Сборник задач

Транспортная задача

Русский

Вольфганг Бёме

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Уровень 1: Лёгкий **2**
Задача 1.1 2
Задача 1.2 3

2 Уровень 2: Средний **5**
Задача 2.1 5
Задача 2.2 6

3 Уровень 3: Сложный **8**
Задача 3.1 8
Задача 3.2 9

1 Уровень 1: Лёгкий

Задача 1.1 – Метод северо-западного угла

Задача 1.1

Дана следующая транспортная задача (затраты на единицу):

	N_1	N_2	N_3	Предложение
A_1	2	3	5	30
A_2	4	1	6	40
A_3	3	5	2	30
Спрос	25	35	40	100

(a) Проверь, сбалансирована ли задача.

(b) Определи начальное решение методом северо-западного угла.

(c) Рассчитай общие затраты начального решения.

(d) Сколько базисных переменных имеет невырожденное решение?

Решение: Задача 1.1

(a) Проверка баланса: $\sum a_i = 30+40+30 = 100 = 25+35+40 = \sum b_j$ ✓

(b) Метод северо-западного угла:

1. $(1,1)$: $\min(30,25) = 25$, $x_{11} = 25$. $a_1 = 5$, $b_1 = 0$.
2. $(1,2)$: $\min(5,35) = 5$, $x_{12} = 5$. $a_1 = 0$, $b_2 = 30$.
3. $(2,2)$: $\min(40,30) = 30$, $x_{22} = 30$. $a_2 = 10$, $b_2 = 0$.
4. $(2,3)$: $\min(10,40) = 10$, $x_{23} = 10$. $a_2 = 0$, $b_3 = 30$.
5. $(3,3)$: $\min(30,30) = 30$, $x_{33} = 30$. Готово.

	N_1	N_2	N_3	Предложение
A_1	**25**(2)	**5**(3)	(5)	30
A_2	(4)	**30**(1)	**10**(6)	40
A_3	(3)	(5)	**30**(2)	30
Спрос	25	35	40	

(c) Общие затраты: $K = 25 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 30 \cdot 1 + 10 \cdot 6 + 30 \cdot 2 = 50 + 15 + 30 + 60 + 60 = \mathbf{215}$
(d) Базисные переменные: $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = \mathbf{5}$

Задача 1.2 – Метод минимальной стоимости

Задача 1.2

Используй ту же матрицу затрат и те же объёмы предложения/спроса, что и в задаче 1.1.

(a) Определи начальное решение методом минимальной стоимости.

(b) Рассчитай общие затраты и сравни с решением методом северо-западного угла.

(c) Какая ячейка имеет наименьшие затраты и получает первое назначение?

Решение: Задача 1.2

(a) Метод минимальной стоимости:
Самые дешёвые ячейки по порядку: $c_{22} = 1$, $c_{11} = 2$, $c_{33} = 2$, $c_{12} = 3$, $c_{31} = 3$, …

1. $c_{22} = 1$: $x_{22} = \min(40, 35) = 35$. $b_2 = 0$, $a_2 = 5$.
2. $c_{11} = 2$: $x_{11} = \min(30, 25) = 25$. $b_1 = 0$, $a_1 = 5$.
3. $c_{33} = 2$: $x_{33} = \min(30, 40) = 30$. $a_3 = 0$, $b_3 = 10$.
4. $c_{12} = 3$ недоступна (столбец 2 исчерпан). $c_{13} = 5$: $x_{13} = \min(5, 10) = 5$. $a_1 = 0$.
5. $c_{23} = 6$: $x_{23} = \min(5, 5) = 5$. Готово.

