Теория игр

Модуль 3: Игры с ненулевой суммой

Равновесие Нэша, эффективность по Парето и социальные дилеммы

Русский

Вольфганг Бёме

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

Полное введение с выводом матриц выигрышей, пошаговым анализом и тремя разобранными примерами

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Что такое игра с ненулевой суммой? 2

2 Основные понятия 3

3 Пример 1: Дилемма заключённого 3
3.1 Игровая ситуация . . . 3
3.2 Вывод матрицы выигрышей . . . 3
3.3 Матрица выигрышей . . . 4
3.4 Шаг 1: Лучшие ответы . . . 4
3.5 Шаг 2: Равновесие Нэша . . . 5
3.6 Шаг 3: Анализ по Парето . . . 5

4 Пример 2: Игра координации — Технологический стандарт 5
4.1 Игровая ситуация . . . 5
4.2 Матрица выигрышей . . . 6
4.3 Анализ . . . 6

5 Пример 3: Ценовые переговоры 7
5.1 Матрица выигрышей . . . 7

6 Теория: Пространство выигрышей и граница Парето 7

7 Описание инструмента: Теория игр — Модуль 3 8
7.1 Ввод данных . . . 8
7.2 Результаты — 5 шагов . . . 8

8 Итоги 9

1. Что такое игра с ненулевой суммой?

В **игре с ненулевой суммой** выигрыши обоих игроков взаимозависимы, но выигрыш одного *не обязательно* означает проигрыш другого. Оба могут одновременно выиграть, оба могут проиграть, или один может выиграть больше, чем потерял другой.

Определение: Игра с ненулевой суммой

Двухлицевая игра называется **игрой с ненулевой суммой**, если хотя бы для одной комбинации стратегий выполняется:

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) \neq 0$$

Общий выигрыш варьируется в зависимости от комбинации стратегий. Оба игрока могут одновременно выигрывать или проигрывать.

Сравнение с играми с нулевой суммой

	Нулевая сумма	**Ненулевая сумма**
Сумма	всегда 0	варьируется
Интересы	полностью противоположны	частично противоположны,
Сотрудничество	невозможно	возможно и часто выгодно
Примеры	шахматы, покер	торговля, переговоры, эколо

Ключевые вопросы в играх с ненулевой суммой:

- Где находится **равновесие Нэша** — и насколько оно устойчиво?
- Является ли равновесие Нэша **эффективным по Парето**, или существуют лучшие исходы для обоих?
- Существует ли **социальная дилемма** — индивидуальная рациональность ведёт к коллективно плохому исходу?
- Есть ли **проблема координации** — несколько равновесий, и как игроки координируются?

2. Основные понятия

Определение: Доминирование по Парето и эффективность по Парето

Исход (s_1, s_2) **доминирует по Парето** исход (s_1', s_2'), если:

$$u_1(s_1, s_2) \geq u_1(s_1', s_2') \quad \text{и} \quad u_2(s_1, s_2) \geq u_2(s_1', s_2')$$

причём хотя бы одно неравенство строгое.
Исход является **эффективным по Парето** (оптимальным по Парето), если он не доминируется по Парето никаким другим исходом: ни один игрок не может улучшить своё положение, не ухудшив положение другого.

Определение: Социальная дилемма

Социальная дилемма возникает, когда равновесие Нэша *не является* эффективным по Парето: индивидуальная рациональность приводит к коллективно субоптимальному результату.

3. Пример 1: Дилемма заключённого

3.1. Игровая ситуация

Сценарий: Два подозреваемых

Два подозреваемых допрашиваются раздельно. Каждый принимает решение, не зная о выборе другого:

- **Молчать** (сотрудничать): не давать показания против другого
- **Признаться** (предать): дать показания против другого

3.2. Вывод матрицы выигрышей

Выигрыши — годы заключения (отрицательное = наказание, 0 = освобождение):

Комбинация	Что происходит?	Выигрыш (А, Б)
Молчать – **Молчать**	Нет признания. Мало улик. Оба получают небольшое наказание.	$(-1,\ -1)$
Молчать – **Признаться**	Б признаётся, А молчит. Б освобождается (свидетель обвинения), А получает максимальный срок.	$(-10,\ 0)$
Признаться – **Молчать**	А признаётся, Б молчит. А освобождается, Б получает максимальный срок.	$(0,\ -10)$
Признаться – **Признаться**	Оба признаются. Взаимные показания — оба получают средний срок.	$(-6,\ -6)$

3.3. Матрица выигрышей

Подозреваемый А \ **Подозреваемый Б**	**Молчать**	**Признаться**
Молчать	$(-1,\ -1)$	$(-10,\ 0)$
Признаться	$(0,\ -10)$	$(-6,\ -6)$ ★ Равн. Нэша

3.4. Шаг 1: Лучшие ответы

Лучшие ответы подозреваемого А:

	Б молчит	**Б признаётся**	Лучший ответ А
А молчит	-1	-10	
А признаётся	**0**	**-6**	**Признаться** (всегда лучше!)

