирует затраты на перевозку от $m$ поставщиков к $n$ потребителям.
2. **Сбалансированность**: сумма предложения = сумма спроса (иначе добавляется фиктивный участник).
3. **Северо-западный угол**: простой, но не учитывает затраты.
4. **Минимальных затрат**: начинает с наиболее дешёвых маршрутов.
5. **Аппроксимация Фогеля**: лучшее начало через анализ альтернативных затрат.
6. **МОДИ**: оптимизация через потенциалы и циклы — гарантирует оптимум.
7. Базисное решение содержит $m+n-1$ базисных переменных.