Сборник задач

Теория игр – Модули 1–4

Русский

Вольфганг Бёме

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Модуль 1 – Основы теории игр **2**
Задачи 1.1 и 1.2 (Лёгкий) 2
Задачи 1.3 и 1.4 (Средний) 4
Задачи 1.5 и 1.6 (Сложный) 6

2 Модуль 2 – Игры с нулевой суммой **9**
Задачи 2.1 и 2.2 (Лёгкий) 9
Задачи 2.3 и 2.4 (Средний) 11
Задачи 2.5 и 2.6 (Сложный) 13

3 Модуль 3 – Игры с ненулевой суммой **16**
Задачи 3.1 и 3.2 (Лёгкий) 16
Задачи 3.3 и 3.4 (Средний) 18
Задачи 3.5 и 3.6 (Сложный) 20

4 Модуль 4 – Кооперативная теория игр **23**
Задачи 4.1 и 4.2 (Лёгкий) 23
Задачи 4.3 и 4.4 (Средний) 25
Задачи 4.5 и 4.6 (Сложный) 27

1. Модуль 1 – Основы теории игр

Уровень 1: Лёгкий

Задача 1.1 – Чтение матрицы и лучшие ответы

Задача 1.1

Две фирмы, Альфа и Бета, одновременно решают вопрос о рекламной стратегии: **Интенсивная** или **Минимальная**. Матрица выигрышей показывает прибыль в млн евро (Альфа, Бета):

Альфа \ Бета	Интенсивная	Минимальная
Интенсивная	$(3,\ 3)$	$(5,\ 1)$
Минимальная	$(1,\ 5)$	$(4,\ 4)$

(a) Прочитайте ячейку (Интенсивная, Минимальная): что получает каждая фирма?

(b) Определите лучший ответ Альфы на каждую стратегию Беты.

(c) Определите лучший ответ Беты на каждую стратегию Альфы.

(d) Существует ли равновесие Нэша в чистых стратегиях?

Решение: Задача 1.1

(а) Ячейка (Интенсивная, Минимальная) = (5, 1): Альфа получает 5 млн €, Бета получает 1 млн €.
(б) Лучшие ответы Альфы:

- Если Бета играет Интенсивную: $\max(3, 1) = 3 \Rightarrow$ Альфа выбирает **Интенсивную**
- Если Бета играет Минимальную: $\max(5, 4) = 5 \Rightarrow$ Альфа выбирает **Интенсивную**

Интенсивная – **строго доминирующая** стратегия для Альфы.
(в) Лучшие ответы Беты:

- Если Альфа играет Интенсивную: $\max(3, 1) = 3 \Rightarrow$ Бета выбирает **Интенсивную**
- Если Альфа играет Минимальную: $\max(5, 4) = 5 \Rightarrow$ Бета выбирает **Интенсивную**

Интенсивная – **строго доминирующая** стратегия для Беты.

(г) Равновесие Нэша: (Интенсивная, Интенсивная) = (3, 3). У обоих интенсивная стратегия доминирующая. Проверка: Альфа не может улучшить положение ($3 > 1$) ✓; Бета не может улучшить положение ($3 > 1$) ✓.
Равн. Нэша: (Интенсивная, Интенсивная) = (3, 3).
Замечание: (Минимальная, Минимальная) = (4, 4) было бы лучше для обоих – классическая дилемма заключённого.

Задача 1.2 – Доминирование и ИЕДС

Задача 1.2

Дана следующая матрица выигрышей 3×3 (Игрок А, Игрок Б):

А \ Б	**Лево**	**Центр**	**Право**
Верх	(4, 2)	(3, 3)	(1, 4)
Середина	(2, 4)	(2, 2)	(3, 1)
Низ	(1, 1)	(1, 3)	(2, 2)

(a) Покажите, что **Низ** доминируема для А.

(b) Исключите **Низ** и определите, какая стратегия доминируема для Б.

(c) Выполните ИЕДС полностью.

