Теория игр

Модуль 2: Игры с нулевой суммой

Теорема Минимакс, седловая точка и смешанные стратегии

Русский

Вольфганг Бёме

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

Полное введение с выводом матрицы выигрышей,
пошаговым анализом и двумя разобранными примерами

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Что такое игра с нулевой суммой? 2

2 Полный пример 1: Пенальти 2
2.1 Игровая ситуация . . . 2
2.2 Вывод матрицы выигрышей . . . 3
2.3 Матрица выигрышей . . . 3
2.4 Шаг 1: Вычисление Максимин и Минимакс . . . 4
2.5 Шаг 2: Проверка седловой точки . . . 4
2.6 Шаг 3: Вычисление смешанных стратегий . . . 5
2.7 Результаты . . . 6

3 Пример 2: Камень, Ножницы, Бумага 6
3.1 Матрица выигрышей . . . 6
3.2 Максимин и Минимакс . . . 6
3.3 Смешанная стратегия . . . 6

4 Теория: Теорема Минимакс 7

5 Описание инструмента: Теория игр — Модуль 2 7
5.1 Ввод данных . . . 7
5.2 Результаты — 5 шагов . . . 7

6 Итоги 8

1. Что такое игра с нулевой суммой?

В **игре с нулевой суммой** выигрыш одного игрока в точности равен проигрышу другого. Что один выигрывает, другой теряет — сумма выигрышей всегда равна нулю.

Определение: Игра с нулевой суммой

Двухлицевая игра называется **игрой с нулевой суммой**, если для всех комбинаций стратегий выполняется:

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_2 = -u_1$$

Поэтому указывается только выигрыш **Игрока 1**. Игрок 1 *максимизирует*, Игрок 2 *минимизирует* этот выигрыш.

Типичные игры с нулевой суммой

- Спорт: пенальти (нападающий против вратаря), теннисная подача
- Военное дело: атака против обороны
- Покер, шахматы, камень-ножницы-бумага
- Переговоры с фиксированным общим пирогом

2. Полный пример 1: Пенальти

2.1. Игровая ситуация

Сценарий: Нападающий против Вратаря

Нападающий пробивает пенальти. Оба игрока принимают решение **одновременно** — нападающий бьёт, вратарь прыгает в тот же момент.

Стратегии:

- **Нападающий**: удар **Влево** или удар **Вправо**
- **Вратарь**: прыжок **Влево**, **Остаться в центре** или прыжок **Вправо**

Выигрыш: положительное значение = преимущество нападающего, отрицательное = преимущество вратаря.

2.2. Вывод матрицы выигрышей

Оцениваем вероятность гола (%) для каждой комбинации и переводим в значения выигрыша:

Комбинация	Что происходит?	Значение
Влево – **Влево**	Вратарь прыгает правильно. Сложно для нападающего, но вратарь на правильной стороне — 40% шанс гола.	$+3$
Влево – **Центр**	Вратарь остаётся. Мяч проходит мимо, но вратарь может отреагировать. Умеренный шанс — 20%.	-1
Влево – **Вправо**	Вратарь прыгает не туда. Нападающий почти наверняка забьёт — 75% шанс гола.	$+2$
Вправо – **Влево**	Вратарь прыгает не туда. Нападающий имеет 80% шанс.	-2
Вправо – **Центр**	Вратарь остаётся. Мяч проходит мимо — 70% шанс.	$+4$
Вправо – **Вправо**	Вратарь прыгает правильно — 55% шанс для нападающего.	$+1$

Почему отрицательные значения? Значение -2 при (Вправо, Влево) означает: вратарь прыгнул не туда — но это хорошо для *вратаря* (он переиграл нападающего). Поскольку мы измеряем с точки зрения нападающего: отрицательное значение = плохой исход для нападающего.
В игре с нулевой суммой -2 для нападающего одновременно означает $+2$ для вратаря.

2.3. Матрица выигрышей

Нападающий \ **Вратарь**	**Прыжок влево**	**Центр**	**Прыжок вправо**
Удар влево	$+3$	-1	$+2$
Удар вправо	-2	$+4$	$+1$

Как читать матрицу:

- Каждое число = выигрыш **Нападающего**
- **Вратарь** получает *отрицательное* значение (нулевая сумма: $+3$ для нападающего = -3 для вратаря)
- **Нападающий** выбирает строку и хочет *максимизировать*
- **Вратарь** выбирает столбец и хочет *минимизировать*

2.4. Шаг 1: Вычисление Максимин и Минимакс

Стратегия нападающего — Максимин:
Нападающий думает: «Каков *минимальный* выигрыш при этой стратегии?» Он выбирает стратегию с *наибольшим* минимумом.

