Теория игр

Модуль 1: Основы

Стратегические игры, доминирование и равновесие Нэша

Русский

Вольфганг Бёме

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

Полное введение с разобранным практическим примером и описанием инструмента

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Что такое теория игр? 2

2 Основные понятия 2
2.1 Матрица выигрышей — пошаговое объяснение 2

3 Полный пример: Ценовая война двух фирм 3
3.1 Исходная ситуация 3
3.2 Вывод всех девяти ячеек 4
3.3 Упрощённая матрица выигрышей 4
3.4 Шаг 1: Лучшие ответы 5
3.5 Шаг 2: Строгое доминирование 5
3.6 Шаг 3: Итерированное исключение (ИЕДС) 6
3.7 Шаг 4: Равновесие Нэша 7
3.8 Дилемма: что было бы лучше коллективно? 7
3.9 Второй пример: Игра координации (технологический стандарт) 8

4 Описание инструмента: Теория игр — Модуль 1 8
4.1 Ввод собственной матрицы 8
4.2 Результаты — 5 шагов 8

5 Итоги 9

1. Что такое теория игр?

Теория игр анализирует ситуации, в которых несколько **рациональных участников** (игроков) принимают решения, взаимно влияющие друг на друга. В отличие от классических задач оптимизации, результат зависит не только от собственного решения, но и от решений других игроков.

Типичные применения

- **Экономика:** ценообразование, выход на рынок, аукционы, переговоры
- **Политика:** гонка вооружений, международные соглашения
- **Биология:** эволюционные стратегии в животном мире
- **Информатика:** проектирование протоколов, агенты ИИ, сети

2. Основные понятия

Определение: Стратегическая игра (нормальная форма)

Стратегическая игра в нормальной форме состоит из:

- множества **игроков** $\{1, 2, \ldots, n\}$
- для каждого игрока i множества **стратегий** S_i
- для каждого игрока i **функции выигрыша** $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$

Все игроки выбирают стратегию **одновременно и независимо**.

2.1. Матрица выигрышей — пошаговое объяснение

В игре двух игроков все выигрыши представляются в виде **матрицы**:

- **Строки** = стратегии **Игрока 1**
- **Столбцы** = стратегии **Игрока 2**
- Каждая ячейка показывает **(Выигрыш И1, Выигрыш И2)** для данной комбинации стратегий

Пример: Как читать ячейку

И1 \ И2	Низкая цена	Высокая цена
Низкая цена	(2, 2)	(6, 1)
Высокая цена	(1, 6)	(4, 4)

Как читать ячейку (Низкая цена, Высокая цена) = (6, 1)?

- Игрок 1 выбирает **Низкую цену** → зарабатывает **6** млн евро
- Игрок 2 выбирает **Высокую цену** → зарабатывает только **1** млн евро
- Игрок 1 завоевал долю рынка благодаря низкой цене; Игрок 2 теряет клиентов в пользу Игрока 1.

3. Полный пример: Ценовая война двух фирм

3.1. Исходная ситуация

Сценарий: Фирмы Альфа и Бета

Две фирмы продают одинаковый товар. Каждая фирма независимо устанавливает одну из трёх цен: **Высокая (120 €)**, **Средняя (90 €)** или **Низкая (60 €)**.

Механизм рынка:

- Кто **дешевле**, получает большую долю рынка (около 70%).
- При **равной цене** оба делят рынок поровну (по 50%).
- Объём рынка: 100 единиц. Себестоимость: 50 € за единицу.

Пример расчёта прибыли:
Альфа: Высокая (120 €), Бета: Низкая (60 €):

- Бета дешевле → Бета получает 70 единиц, Альфа 30.
- Альфа: $30 \times (120-50) = 2100$ €; Бета: $70 \times (60-50) = 700$ €

Несмотря на низкую цену, у Беты меньше прибыли — одной низкой цены недостаточно!

3.2. Вывод всех девяти ячеек

Формула: Прибыль = количество × (цена − себестоимость)

Комбинация	**Расчёт**	**Результат**
Альфа Высокая (120€) / Бета Высокая (120€)	Равная цена → по 50 ед. Альфа: $50 \times 70 = 3500$ € Бета: $50 \times 70 = 3500$ €	$\approx (\mathbf{4}, \mathbf{4})$
Альфа Высокая / Бета Средняя (90€)	Бета дешевле → Бета 70, Альфа 30 Альфа: $30 \times 70 = 2100$ € Бета: $70 \times 40 = 2800$ €	$\approx (\mathbf{2}, \mathbf{3})$
Альфа Высокая / Бета Низкая (60€)	Бета дешевле → Бета 70, Альфа 30 Альфа: 2100 €; Бета: $70 \times 10 = 700$ €	$\approx (\mathbf{2}, \mathbf{1})$
Альфа Средняя (90€) / Бета Высокая	Альфа дешевле → Альфа 70, Бета 30 Альфа: $70 \times 40 = 2800$ €; Бета: 2100 €	$\approx (\mathbf{3}, \mathbf{2})$
Альфа Средняя / Бета Средняя	Равная цена → по 50 ед. Оба: $50 \times 40 = 2000$ €	$\approx (\mathbf{2}, \mathbf{2})$
Альфа Низкая (60€) / Бета Высокая	Альфа дешевле → Альфа 70, Бета 30 Альфа: $70 \times 10 = 700$ €; Бета: 2100 €	$\approx (\mathbf{1}, \mathbf{2})$
Альфа Низкая / Бета Низкая	Равная цена → по 50 ед. Оба: $50 \times 10 = 500$ €	$\approx (\mathbf{1}, \mathbf{1})$