(d) Каково равновесие Нэша?

Решение: Задача 1.2

(а) **Низ** доминируется **Верхом**:

- Против Лево: $4 > 1$ ✓; против Центр: $3 > 1$ ✓; против Право: $1 = 1$ – не строго.

Низ доминируется **Серединой**: Лево $2 > 1$, Центр $2 > 1$, Право $3 > 2$ ✓ – строго доминируема.
(б) После исключения **Низ**: оставшаяся матрица:

	Лево	**Центр**	**Право**
Верх	(4, 2)	(3, 3)	(1, 4)
Середина	(2, 4)	(2, 2)	(3, 1)

Для Б: **Лево** vs **Право**: $2 < 4$ (против Верха) и $4 > 1$ (против Середины) – нет доминирования. **Право** доминируется: против Верха $4 > 1$, против Середины $4 > 1$.

Точная проверка: **Центр** vs **Право**: Верх $3 > 1$, Середина $2 > 1 \Rightarrow$ **Центр** строго доминирует **Право**!
(в) ИЕДС: Раунд 1: **Низ** (доминируется **Серединой**) $\rightarrow$ исключить. Раунд 2: **Право** (доминируется **Центром**) $\rightarrow$ исключить. Раунд 3: Оставшаяся 2×2:

	Лево	**Центр**
Верх	$(4, 2)$	$(3, 3)$
Середина	$(2, 4)$	$(2, 2)$

Раунд 3: **Верх** доминирует **Середину**: $4 > 2$, $3 > 2$ ✓. Раунд 4: **Центр** доминирует **Лево**: $3 > 2$ ✓.
(г) Решение ИЕДС и равн. Нэша: **(Верх, Центр) = (3, 3).**

Уровень 2: Средний

Задача 1.3 – Поиск равновесий Нэша

Задача 1.3

Два оператора мобильной связи (X, Y) решают вопрос об инвестициях в развитие сети: **Высокие**, **Средние** или **Низкие**.

X \ Y	**Высокие**	**Средние**	**Низкие**
Высокие	$(2,\ 2)$	$(4,\ 1)$	$(6,\ 0)$
Средние	$(1,\ 4)$	$(3,\ 3)$	$(5,\ 1)$
Низкие	$(0,\ 6)$	$(1,\ 5)$	$(4,\ 4)$

(a) Определите все равновесия Нэша.

(b) Является ли это проблемой координации, дилеммой заключённого или ни тем, ни другим?

(c) Определите все Парето-эффективные исходы.

(d) Какой исход вы порекомендуете кооперативно настроенным игрокам?

Решение: Задача 1.3

(а) Лучшие ответы:
X: против Высоких: $\max(2, 1, 0) = 2 \rightarrow$ Высокие. Против Средних: $\max(4, 3, 1) = 4 \rightarrow$ Высокие. Против Низких: $\max(6, 5, 4) = 6 \rightarrow$ Высокие. $\Rightarrow$ **Высокие** – строго доминирующая стратегия X.

Y: симметрично (матрица симметрична): **Высокие** – строго доминирующая стратегия Y.
Равн. Нэша: (Высокие, Высокие) = (2, 2). Единственное.
(б) Это **дилемма заключённого**: равновесие Нэша (2,2) Парето-неэффективно. (Низкие, Низкие) = (4,4) было бы лучше для обоих.
(в) Парето-эффективные исходы (недоминируемые): $(6,0)$, $(4,1)$, $(3,3)$, $(1,4)$, $(0,6)$, $(5,1)$, $(1,5)$, $(4,4)$. Строго Парето-эффективные: $(4,4)$ доминирует $(2,2)$; $(3,3)$ доминирует $(2,2)$.
(г) Рекомендация: (Низкие, Низкие) = (4,4). Оба выигрывают максимально при взаимном сотрудничестве. Требуется обязывающее соглашение или повторяющаяся игра.