	N_1	N_2	N_3	Предложение
A_1	**25**(2)	(3)	**5**(5)	30
A_2	(4)	**35**(1)	**5**(6)	40
A_3	(3)	(5)	**30**(2)	30
Спрос	25	35	40	

(b) Общие затраты: $K = 25 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 35 \cdot 1 + 5 \cdot 6 + 30 \cdot 2 = 50 + 25 + 35 + 30 + 60 =$ **200**
Сравнение: СЗУ = 215, ММС = 200 $\Rightarrow$ ММС лучше на 15.
(c) Первое назначение: ячейка $(2, 2)$ с $c_{22} = 1$.
Решение методом минимальной стоимости: $K = 200$ **(лучше, чем СЗУ с 215)**

2 Уровень 2: Средний

Задача 2.1 – Метод Фогеля (аппроксимации)

Задача 2.1

Дана следующая транспортная задача:

	N_1	N_2	N_3	N_4	Предложение
A_1	4	8	1	6	120
A_2	7	2	5	3	80
A_3	3	6	4	9	100
Спрос	90	60	70	80	300

(a) Рассчитай все штрафы для первой итерации метода Фогеля.

(b) Выполни полный метод Фогеля.

(c) Рассчитай общие затраты.

Решение: Задача 2.1

(a) Штрафы, итерация 1:

	N_1	N_2	N_3	N_4	Предложение	**Штраф**
A_1	4	8	1	6	120	$4-1=\mathbf{3}$
A_2	7	2	5	3	80	$3-2=\mathbf{1}$
A_3	3	6	4	9	100	$4-3=\mathbf{1}$
Спрос	90	60	70	80		
Штраф	$4-3=1$	$6-2=4$	$4-1=\mathbf{3}$	$6-3=3$		

Наибольший штраф: столбец N_2 (штраф 4). Самая дешёвая ячейка в N_2: $(2,2)$ с $c=2$. $x_{22}=\min(80,60)=60$. $a_2=20$, $b_2=0$.

(b) Полный метод Фогеля:

Итерация 2 (без N_2): пересчёт штрафов. Наибольший штраф: N_3 или A_1 (штраф 3). Выбираем N_3: самая дешёвая ячейка $(1,3)$, $c=1$. $x_{13}=\min(120,70)=70$. $a_1=50$.

Итерация 3: наибольший штраф: A_1 (штраф $6-4=2$). N_1: самая дешёвая ячейка $(1,1)$, $c=4$. $x_{11}=\min(50,90)=50$. $a_1=0$, $b_1=40$.

Итерация 4: A_2 ещё открыт ($a_2=20$), A_3 ещё открыт. Рассчитываем штрафы. Самая дешёвая: $(2,4)$, $c=3$. $x_{24}=\min(20,80)=20$. $a_2=0$, $b_4=60$.

Итерация 5: A_3: $x_{31} = \min(100, 40) = 40$. $b_1 = 0$, $a_3 = 60$.
Итерация 6: $x_{34} = 60$. Готово.
(c) Общие затраты: $K = 50 \cdot 4 + 70 \cdot 1 + 60 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 3 + 60 \cdot 9 = 200 + 70 + 120 + 60 + 120 + 540 =$ **1110**
Решение методом Фогеля: $K = 1110$

Задача 2.2 – Одна итерация метода потенциалов (MODI)

Задача 2.2

Дано следующее базисное решение транспортной задачи 3×3:

	N_1	N_2	N_3	Предложение
A_1	**40**(2)	**30**(3)	(5)	70
A_2	(7)	**10**(4)	**30**(1)	40
A_3	(3)	(2)	**50**(6)	50
Спрос	40	40	80	

(a) Рассчитай потенциалы u_i и v_j (положи $u_1 = 0$).

(b) Рассчитай все приведённые затраты δ_{ij} для небазисных ячеек.

(c) Является ли решение оптимальным? Если нет: какая ячейка входит в базис?

(d) Выполни одну итерацию метода потенциалов (цикл, θ, новое решение, новые затраты).