Независимо от действий Б: $0 > -1$ (если Б молчит) и $-6 > -10$ (если Б признаётся). $\Rightarrow$ **Признание — строго доминирующая стратегия для А.**

То же самое симметрично справедливо для Б. $\Rightarrow$ **Признание — строго доминирующая стратегия для Б.**

3.5. Шаг 2: Равновесие Нэша

Поскольку признание доминирует для обоих, единственное равновесие Нэша:

$$\text{Равн. Нэша:} \quad (\text{Признаться},\ \text{Признаться}) = (-6,\ -6)$$

Проверка: Может ли А улучшить положение, если Б признаётся? А молчит: $-10 < -6$. Нет. ✓

3.6. Шаг 3: Анализ по Парето

Равновесие Нэша $(-6, -6)$ доминируется по Парето исходом $(-1, -1)$:

$$-1 > -6 \quad \text{(А лучше)} \quad \text{и} \quad -1 > -6 \quad \text{(Б лучше)}$$

Дилемма: Равновесие Нэша *не является* эффективным по Парето. Оба были бы лучше при (Молчать, Молчать) = $(-1, -1)$ — но каждый имеет стимул тайно признаться и предать другого. Без доверия оба попадают в худший исход.

Возможные решения:

- *Повторяющиеся игры:* В долгосрочных отношениях возникают сотрудничество и доверие («Ты — мне, я — тебе»).
- *Обязывающий договор:* Контракт со штрафом за предательство.
- *Внешняя инстанция:* Совместный адвокат, профсоюз, регулятор.

4. Пример 2: Игра координации — Технологический стандарт

4.1. Игровая ситуация

Сценарий: Две фирмы выбирают отраслевой стандарт

Фирмы X и Y выводят на рынок новые устройства. Каждая должна выбрать технический стандарт: **Стандарт А** или **Стандарт В**. Продукты разных стандартов *несовместимы* — покупатели приобретают их только если обе фирмы поддерживают один стандарт.

4.2. Матрица выигрышей

Фирма X \ **Фирма Y**	**Стандарт A**	**Стандарт B**
Стандарт A	$(4,\ 4)$ ★ Равн. Нэша 1	$(0,\ 0)$
Стандарт B	$(0,\ 0)$	$(3,\ 3)$ ★ Равн. Нэша 2

Вывод ячеек:

- (A, A) = (4, 4): Полная совместимость. Большой рынок. Стандарт A новее — выигрыш выше.
- (A, B) = (0, 0): Несовместимость. Покупатели не покупают. Оба теряют всё.
- (B, B) = (3, 3): Совместимость. Стандарт B старше — рынок немного меньше.

4.3. Анализ

Два равновесия Нэша: (A, A) = $(4, 4)$ и (B, B) = $(3, 3)$ — оба устойчивы. Оба являются эффективными по Парето, но (A,A) лучше для обоих.

Проблема координации: Оба равновесия устойчивы, но одно лучше. Без общения оба могут оказаться в $(0, 0)$ — худшем исходе.

Возможные решения:

- *Коммуникация:* Прямое соглашение — «Берём Стандарт A».
- *Фокальная точка:* Более новый Стандарт A более «естественен» (точка Шеллинга).
- *Отраслевая норма:* Ассоциация производителей устанавливает Стандарт A.
- *Первый ход:* Публичное объявление о Стандарте A вынуждает другого координироваться.