Задача 1.4 – Игра координации с фокальной точкой

Задача 1.4

Две фирмы без общения должны договориться об общем IT-формате: **Формат A**, **Формат B** или **Формат C**. Прибыль возникает только при совпадении выбора.

Фирма 1 \ **Фирма 2**	**Формат A**	**Формат B**	**Формат C**
Формат A	(5, 5)	(0, 0)	(0, 0)
Формат B	(0, 0)	(3, 3)	(0, 0)
Формат C	(0, 0)	(0, 0)	(2, 2)

(a) Определите все равновесия Нэша.

(b) Все ли равновесия Парето-эффективны?

(c) Что такое фокальная точка (точка Шеллинга), и какая из них вероятнее всего будет выбрана?

(d) Как можно решить проблему координации?

Решение: Задача 1.4

(а) Лучшие ответы: если Y выбирает Формат A, лучший ответ X – Формат A (5>0). Аналогично для B и C. Все три диагональные ячейки – равновесия Нэша:

- **(A,A) = (5,5)**, **(B,B) = (3,3)**, **(C,C) = (2,2)**

(б) Все три Парето-эффективны (ни один другой исход не улучшает положение обоих). Однако между собой: (A,A) Парето-доминирует (B,B) и (C,C).

(в) Фокальная точка: равновесие, которое без общения распознаётся как “естественное” – через симметрию, приметность или соглашение. Здесь: **Формат А** с выигрышем (5,5) – фокальная точка, лучшее равновесие для обоих.
(г) Решения:

- Прямое общение: договориться о Формате А
- Отраслевой стандарт: ассоциация устанавливает Формат А
- Первый ход: одна фирма публично объявляет Формат А
- Доминирование на рынке: более крупная фирма задаёт стандарт

Уровень 3: Сложный

Задача 1.5 – Полный анализ с ИЕДС и Нэшем

Задача 1.5

Две сети супермаркетов (А, Б) конкурируют с тремя ценовыми стратегиями каждая.

А \ Б	Высокая	Средняя	Низкая
Высокая	(6, 6)	(2, 8)	(1, 9)
Средняя	(8, 2)	(4, 4)	(2, 7)
Низкая	(9, 1)	(7, 2)	(3, 3)

(a) Полностью покажите, что “Низкая” строго доминирует для обоих игроков (доказательство через неравенства).

(b) Выполните ИЕДС и определите равновесие Нэша.

(c) Вычислите потерю по Парето: сколько суммарно теряют оба игрока относительно Парето-эффективной альтернативы?

(d) Опишите два конкретных решения этой дилеммы.

Решение: Задача 1.5

(а) Доказательство доминирования для А:

Выбор Б	Низкая	Средняя	Высокая	Низкая лучше?
Б играет Высокую	**9**	**8**	**6**	$9 > 8 > 6$ ✓
Б играет Среднюю	**7**	**4**	**2**	$7 > 4 > 2$ ✓
Б играет Низкую	**3**	**2**	**1**	$3 > 2 > 1$ ✓

Низкая строго доминирует Среднюю и Высокую для А. По симметрии то же верно для Б.
(б) ИЕДС: Раунд 1: Высокая и Средняя доминируемы для А $\rightarrow$ исключить. Аналогично для Б. Решение: **(Низкая, Низкая) = (3, 3).**
(в) Потеря по Парето: Равн. Нэша: $(3, 3)$, суммарное благосостояние = 6. Парето-оптимум (Высокая, Высокая) = $(6, 6)$, благосостояние = 12. **Потеря по Парето:** $12 - 6 = 6$ **единиц** – оба теряют по 3 относительно кооперативного решения.
(г) Решения:

1. *Антимонопольное регулирование:* сговор о ценах незаконен, но регулятор может установить минимальные цены или ограничить прозрачность цен.
2. *Репутация и повторение:* в повторяющейся игре стратегия “ты — мне, я — тебе” может обеспечить сотрудничество: играть Высокую; если соперник отклонится, играть Низкую как наказание.