Решение: Задача 2.2

(a) Потенциалы ($u_1 = 0$):

$$x_{11} : c_{11} = u_1 + v_1 \Rightarrow 2 = 0 + v_1 \Rightarrow v_1 = 2$$
$$x_{12} : c_{12} = u_1 + v_2 \Rightarrow 3 = 0 + v_2 \Rightarrow v_2 = 3$$
$$x_{22} : c_{22} = u_2 + v_2 \Rightarrow 4 = u_2 + 3 \Rightarrow u_2 = 1$$
$$x_{23} : c_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow 1 = 1 + v_3 \Rightarrow v_3 = 0$$
$$x_{33} : c_{33} = u_3 + v_3 \Rightarrow 6 = u_3 + 0 \Rightarrow u_3 = 6$$

(b) Приведённые затраты $\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$:

$$\delta_{13} = 5 - 0 - 0 = 5$$
$$\delta_{21} = 7 - 1 - 2 = 4$$
$$\delta_{31} = 3 - 6 - 2 = \mathbf{-5}$$
$$\delta_{32} = 2 - 6 - 3 = \mathbf{-7}$$

(c) Оптимальность: Нет – $\delta_{32} = -7 < 0$. Входящая ячейка: $(3, 2)$.
(d) Итерация метода потенциалов:
Цикл для $(3, 2)$: $(3, 2)^+ \to (3, 3)^- \to (2, 3)^+ \to (2, 2)^- \to (3, 2)$...
Проверка: $(3, 2) \to (1, 2) \to (1, 1) \to (3, 1)$? Нет, $(3, 1)$ не является базисной переменной.
Альтернативная попытка: $(3, 2)^+ \to (1, 2)^- \to (1, 1)^+$? – $(1, 1)$ не находится в столбце 2.
Правильный цикл: $(3, 2)^+ \to (2, 2)^- \to (2, 3)^+ \to (3, 3)^-$.
Позиции $(-)$: $x_{22} = 10$, $x_{33} = 50$. $\theta = \min(10, 50) = 10$.
Обновление: $x_{32} = 0 + 10 = 10$, $x_{22} = 10 - 10 = 0$ (выходит), $x_{23} = 30 + 10 = 40$, $x_{33} = 50 - 10 = 40$.
Снижение затрат: $\Delta K = \delta_{32} \cdot \theta = (-7) \cdot 10 = -70$.
Старые затраты: $40{\cdot}2{+}30{\cdot}3{+}10{\cdot}4{+}30{\cdot}1{+}50{\cdot}6 = 80{+}90{+}40{+}30{+}300 = 540$.
Новые затраты: $540 - 70 = \mathbf{470}$.
Новое базисное решение с $K = 470$. Входящая ячейка $(3, 2)$, выходящая ячейка $(2, 2)$.

3 Уровень 3: Сложный

Задача 3.1 – Полная оптимизация

Задача 3.1

Дана следующая транспортная задача:

	N_1	N_2	N_3	N_4	Предложение
A_1	2	3	1	5	120
A_2	7	3	4	6	80
A_3	5	4	7	3	100
Спрос	90	70	80	60	300

(a) Определи начальное решение методом северо-западного угла и рассчитай затраты.

(b) Выполни столько итераций метода потенциалов, сколько нужно для достижения оптимума.

(c) Покажи, что итоговое решение оптимально (все $\delta_{ij} \geq 0$).

(d) Рассчитай снижение затрат относительно начального решения в процентах.