Нападающий	Влево	Центр	Вправо	Мин. строки
Удар влево	$+3$	-1	$+2$	$\mathbf{-1}$
Удар вправо	-2	$+4$	$+1$	$\mathbf{-2}$

Максимин $= \max(-1,\ -2) = \mathbf{-1}$
$\Rightarrow$ Удар влево гарантирует нападающему не менее -1.

Стратегия вратаря — Минимакс:
Вратарь думает: «Каков *максимальный* выигрыш нападающего при этом столбце?» Он выбирает столбец с *наименьшим* максимумом.

	Прыжок влево	Центр	Прыжок вправо
Удар влево	$+3$	-1	$+2$
Удар вправо	-2	$+4$	$+1$
Макс. столбца	$\mathbf{+3}$	$\mathbf{+4}$	$\mathbf{+2}$

Минимакс $= \min(+3,\ +4,\ +2) = \mathbf{+2}$
$\Rightarrow$ Прыжок вправо ограничивает максимальный ущерб до $+2$.

2.5. Шаг 2: Проверка седловой точки

Определение: Седловая точка

Ячейка (i^*, j^*) называется **седловой точкой**, если:

$$a_{i^*j^*} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

То есть: Максимин = Минимакс. Ячейка является одновременно

минимумом строки и максимумом столбца.

В примере с пенальти: Максимин $= -1$, Минимакс $= +2$.

$-1 \neq +2 \Rightarrow$ **Седловой точки нет!**

Игра не имеет равновесия в чистых стратегиях. Если бы нападающий всегда бил влево, вратарь всегда прыгал бы влево. Тогда нападающий бил бы вправо — и так далее.

$\Rightarrow$ Оба должны играть **смешанные стратегии**.

2.6. Шаг 3: Вычисление смешанных стратегий

Оптимальная смешанная стратегия

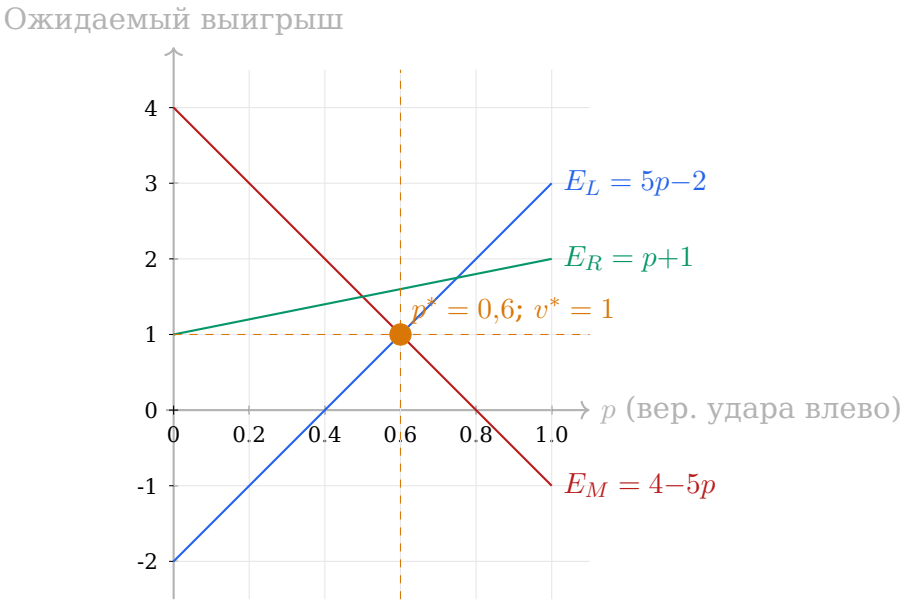
Игрок 1 смешивает первую строку с вероятностью p и вторую с вероятностью $(1-p)$. Оптимальное значение p делает Игрока 2 **безразличным** между его стратегиями.

Ожидаемый выигрыш как функция p (вероятность удара влево):

$$\begin{aligned} \text{ОВ против прыжка влево:} &\quad E_L(p) = 3p + (-2)(1-p) = 5p - 2 \\ \text{ОВ против центра:} &\quad E_M(p) = (-1)p + 4(1-p) = 4 - 5p \\ \text{ОВ против прыжка вправо:} &\quad E_R(p) = 2p + 1 \cdot (1-p) = p + 1 \end{aligned}$$

Оптимум: $E_L(p) = E_M(p)$:

$$5p - 2 = 4 - 5p \quad \Rightarrow \quad 10p = 6 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p^* = 0{,}6}$$



2.7. Результаты

Оптимальные смешанные стратегии	
Нападающий:	Удар влево с $p^* = 0{,}6$, удар вправо с $0{,}4$
Вратарь:	Прыжок влево с $q^* = 0{,}6$, центр с $0{,}4$, никогда вправо
Ценность игры:	$v^* = E_L(0{,}6) = 5 \cdot 0{,}6 - 2 = \mathbf{+1}$

Интерпретация: В равновесии нападающий получает ожидаемый выигрыш $+1$ — небольшое преимущество. Ни один игрок не может улучшить своё положение, отклонившись от смешанной стратегии.