Задача 1.6 – Смешанные стратегии в базовом модуле

Задача 1.6

Работник (Р) ежедневно решает: **Работать** или **Отлынивать**. Работодатель (Н) решает: **Контролировать** или **Не контролировать**.

Р \ Н	**Контролировать**	**Не контролировать**
Работать	$(3,\ 2)$	$(3,\ 4)$
Отлынивать	$(-2,\ 1)$	$(5,\ 0)$

(a) Покажите, что чистого равновесия Нэша не существует.

(b) Вычислите смешанную стратегию Н, при которой Р безразличен (вероятность q контроля).

(c) Вычислите смешанную стратегию P, при которой H безразличен (вероятность p работы).

(d) Интерпретируйте равновесие: что практически означает, что P работает с вероятностью p?

Решение: Задача 1.6

(а) Нет чистого равн. Нэша:

- (Работать, Контролировать): H может перейти на Не контролировать (4>2) $\rightarrow$ не равновесие.
- (Работать, Не контролировать): P может перейти на Отлынивать (5>3) $\rightarrow$ не равновесие.
- (Отлынивать, Не контролировать): H может перейти на Контролировать (1>0) $\rightarrow$ не равновесие.
- (Отлынивать, Контролировать): P может перейти на Работать (3>$-$2) $\rightarrow$ не равновесие.

(б) Смешанная стратегия H (q = вер. контроля): P становится безразличным между Работать и Отлынивать:

$$3q + 3(1-q) = -2q + 5(1-q) \;\Rightarrow\; 3 = 5 - 7q \;\Rightarrow\; \boldsymbol{q = \tfrac{2}{7} \approx 0{,}286}$$

(в) Смешанная стратегия P (p = вер. работы): H становится безразличным между Контролировать и Не контролировать:

$$2p + 1(1-p) = 4p + 0(1-p) \;\Rightarrow\; 1 + p = 4p \;\Rightarrow\; \boldsymbol{p = \tfrac{1}{3} \approx 0{,}333}$$

(г) Интерпретация: В равновесии работник работает $\frac{1}{3}$ времени и отлынивает $\frac{2}{3}$. Работодатель контролирует $\frac{2}{7}$ времени.

- Ни один игрок не может выиграть, изменив стратегию.
- Больше контроля сдвинуло бы работника к постоянной работе.
- Меньше контроля сдвинуло бы работника к постоянному отлыниванию.

Практически: более частый контроль ведёт к большей трудовой отдаче – однако детерминированный график контроля был бы предсказуем и легко обходим.

2. Модуль 2 – Игры с нулевой суммой

Уровень 1: Лёгкий

Задача 2.1 – Определение седловой точки

Задача 2.1

Дана матрица выигрышей игры с нулевой суммой (выигрыш Игрока 1, максимизатор строк):

И1 \ И2	Лево	Центр	Право
Верх	3	-1	4
Середина	2	5	1
Низ	-2	3	2

(a) Вычислите максимин (И1) и минимакс (И2).

(b) Существует ли седловая точка?

(c) Какова ценность игры?

(d) Какие чистые стратегии играют И1 и И2 в равновесии?

Решение: Задача 2.1

(а) Минимумы строк (максимин И1):

- Верх: $\min(3, -1, 4) = -1$
- Середина: $\min(2, 5, 1) = 1$
- Низ: $\min(-2, 3, 2) = -2$

Максимин $= \max(-1, 1, -2) =$ **1** (стратегия: Середина)
Максимумы столбцов (минимакс И2):

- Лево: $\max(3, 2, -2) = 3$
- Центр: $\max(-1, 5, 3) = 5$
- Право: $\max(4, 1, 2) = 4$

Минимакс $= \min(3, 5, 4) =$ **3** (стратегия: Лево)
(б) Максимин $= 1 \neq 3 =$ Минимакс $\Rightarrow$ **Седловой точки нет.**
(в) Ценность игры лежит между 1 и 3; требуются смешанные стратегии.
(г) Нет чистого равновесия; И1 выбирает Середину как максиминную стратегию безопасности, И2 выбирает Лево как минимаксную стратегию безопасности.