Нормировка 1–6: Реальные прибыли (500–3500 €) нормированы на шкалу 1–6. Относительные соотношения (кто зарабатывает больше) сохраняются. В теории игр важна лишь ранговая упорядоченность выигрышей.

3.3. Упрощённая матрица выигрышей

Альфа \ Бета	Высокая (120 €)	Средняя (90 €)	Низкая (60 €)
Высокая (120 €)	(**4**, **4**)	(**2**, **5**)	(**1**, **6**)
Средняя (90 €)	(**5**, **2**)	(**3**, **3**)	(**1**, **4**)
Низкая (60 €)	(**6**, **1**)	(**4**, **1**)	(**2**, **2**)

Ячейка (Альфа Средняя, Бета Высокая) = (5, 2): Альфа с 90 € дешевле Беты с 120 € → Альфа получает 70 ед. × 40 € = 2800 € → **5**; Бета получает 30 ед. × 70 € = 2100 € → **2**.

3.4. Шаг 1: Лучшие ответы

Лучшие ответы Альфы:

Выбор Беты	Низкая	Средняя	Высокая	Лучший ответ Альфы
Бета Высокая	**6**	**5**	**4**	Низкая цена
Бета Средняя	**4**	**3**	**2**	Низкая цена
Бета Низкая	**2**	**1**	**1**	Низкая цена

При любом выборе Беты Альфа всегда зарабатывает больше при **Низкой цене**. ⇒ Низкая цена — **доминирующая стратегия** Альфы. То же справедливо симметрично для Беты.

3.5. Шаг 2: Строгое доминирование

Определение: Строго доминирующая стратегия

Стратегия s_i **строго доминирует** стратегию s_i', если:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}) \quad \text{для всех } s_{-i}$$

То есть s_i *всегда* даёт больший выигрыш, независимо от других.

Таблица доминирования для Альфы:

Выбор Беты	Выигрыш Альфы при стратегии …			Низкая лучше?
	Низкая	Средняя	Высокая	
Бета выбирает Высокую	**6**	**5**	**4**	$6 > 5 > 4$ ✓
Бета выбирает Среднюю	**4**	**3**	**2**	$4 > 3 > 2$ ✓
Бета выбирает Низкую	**2**	**1**	**1**	$2 > 1 = 1$ ✓

Как читать таблицу: Каждая строка — возможный выбор Беты. Столбцы — выигрыш Альфы при каждой её стратегии. Низкая цена (левый столбец) даёт наибольшее значение в каждой строке → строго доминирует Среднюю и Высокую.

Пример строки 1: Бета выбирает Высокую.

- Альфа Низкая (60€): дешевле, 70 ед. → выигрыш = 6
- Альфа Средняя (90€): дешевле, 70 ед. → выигрыш = 5
- Альфа Высокая (120€): равная цена, 50 ед. → выигрыш = 4

Низкая лучше: $6 > 5 > 4$. ✓

Та же аналитика симметрично для Беты: **у обеих фирм есть доминирующая стратегия.**

3.6. Шаг 3: Итерированное исключение (ИЕДС)

Итерированное исключение доминируемых стратегий (ИЕДС)

Шаг за шагом исключаем все доминируемые стратегии. После каждого раунда могут появиться новые (игрок знает, чего другой *не* будет играть).

Раунд 1: Высокая цена доминируется Средней для Альфы → исключить строку «Высокая».

Альфа \ Бета	Высокая	Средняя	Низкая
Высокая	**(4,4)**	**(2,5)**	**(1,6)**
Средняя	(5,2)	(3,3)	(1,4)
Низкая	(6,1)	(4,1)	(2,2)

Раунд 2: После исключения Альфа-Высокая, Высокая цена Беты доминируется → исключить столбец «Высокая».

Раунд 3–4: Аналогично исключаются Средняя Альфы и Средняя Беты.

