Теория игр

Модуль 4: Кооперативная теория игр

Значение Шепли, ядро, переговоры Нэша и нуклеолус

Русский

Вольфганг Бёме

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

Полное введение с теорией, тремя разобранными примерами и описанием интерактивного инструмента

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Что такое кооперативная теория игр? 2

2 Основные понятия 2

3 Значение Шепли 3
3.1 Основная идея 3
3.2 Эквивалентная формула через перестановки 4
3.3 Четыре аксиомы Шепли 4

4 Ядро (Core) 4

5 Решение Нэша для переговоров 5

6 Полный пример 1: Производственная коалиция 6
6.1 Проверка супераддитивности 6
6.2 Вычисление значения Шепли 6
6.3 Проверка условий ядра 7

7 Пример 2: Голоса и индекс власти Шепли 7
7.1 Выигрывающие коалиции 8
7.2 Индекс власти Шепли 8

8 Пример 3: Распределение затрат – переговоры Нэша 9
8.1 Значение Шепли экономии 9
8.2 Решение Нэша 9

9 Описание инструмента: Теория игр Модуль 4 10
9.1 Ввод данных 10
9.2 Результаты – 5 шагов 10

10 Итоги 11

1. Что такое кооперативная теория игр?

В модулях 1–3 мы анализировали **некооперативные** игры: игроки действуют независимо, обязывающих соглашений нет. **Кооперативная теория игр** вместо этого спрашивает:

- Какие **коалиции** (группы игроков) образуются?
- Как совместно созданная ценность **справедливо распределяется**?
- Какие распределения **стабильны** – т.е. ни у одной группы нет стимула покинуть соглашение?

Типичные применения

- **Корпоративные альянсы:** Какие фирмы образуют консорциум? Как делится синергия?
- **Политические коалиции:** Сколько реальной власти имеет партия в правительственной коалиции?
- **Распределение затрат:** Как города делят расходы на совместный инфраструктурный проект?
- **Патенты и лицензии:** Как распределяется прибыль от совместного изобретения?
- **Банкротство:** Как справедливо распределить активы обанкротившейся фирмы между кредиторами?

2. Основные понятия

Определение: Кооперативная игра в характеристической форме

Кооперативная игра (N, v) состоит из:

- множества игроков $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
- **характеристической функции** $v : 2^N \to \mathbb{R}$, сопоставляющей каждой коалиции $S \subseteq N$ её ценность $v(S)$

Соглашения:

$$v(\emptyset) = 0, \qquad v(\{i\}) \geq 0 \quad \text{(самостоятельно)}$$

$v(S)$ – это ценность (прибыль, полезность), которую коалиция S может гарантировать себе *независимо* от действий игроков вне S.

Определение: Супераддитивность и существенность

Игра (N, v) называется:

- **супераддитивной**, если для всех непересекающихся $S, T \subseteq N$:
$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$$
Сотрудничество всегда не хуже, чем отсутствие сотрудничества.
- **существенной**, если:
$$v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\})$$
Сотрудничество создаёт реальную добавленную ценность.
- **выпуклой**, если для всех $S \subseteq T$ и $i \notin T$:
$$v(T \cup \{i\}) - v(T) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S)$$
Предельные вклады растут с размером коалиции.

Определение: Дележ (допустимое распределение)

Вектор $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ называется **дележом**, если:

- **Эффективность:** $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ (общая ценность распределяется полностью)
- **Индивидуальная рациональность:** $x_i \geq v(\{i\})$ (каждый получает не менее своей самостоятельной ценности)

3. Значение Шепли

3.1. Основная идея

Значение Шепли (Ллойд Шепли, 1953) – единственное справедливое распределение, удовлетворяющее четырём фундаментальным аксиомам. Идея: каждый игрок получает свой *средний предельный вклад* по всем возможным порядкам вступления в коалицию.

Определение: Значение Шепли

Значение Шепли игрока i:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(n - |S| - 1)!}{n!} \big[v(S \cup \{i\}) - v(S)\big]$$

Член $[v(S\cup\{i\})-v(S)]$ – **предельный вклад** игрока i при вступлении в коалицию S. Вес $\frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!}$ – вероятность того, что именно игроки из S прибудут перед i (при равновероятном порядке).