Задача 2.2 – Седловая точка 2×2

Задача 2.2

Атакующий (А) и обороняющийся (О) в военной игре. Выигрыш для А (победа атакующего положительна):

А \ О	**Оборона Север**	**Оборона Юг**
Атака Север	-1	3
Атака Юг	4	-2

(a) Вычислите максимин и минимакс.

(b) Существует ли седловая точка?

(c) Вычислите оптимальную смешанную стратегию для А (p = вер. атаки на Север).

(d) Вычислите оптимальную смешанную стратегию для О (q = вер. обороны Севера) и ценность игры.

Решение: Задача 2.2

(а) Максимин А: $\min(-1,3) = -1$; $\min(4,-2) = -2$. Максимин $= \max(-1,-2) = -1$. Минимакс О: $\max(-1,4) = 4$; $\max(3,-2) = 3$. Минимакс $= \min(4,3) = 3$.
(б) $-1 \neq 3 \Rightarrow$ **Седловой точки нет.**
(в) Смешанная стратегия А: О становится безразличным:

$$-1\cdot p + 4(1-p) = 3p + (-2)(1-p) \;\Rightarrow\; 4-5p = 5p-2 \;\Rightarrow\; 10p = 6 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{p = 0{,}6}$$

(г) Смешанная стратегия О: А становится безразличным:

$$-1\cdot q + 3(1-q) = 4q + (-2)(1-q) \;\Rightarrow\; 3-4q = 6q-2 \;\Rightarrow\; 10q = 5 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{q = 0{,}5}$$

Ценность игры: $v = -1\cdot 0{,}6 + 4\cdot 0{,}4 = -0{,}6 + 1{,}6 =$ **1,0**
Проверка: $3\cdot 0{,}6 + (-2)\cdot 0{,}4 = 1{,}8 - 0{,}8 = 1{,}0$ ✓

Уровень 2: Средний

Задача 2.3 – Доминирование в игре с нулевой суммой

Задача 2.3

Дана следующая игра с нулевой суммой 3×4 (выигрыш для игрока строк):

	C1	C2	C3	C4
31	4	2	6	3
32	1	5	3	2
33	3	3	4	4

(a) Исключите доминируемые стратегии игрока столбцов (минимизатор).

(b) Исключите доминируемые стратегии игрока строк.

(c) Решите оставшуюся игру (седловая точка или смешанные стратегии).

(d) Вычислите ценность игры.

Решение: Задача 2.3

(а) Игрок столбцов минимизирует. Сравним столбцы (игрок столбцов предпочитает меньшие значения):
C1 vs C4: $4 > 3$, $1 < 2$, $3 < 4$ – нет доминирования. C2 vs C4: $2 < 3$, $5 > 2$, $3 < 4$ – нет доминирования. C3 vs C1: $6 > 4$, $3 > 1$, $4 > 3$ – C3 хуже для столбца, чем C1. Игрок столбцов предпочитает низкие значения: C1 $\leq$ C3 в каждой строке? $4 < 6$, $1 < 3$, $3 < 4$ ✓ – **C3 доминируется C1**. Исключить C3.
(б) Оставшаяся (без C3):

	C1	C2	C4
31	4	2	3
32	1	5	2
33	3	3	4

Игрок строк максимизирует: 32 vs 33: $1 < 3$, $5 > 3$, $2 < 4$ – нет доминирования. 31 vs 33: $4 > 3$, $2 < 3$, $3 < 4$ – нет доминирования.
(в) Максимин: 31: min=2; 32: min=1; 33: min=3. Максимин = 3 (33). Минимакс: C1: max=4; C2: max=5; C4: max=4. Минимакс = 4 (C1 или C4).