3. Пример 2: Камень, Ножницы, Бумага

3.1. Матрица выигрышей

А \ Б	**Ножницы**	**Камень**	**Бумага**
Ножницы	0	-1	$+1$
Камень	$+1$	0	-1
Бумага	-1	$+1$	0

Вывод: Ножницы против Ножниц = ничья (0). Ножницы против Камня = Ножницы проигрывают (-1 для А). Ножницы против Бумаги = Ножницы выигрывают ($+1$). И т.д.

3.2. Максимин и Минимакс

Минимумы строк: Ножницы $= -1$, Камень $= -1$, Бумага $= -1$. Максимин $= -1$.

Максимумы столбцов: Ножницы $= 1$, Камень $= 1$, Бумага $= 1$. Минимакс $= 1$.

$-1 \neq 1 \Rightarrow$ **Нет седловой точки.**

3.3. Смешанная стратегия

По симметрии: все три стратегии равновероятны, $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$.

Ценность игры: $v^* = 0$ (честная игра — симметричная игра с нулевой суммой).

4. Теория: Теорема Минимакс

Теорема Минимакс – фон Нейман 1928

Каждая конечная двухлицевая игра с нулевой суммой имеет **ценность игры** v^* в смешанных стратегиях:

$$v^* = \max_p \min_q \sum_{i,j} p_i \cdot a_{ij} \cdot q_j = \min_q \max_p \sum_{i,j} p_i \cdot a_{ij} \cdot q_j$$

Оба игрока имеют оптимальные смешанные стратегии p^* и q^* с $\sum p_i = \sum q_j = 1$, $p_i, q_j \geq 0$.

Интуиция: Игрок 1 максимизирует гарантированный минимальный выигрыш (Максимин). Игрок 2 минимизирует максимальный ущерб (Минимакс). Теорема утверждает: эти два значения совпадают.

5. Описание инструмента: Теория игр — Модуль 2

Инструмент: Игры с нулевой суммой

Инструмент вычисляет Максимин, Минимакс, седловую точку и смешанные стратегии для игр с нулевой суммой.

5.1. Ввод данных

В матрице указывается только выигрыш **Игрока 1** (максимизатор строк). Заголовок поясняет:

- **Строки (↓)** = стратегии Игрока 1 (выбирает строку, максимизирует)
- **Столбцы (→)** = стратегии Игрока 2 (выбирает столбец, минимизирует)
- Положительное число = хорошо для Игрока 1; отрицательное = хорошо для Игрока 2

5.2. Результаты — 5 шагов

1. **Максимин и Минимакс:** минимумы строк и максимумы столбцов с таблицами; какая строка/столбец оптимальны?

2. **Седловая точка:** Максимин = Минимакс? Если да — чистое равновесие. Если нет — нужны смешанные стратегии.
3. **Редукция по доминированию:** исключение доминируемых стратегий.
4. **Смешанные стратегии:** аналитическое решение для 2×2; интерактивный обзор с ползунком.
5. **Ценность игры и интерпретация:** кто имеет преимущество? Теорема Минимакс.

Интерактивный обзор (только 2×2): Ползунок показывает, как меняется ожидаемая ценность игры с p. В точке оптимума p^* две линии ОВ пересекаются.

6. Итоги

Ключевые положения: Модуль 2 – Игры с нулевой суммой

1. В **игре с нулевой суммой** один выигрывает ровно то, что теряет другой. Указывается только выигрыш И1.
2. **И1 максимизирует** (строки), **И2 минимизирует** (столбцы).
3. **Максимин** (И1): наибольший минимум строки — гарантированный минимальный выигрыш.
4. **Минимакс** (И2): наименьший максимум столбца — ограниченный ущерб.
5. **Седловая точка:** Максимин = Минимакс $\Rightarrow$ равновесие в чистых стратегиях.
6. **Нет седловой точки:** нужны смешанные стратегии.
7. Оптимальная смешанная стратегия делает противника *безразличным* — он не может улучшить положение никаким выбором стратегии.
8. **Ценность игры** v^*: гарантированный ОВ в равновесии. Теорема Минимакс (фон Нейман): $\max\min = \min\max = v^*$.