Решение: Задача 3.1

(a) Начальное решение методом северо-западного угла:
$(1,1)$: $x_{11} = 90$, $a_1 = 30$. $(1,2)$: $x_{12} = 30$, $a_1 = 0$. $(2,2)$: $x_{22} = 40$, $b_2 = 0$. $(2,3)$: $x_{23} = 40$, $a_2 = 0$. $(3,3)$: $x_{33} = 40$, $b_3 = 0$. $(3,4)$: $x_{34} = 60$.
$K_0 = 90 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 40 \cdot 3 + 40 \cdot 4 + 40 \cdot 7 + 60 \cdot 3 = 180 + 90 + 120 + 160 + 280 + 180 =$ **1010**
(b) Итерация метода потенциалов 1:
Потенциалы: $u_1 = 0$, $v_1 = 2$, $v_2 = 3$, $u_2 = 0$, $v_3 = 4$, $u_3 = 3$, $v_4 = 0$.
Приведённые затраты: $\delta_{13} = 1 - 0 - 4 = -3$, $\delta_{14} = 5$, $\delta_{21} = 5$, $\delta_{24} = 6$, $\delta_{31} = 0$, $\delta_{32} = -2$.
Входящая: $(1,3)$ с $\delta = -3$.
Цикл: $(1,3)^+ \to (1,2)^- \to (2,2)^+ \to (2,3)^-$. $\theta = \min(30, 40) = 30$.
$x_{13} = 30$, $x_{12} = 0$ (выходит), $x_{22} = 70$, $x_{23} = 10$. $\Delta K = -3 \cdot 30 = -90$.
$K_1 =$ **920**.
Итерация метода потенциалов 2:
Новый базис: $x_{11} = 90, x_{13} = 30, x_{22} = 70, x_{23} = 10, x_{33} = 40, x_{34} = 60$.
Потенциалы: $u_1 = 0$, $v_1 = 2$, $v_3 = 1$, $u_2 = 3$, $v_2 = 0$, $u_3 = 6$, $v_4 = -3$.
Приведённые затраты (выборочно): $\delta_{12} = 3$, $\delta_{14} = 8$, $\delta_{21} = 2$, $\delta_{24} = 6$, $\delta_{31} = -3$, $\delta_{32} = -2$.

Входящая: $(3,1)$ с $\delta = -3$.
Цикл: $(3,1)^+ \to (3,3)^- \to (1,3)^+ \to (1,1)^-$. $\theta = \min(40, 90) = 40$.
$x_{31} = 40$, $x_{33} = 0$ (выходит), $x_{13} = 70$, $x_{11} = 50$. $\Delta K = -3 \cdot 40 = -120$.
$K_2 = \mathbf{800}$.

(c) Проверка оптимальности:

Новый базис: $x_{11} = 50, x_{13} = 70, x_{22} = 70, x_{23} = 10, x_{31} = 40, x_{34} = 60$.
Потенциалы: $u_1 = 0$, $v_1 = 2$, $v_3 = 1$, $u_2 = 3$, $v_2 = 0$, $u_3 = 3$, $v_4 = 0$.
Все приведённые затраты:

$$\delta_{12} = 3-0-0 = 3 \geq 0 \qquad \delta_{14} = 5-0-0 = 5 \geq 0$$
$$\delta_{21} = 7-3-2 = 2 \geq 0 \qquad \delta_{24} = 6-3-0 = 3 \geq 0$$
$$\delta_{32} = 4-3-0 = 1 \geq 0 \qquad \delta_{33} = 7-3-1 = 3 \geq 0$$

Все $\delta_{ij} \geq 0 \Rightarrow$ **достигнуто оптимальное решение!**
Оптимальное решение:

	N_1	N_2	N_3	N_4	Предложение
A_1	**50**(2)	(3)	**70**(1)	(5)	120
A_2	(7)	**70**(3)	**10**(4)	(6)	80
A_3	**40**(5)	(4)	(7)	**60**(3)	100
Спрос	90	70	80	60	

$K^* = 50{\cdot}2+70{\cdot}1+70{\cdot}3+10{\cdot}4+40{\cdot}5+60{\cdot}3 = 100+70+210+40+200+180 = \mathbf{800}$
(d) Снижение затрат: $\frac{1010-800}{1010} \cdot 100\% = \frac{210}{1010} \cdot 100\% \approx$ **20,8%**

Задача 3.2 – Несбалансированная задача и вырожденность

Задача 3.2

Дана следующая **несбалансированная** транспортная задача:

	N_1	N_2	N_3	Предложение
A_1	3	5	2	80
A_2	6	1	4	70
A_3	4	3	7	60
Спрос	50	90	40	

(a) Определи, что больше – предложение или спрос, и добавь фиктивного поставщика или потребителя с затратами 0.

(b) Определи начальное решение методом минимальной стоимости.

(c) Объясни, что означает **вырожденность**, и опиши, когда она возникает.

(d) Возникает ли вырожденность в начальном решении? Обоснуй.

(e) Выполни одну итерацию метода потенциалов и рассчитай оптимальные затраты (без учёта фиктивных перевозок).