3.2. Эквивалентная формула через перестановки

Теорема: Представление через перестановки

Пусть $\Pi(N)$ – множество всех $n!$ перестановок игроков. Для перестановки σ пусть $P_i^\sigma = \{j : \sigma(j) < \sigma(i)\}$ – множество игроков, идущих перед i в порядке σ. Тогда:

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\Pi(N)}\left[v(P_i^\sigma\cup\{i\}) - v(P_i^\sigma)\right]$$

Алгоритм: перечислить все $n!$ перестановок; вычислить предельный вклад i для каждой; усреднить.

3.3. Четыре аксиомы Шепли

Теорема: Единственность значения Шепли

Значение Шепли – **единственное** правило распределения, одновременно удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. **Эффективность:** $\sum_{i\in N}\phi_i(v) = v(N)$
   Вся ценность распределяется полностью.
2. **Симметрия:** Если $v(S\cup\{i\}) = v(S\cup\{j\})$ для всех $S \not\ni i,j$, то $\phi_i = \phi_j$.
   Игроки с идентичными вкладами получают поровну.
3. **Свойство пустого игрока:** Если $v(S\cup\{i\}) = v(S)$ для всех $S \not\ni i$, то $\phi_i = 0$.
   Игрок без вклада не получает ничего.
4. **Аддитивность:** $\phi_i(v+w) = \phi_i(v) + \phi_i(w)$ для всех игр v, w.

4. Ядро (Core)

Определение: Ядро

Ядро кооперативной игры – множество всех дележей x, против которых ни одна коалиция S не может "заблокировать":

$$\mathcal{C}(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i \in N} x_i = v(N) \;\; \text{и} \;\; \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \; \forall S \subseteq N \right\}$$

Распределение x лежит в ядре, если:

- **Эффективность:** Общая ценность распределяется полностью.
- **Коалиционная рациональность:** Каждая подгруппа S получает не менее того, что могла бы достичь самостоятельно. Иначе у S был бы стимул покинуть большую коалицию.

Когда ядро пусто? В некоторых играх стабильного распределения не существует (ядро пусто) – тогда у кого-то всегда есть стимул отклониться. Для **выпуклых игр** ядро гарантированно непусто (теорема Шепли 1971), и значение Шепли всегда лежит в ядре.

Теорема: Значение Шепли в ядре для выпуклых игр

Если (N, v) выпукла, то $\phi(v) \in \mathcal{C}(v)$.

5. Решение Нэша для переговоров

Для **двух игроков** существует элегантное аксиоматическое решение.

Определение: Задача переговоров Нэша

Задача переговоров Нэша (F, d) состоит из:

- $F \subseteq \mathbb{R}^2$: множество возможных пар выигрышей
- $d = (d_1, d_2)$: **статус-кво** (точка разногласия) – что получают игроки при отсутствии соглашения

Решение Нэша - простой случай

Когда граница Парето линейна (фиксированная сумма V):

$$x_1 + x_2 = V, \quad x_i \geq d_i$$

решение Нэша максимизирует **произведение Нэша**:

$$(x_1 - d_1)(x_2 - d_2) \to \max$$

Решение:

$$x_1^* = \frac{V + d_1 - d_2}{2}, \qquad x_2^* = \frac{V + d_2 - d_1}{2}$$

Интерпретация: излишек $V - d_1 - d_2$ делится **поровну** между игроками.

Аксиомы Нэша (1950)

Решение Нэша – единственное решение, удовлетворяющее **эффективности**, **симметрии**, **инвариантности к масштабированию** и **независимости от посторонних альтернатив**.

6. Полный пример 1: Производственная коалиция

Сценарий: Три фирмы

Фирмы А, Б, В могут производить самостоятельно или в коалициях. Коалиции дают разделение труда и эффект масштаба. Характеристическая функция (прибыль в тыс. €):

$$v(\{\}) = 10,\ v(\{\}) = 15,\ v(\{\}) = 8$$

$$v(\{,\}) = 40,\ v(\{,\}) = 30,\ v(\{,\}) = 35,\ v(\{,,\}) = 60$$

6.1. Проверка супераддитивности

Коалиция	$v(S \cup T)$	$v(S) + v(T)$	Супераддитивна?
$\{,\}$ vs $\{\} + \{\}$	40	25	$40 \geq 25$ ✓
$\{,\}$ vs $\{\} + \{\}$	30	18	$30 \geq 18$ ✓
$\{,\}$ vs $\{\} + \{\}$	35	23	$35 \geq 23$ ✓
$\{,,\}$ vs $\{,\} + \{\}$	60	48	$60 \geq 48$ ✓

Игра супераддитивна и существенна: $v(\{,,\}) = 60 > 10 + 15 + 8 = 33$. Сотрудничество создаёт излишек в 27.