Результат после ИЕДС:

Альфа \ Бета	Низкая
Низкая	**(2, 2)**

Единственное решение: **обе выбирают Низкую цену.**

3.7. Шаг 4: Равновесие Нэша

Определение: Равновесие Нэша

Профиль стратегий $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ является **равновесием Нэша**, если ни один игрок не может увеличить выигрыш односторонним отклонением:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \text{для всех } s_i \in S_i$$

Проверка: (Низкая, Низкая) = (2, 2)

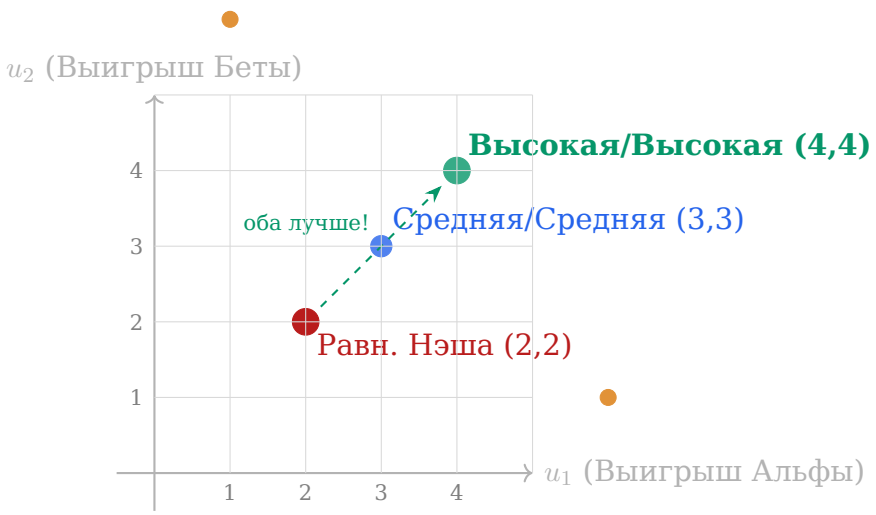
- Альфа отклоняется → Средняя: $1 < 2$; Высокая: $1 < 2$. Нет. ✓
- Бета отклоняется → Средняя: $1 < 2$; Высокая: $1 < 2$. Нет. ✓

⇒ **(Низкая, Низкая)** — **единственное равновесие Нэша**.

3.8. Дилемма: что было бы лучше коллективно?

Дилемма заключённого ценовой войны

Равновесие Нэша (Низкая, Низкая) = (2, 2) является **Парето-неэффективным**: если бы обе выбрали Высокую цену, обе получили бы (4, 4) — вдвое больше!
Почему этого не происходит? Каждая фирма имеет индивидуальный стимул перейти к Низкой цене. Без обязывающего соглашения обе оказываются в худшем равновесии.



3.9. Второй пример: Игра координации (технологический стандарт)

Фирмы X и Y выбирают технический стандарт

Продукты совместимы только при одинаковом стандарте.

X \ Y	Стандарт A	Стандарт B
Стандарт A	**(3, 3)**	(0, 0)
Стандарт B	(0, 0)	**(2, 2)**

Два равновесия Нэша! ⇒ **Проблема координации**: без общения обе могут оказаться в (0, 0).

4. Описание инструмента: Теория игр — Модуль 1

Инструмент: Теория игр Модуль 1 — Основы

Инструмент вычисляет лучшие ответы, доминирующие стратегии, ИЕДС и равновесия Нэша для произвольных игр двух игроков.

4.1. Ввод собственной матрицы

1. **Выбрать размер:** количество стратегий И1 (строки) и И2 (столбцы) — по 2–6.
2. **Имена игроков:** редактируются в верхней части заголовка матрицы.
3. **Названия стратегий:** редактируются непосредственно в строках и столбцах.
4. **Выигрыши:** в каждой ячейке два числа: левое = выигрыш И1, правое = выигрыш И2.
5. **Нулевая сумма:** если активировано, одно число на ячейку.

4.2. Результаты — 5 шагов

1. **Лучшие ответы:** для каждой стратегии противника — оптимальный контрответ.

2. **Строгое доминирование:** с полным доказательством (все неравенства).
3. **ИЕДС:** раунд за раундом, с оставшейся матрицей.
4. **Равновесия Нэша:** все чистые равновесия с проверкой.
5. **Классификация игры:** нулевая сумма? Дилемма? Координация?

5. Итоги

Ключевые положения: Модуль 1

1. **Матрица выигрышей** показывает выигрыш каждого игрока при каждой комбинации стратегий.
2. **Лучший ответ** — стратегия, максимизирующая выигрыш при заданной стратегии противника.
3. **Строго доминирующая стратегия** всегда лучше альтернативы — независимо от противника.
4. **ИЕДС** последовательно исключает доминируемые стратегии и может дать единственное решение.
5. **Равновесие Нэша** — профиль стратегий, от которого ни один игрок не хочет отклоняться.
6. Равновесие Нэша может быть **Парето-неэффективным** (дилемма заключённого).
7. Может существовать **несколько равновесий Нэша** (игры координации).