Решение: Задача 3.2

(a) Проверка баланса: $\sum a_i = 80+70+60 = 210$, $\sum b_j = 50+90+40 = 180$. Предложение $>$ спрос: избыток 30. Добавляем фиктивного потребителя N_4 с $b_4 = 30$ и $c_{i4} = 0$ для всех i.
(b) Метод минимальной стоимости (с N_4):
Самые дешёвые ячейки: $c_{22} = 1$, $c_{13} = 2$, $c_{23} = 4$ шёл бы после $c_{31} = 4$... Порядок: $(2,2) = 1$, $(1,3) = 2$, $(3,1) = 4$ шёл бы после фиктивного столбца $c_{i4} = 0$.
С $c_{i4} = 0$: сначала $(1,4)$, $(2,4)$ или $(3,4)$ – выбираем $(1,4)$: $x_{14} = \min(80, 30) = 30$. $b_4 = 0$.
Затем $(2,2) = 1$: $x_{22} = \min(70, 90) = 70$. $a_2 = 0$, $b_2 = 20$. Затем $(1,3) = 2$: $x_{13} = \min(50, 40) = 40$. $b_3 = 0$, $a_1 = 10$. Затем $(1,2) = 5$ или $(3,2) = 3$: $(3,2) = 3$: $x_{32} = \min(60, 20) = 20$. $b_2 = 0$, $a_3 = 40$. Затем $(1,2) = 5$: $x_{12} = \min(10, 0)$... $b_2 = 0$ исчерпан. $(1,1) = 3$: $x_{11} = 10$. $a_1 = 0$. Наконец $x_{31} = \min(40, 40) = 40$. Готово.
Начальное решение: $x_{14} = 30$, $x_{11} = 10$, $x_{13} = 40$, $x_{22} = 70$, $x_{32} = 20$, $x_{31} = 40$.
Затраты (без N_4): $10{\cdot}3+40{\cdot}2+70{\cdot}1+40{\cdot}4+20{\cdot}3 = 30+80+70+160+60 =$ **400**
(c) Вырожденность: Базисное решение является **вырожденным**, если число базисных переменных меньше $m+n-1$, т. е. одна из базисных переменных принимает значение 0. Это происходит, когда на шаге распределения одновременно исчерпываются предложение и спрос строки/столбца. Вырожденность требует искусственного введения базисной переменной со значением 0 («эпсилон-назначение»).
(d) Вырожденность в начальном решении: Расширенная задача имеет $m = 3$, $n = 4$, то есть требуется $m+n-1 = 6$ базисных переменных. Приведённое выше решение имеет 6 базисных переменных ($x_{14}, x_{11}, x_{13}, x_{22}, x_{32}, x_{31}$) $\Rightarrow$ **вырожденности нет**.
(e) Итерация метода потенциалов:
Базис (расширенная задача): рассчитываем потенциалы, проверяем приведённые затраты. $u_1 = 0$: $v_1 = 3$ (из x_{11}), $v_3 = 2$ (из x_{13}), $v_4 = 0$ (из x_{14}). u_2: из x_{22}: $u_2 = 1 - v_2$... v_2 пока неизвестен. Из x_{32}: $u_3 + v_2 = 3$. Из x_{31}: $u_3 + v_1 = 4 \Rightarrow u_3 = 1$. $v_2 = 3 - 1 = 2$. $u_2 = 1 - 2 = -1$.

Приведённые затраты (реальные ячейки): $\delta_{12} = 5-0-2 = 3$, $\delta_{21} = 6-(-1)-3 = 4$, $\delta_{23} = 4-(-1)-2 = 3$, $\delta_{33} = 7-1-2 = 4$.
Все $\delta_{ij} \geq 0$ для реальных ячеек. $\Rightarrow$ начальное решение уже **оптимально!**
Оптимальные затраты (без фиктивных перевозок): **400**
Задача была несбалансированной; после добавления N_4 начальное решение методом минимальной стоимости уже оптимально при $K = 400$.