6.2. Вычисление значения Шепли

Имеется $3! = 6$ перестановок. Вычисляем предельный вклад фирмы А в каждом порядке:

Порядок	Предел. А	Предел. Б	Предел. В
А, Б, В	$v(\{\}) - v(\emptyset) = 10$	$v(\{,\}) - v(\{\}) = 30$	$v(\{,,\}) - v(\{,\}) = 20$
А, В, Б	10	$v(\{,,\}) - v(\{,\}) = 30$	$v(\{,\}) - v(\{\}) = 20$
Б, А, В	$v(\{,\}) - v(\{\}) = 25$	15	$v(\{,,\}) - v(\{,\}) = 20$
Б, В, А	$v(\{,,\}) - v(\{,\}) = 25$	15	$v(\{,\}) - v(\{\}) = 20$
В, А, Б	$v(\{,\}) - v(\{\}) = 22$	$v(\{,,\}) - v(\{,\}) = 30$	8
В, Б, А	$v(\{,,\}) - v(\{,\}) = 25$	$v(\{,\}) - v(\{\}) = 27$	8
Сумма	**117**	**147**	**96**
Шепли ($\div 6$)	**19,5**	**24,5**	**16**

Контроль: $19{,}5 + 24{,}5 + 16 = 60 = v(\{,,\})$ ✓

6.3. Проверка условий ядра

Распределение $(x, x, x) = (19{,}5,\ 24{,}5,\ 16)$ должно удовлетворять всем условиям коалиционной рациональности:

Условие	Сумма Шепли	$v(S)$	Выполнено?
$x \geq v(\{\})$	19,5	10	✓
$x \geq v(\{\})$	24,5	15	✓
$x \geq v(\{\})$	16	8	✓
$x + x \geq v(\{,\})$	44	40	✓
$x + x \geq v(\{,\})$	35,5	30	✓
$x + x \geq v(\{,\})$	40,5	35	✓
$x + x + x = v(N)$	60	60	✓

Значение Шепли $(19{,}5,\ 24{,}5,\ 16)$ **лежит в ядре!** Большая коалиция $\{,,\}$ стабильна.

7. Пример 2: Голоса и индекс власти Шепли

Сценарий: Парламент с четырьмя партиями

Четыре партии имеют следующие доли мест (для решений требуется $q = 51$ из 100 голосов):

$$w_1 = 40,\ w_2 = 30,\ w_3 = 20,\ w_4 = 10$$

Характеристическая функция: $v(S) = 1$, если $\sum_{i \in S} w_i \geq 51$, иначе $v(S) = 0$.

7.1. Выигрывающие коалиции

Коалиция	Голоса	$v(S)$	Выигрывает?
$\{1, 2\}$	70	1	Да
$\{1, 3\}$	60	1	Да
$\{1, 4\}$	50	0	Нет
$\{2, 3\}$	50	0	Нет
$\{2, 4\}$	40	0	Нет
$\{3, 4\}$	30	0	Нет
$\{1, 2, 3\}$	90	1	Да
$\{1, 2, 4\}$	80	1	Да
$\{1, 3, 4\}$	70	1	Да
$\{2, 3, 4\}$	60	1	Да
$\{1, 2, 3, 4\}$	100	1	Да

7.2. Индекс власти Шепли

Для $n = 4$ имеется $4! = 24$ перестановок. Игрок i **пивотален**, если он переводит коалицию из проигрывающей в выигрывающую. Индекс власти Шепли = доля перестановок, в которых i пивотален.

Партия	Доля голосов	Индекс власти Шепли ϕ_i
Партия 1 (40%)	40%	$\phi_1 = \frac{10}{24} \approx \mathbf{41{,}7\%}$
Партия 2 (30%)	30%	$\phi_2 = \frac{6}{24} = \mathbf{25{,}0\%}$
Партия 3 (20%)	20%	$\phi_3 = \frac{6}{24} = \mathbf{25{,}0\%}$
Партия 4 (10%)	10%	$\phi_4 = \frac{2}{24} \approx \mathbf{8{,}3\%}$

Интерпретация:

- Партия 1 имеет *больше* власти, чем предполагает её доля голосов (41,7% > 40%), поскольку она пивотальна во многих коалициях.
- Партия 4 имеет *меньше* реальной власти (8,3% < 10%) – она редко даёт решающий голос.
- Партии 2 и 3 имеют одинаковую власть (25%), хотя у партии 2 больше голосов – обе пивотальны одинаково часто!