5. Пример 3: Ценовые переговоры

5.1. Матрица выигрышей

Покупатель \ Продавец	Высокая цена	Средняя цена	Отказ от про
Принять высокую цену	(3, 5)	(2, 3)	(0, 0)
Средняя цена	(4, 2) ★ Равн. 1	(3, 3) ★ Равн. 2	(0, 0)
Отказ от покупки	(0, 0)	(0, 0)	(1, 1) ★ Рав

Вывод ключевых ячеек:

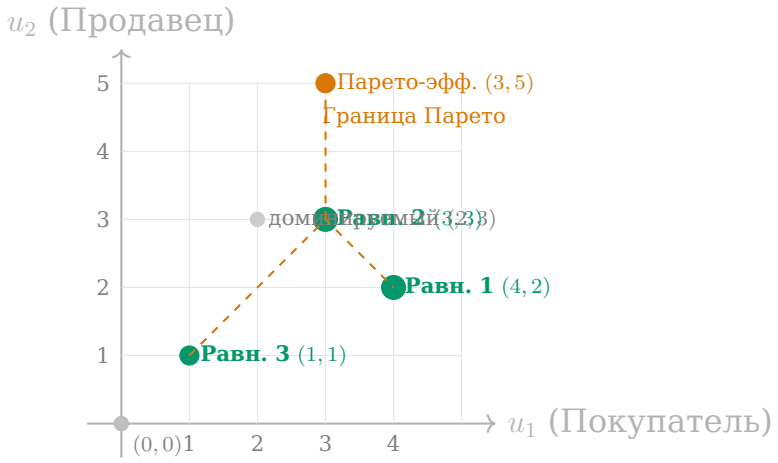
- **(Высокая, Высокая) = (3, 5):** Сделка по высокой цене. Продавец получает больше, покупатель меньше.
- **(Средняя, Средняя) = (3, 3):** Справедливая средняя цена. Равномерное распределение торговой прибыли.
- **(Отказ, Отказ) = (1, 1):** Сделки нет. Небольшой альтернативный выигрыш для обоих.

Три равновесия Нэша: (Средняя, Высокая) = $(4, 2)$, (Средняя, Средняя) = $(3, 3)$, (Отказ, Отказ) = $(1, 1)$. Равновесие $(1, 1)$ Парето-эффективно, но торговля выгоднее обоим.

6. Теория: Пространство выигрышей и граница Парето

Определение: Пространство выигрышей

Пространство выигрышей отображает все возможные исходы (u_1, u_2) в системе координат. Оси измеряют выигрыши обоих игроков.



Граница Парето (штриховая линия) соединяет все Парето-эффективные точки. Точки ниже границы доминируются — всегда существует лучший исход для обоих.

7. Описание инструмента: Теория игр — Модуль 3

Инструмент: Игры с ненулевой суммой

Инструмент вычисляет равновесия Нэша, эффективность по Парето и классифицирует игру.

7.1. Ввод данных

- Каждая ячейка: **(Выигрыш И1, Выигрыш И2)** — оба выигрыша.
- Строки = стратегии Игрока 1, Столбцы = стратегии Игрока 2.
- Формат CSV: `a,b` на ячейку.

7.2. Результаты — 5 шагов

1. **Лучшие ответы:** Для каждой стратегии противника — оптимальный контрответ с конкретными выигрышами.
2. **Равновесия Нэша:** Все чистые равновесия с проверкой. Предупреждение при нескольких равновесиях (проблема координации).
3. **Эффективность по Парето:** Какие исходы эффективны? Какие доминируются? Автоматическое обнаружение социальных дилемм.

4. **Классификация игры:** Нулевая сумма? Дилемма? Координация?

5. **Интерпретация:** Рекомендации — «Ты — мне, я — тебе», договоры, фокальные точки, стратегия первого хода.

График пространства выигрышей: Все исходы как точки в пространстве (u_1, u_2). Зелёный = равновесие Нэша, Оранжевый = Парето-эффективный, Серый = доминируемый.

8. Итоги

Ключевые положения: Модуль 3 — Игры с ненулевой суммой

1. **Ненулевая сумма:** Оба могут одновременно выигрывать или проигрывать — сотрудничество возможно и часто выгодно.

2. **Равновесие Нэша** может быть единственным, множественным или отсутствовать (в чистых стратегиях).

3. **Эффективность по Парето:** Исход оптимален, если ни один игрок не может улучшить своё положение, не ухудшив положение другого.

4. **Социальная дилемма:** Равновесие Нэша Парето-неэффективно — индивидуальная рациональность вредит коллективу. Решение: договоры, повторные игры, регулирование.

5. **Проблема координации:** Несколько равновесий Нэша — необходимы коммуникация, фокальные точки или нормы.

6. **Дилемма заключённого** — наиболее известная социальная дилемма: признание доминирует, но молчание лучше для обоих.

7. **Пространство выигрышей** визуализирует все исходы и границу Парето в сравнении с равновесиями Нэша.