8. Пример 3: Распределение затрат – переговоры Нэша

Сценарий: Два города строят совместный водопровод

Города А и Б хотят совместно построить водопровод. По отдельности это стоило бы А 80 млн €, Б 60 млн €. Совместно водопровод стоит лишь 100 млн €.
Статус-кво: каждый город платит свои индивидуальные затраты $d = 80$, $d = 60$ (без соглашения). Экономия от сотрудничества: 40 млн €.
Как игра распределения экономии: $v(\{\}) = 0$, $v(\{\}) = 0$, $v(\{,\}) = 80 + 60 - 100 = 40$.

8.1. Значение Шепли экономии

Для $n = 2$ имеется $2! = 2$ перестановки:

Порядок	Предел. А	Предел. Б
А, Б	$v(\{\}) = 0$	$v(\{,\}) - v(\{\}) = 40$
Б, А	$v(\{,\}) - v(\{\}) = 40$	$v(\{\}) = 0$
Шепли ($\div 2$)	$\phi = 20$	$\phi = 20$

Каждый город получает равную экономию в 20 млн €.
Вклад в затраты: А платит $80 - 20 = \mathbf{60}$ млн €, Б платит $60 - 20 = \mathbf{40}$ млн €.

8.2. Решение Нэша

Статус-кво: $d = 0$, $d = 0$ (без экономии при отсутствии сотрудничества). Общая экономия $V = 40$.

$$x^* = \frac{40 + 0 - 0}{2} = \mathbf{20}, \qquad x^* = \frac{40 + 0 - 0}{2} = \mathbf{20}$$

При симметричном статус-кво значение Шепли и решение Нэша совпадают: оба города делят экономию поровну.

9. Описание инструмента: Теория игр Модуль 4

Кооперативная теория игр – Интерактивный инструмент

Инструмент вычисляет значение Шепли, условия ядра и решение Нэша для кооперативных игр с 2–5 игроками.

9.1. Ввод данных

- **Количество игроков:** от 2 до 5.
- **Имена игроков:** свободно редактируемые (например, Фирма A, Город 1, Партия X).
- **Ценности коалиций $v(S)$:** для каждой непустой коалиции S ввести значение – что коалиция может достичь самостоятельно.
- **3 примера:** производственная коалиция, голоса, распределение затрат.

9.2. Результаты – 5 шагов

1. **Свойства игры:** проверка супераддитивности, существенности, добавленная ценность сотрудничества.
2. **Значение Шепли:** полная таблица перестановок (для $n \leq 3$), предельные вклады, итоговое распределение с проверкой эффективности.
3. **Анализ ядра:** все условия коалиционной рациональности в таблице; лежит ли значение Шепли в ядре?
4. **Переговоры Нэша (2 игрока):** произведение Нэша, статус-кво, оптимальное распределение. Для $n \geq 3$: Шепли против пропорционального распределения.
5. **Интерпретация:** сильнейший/слабейший игрок, аксиомы, рекомендация по сотрудничеству.

Гистограмма: значения Шепли графически для всех игроков.

10. Итоги

Ключевые положения: Модуль 4 – Кооперативная теория игр

1. **Кооперативная игра:** (N, v) с характеристической функцией $v : 2^N \to \mathbb{R}$; $v(S)$ = ценность коалиции S.
2. **Супераддитивность:** $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ – сотрудничество всегда выгодно.
3. **Значение Шепли:** каждый игрок получает средний предельный вклад по всем $n!$ перестановкам. Однозначно определено 4 аксиомами (эффективность, симметрия, пустой игрок, аддитивность).
4. **Ядро:** множество всех стабильных дележей – ни одна коалиция не может выиграть отделением. Для выпуклых игр: ядро всегда непусто, значение Шепли в ядре.
5. **Решение Нэша (2 игрока):** максимизирует произведение Нэша $(x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$; делит излишек поровну.
6. **Индекс власти Шепли:** измеряет политическую власть в играх голосования – может отличаться от номинальной доли голосов.
7. **Игры распределения затрат:** характеристическая функция = экономия; значение Шепли даёт справедливое, стабильное распределение затрат.