$3 \neq 4$ – седловой точки нет. Требуются смешанные стратегии (решаемо в инструменте).
(г) Ценность игры лежит между 3 и 4.

Задача 2.4 – Сценарий пенальти

Задача 2.4

Нападающий пробивает пенальти против вратаря. Выигрыш = вероятность гола для нападающего в %:

Нападающий \ **Вратарь**	**Прыжок влево**	**Прыжок вправо**
Удар влево	30	80
Удар вправо	75	25

(a) Покажите, что чистого равновесия Нэша не существует.

(b) Вычислите оптимальную смешанную стратегию нападающего (p = вер. удара влево).

(c) Вычислите оптимальную смешанную стратегию вратаря (q = вер. прыжка влево).

(d) Какова ожидаемая ценность игры (ожидаемая вероятность гола)?

(e) Что произойдёт, если нападающий всегда бьёт влево?

Решение: Задача 2.4

(а) Проверка чистых равновесий: (Влево, Влево)=30: нападающий переходит на Вправо (75>30) $\rightarrow$ не равновесие. (Вправо, Влево)=75: вратарь переходит на Вправо (25<75, минимизация) $\rightarrow$ не равновесие. (Влево, Вправо)=80: вратарь переходит на Влево (30<80) $\rightarrow$ не равновесие. (Вправо, Вправо)=25: нападающий переходит на Влево (80>25) $\rightarrow$ не равновесие.
(б) Смешанная стратегия нападающего (вратарь безразличен):

$$30p+75(1-p) = 80p+25(1-p) \;\Rightarrow\; 75-45p = 25+55p \;\Rightarrow\; 100p = 50 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{p = 0{,}5}$$

(в) Смешанная стратегия вратаря (нападающий безразличен):

$$30q+80(1-q) = 75q+25(1-q) \;\Rightarrow\; 80-50q = 25+50q \;\Rightarrow\; 100q = 55 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{q = 0{,}55}$$

(г) $v = 30 \cdot 0{,}5 + 80 \cdot 0{,}5 =$ **55%** вероятность гола.
(д) Если нападающий всегда бьёт влево: вратарь всегда прыгает влево, вероятность гола падает до 30% – намного хуже 55%. Это показывает: предсказуемость дорого обходится в играх с нулевой суммой.

Уровень 3: Сложный

Задача 2.5 – Игра с нулевой суммой 3×3

Задача 2.5

Два финансовых трейдера конкурируют на рынке. Выигрыш для Трейдера 1 (тыс. €):

T1 \ T2	**Агрессивная**	**Нейтральная**	**Защитная**
Агрессивная	0	6	8
Нейтральная	−6	0	4
Защитная	−8	−4	0

(a) Покажите, что Защитная доминируема для T1.

(b) После исключения покажите, что Защитная доминируема для T2.

(c) Решите оставшуюся игру 2×2.

(d) Вычислите ценность игры и оптимальные смешанные стратегии.

(e) Что показывает эта игра о преимуществе агрессивного поведения?

Решение: Задача 2.5

(а) Защитная vs Нейтральная для T1: $-8 < -6$, $-4 < 0$, $0 < 4$ – Защитная строго доминируется Нейтральной.
(б) После исключения T1-Защитная:

	Агрессивная	Нейтральная	Защитная
Агрессивная	0	6	8
Нейтральная	-6	0	4

T2 минимизирует. T2-Защитная vs T2-Нейтральная: $8 > 4$ и $4 > 0$ – T2 предпочитает Нейтральную. Игра антисимметрична: $a_{ij} =$

$-a_{ji}$. T2-Защитная строго доминируется T2-Нейтральной: $8 > 4$, $4 > 0$ ✓.
(в) Сокращённая игра 2×2:

	Агрессивная	Нейтральная
Агрессивная	0	6
Нейтральная	-6	0

Максимин T1: $\min(0, 6) = 0$; $\min(-6, 0) = -6$. Максимин $= 0$ (Агрессивная). Минимакс T2: $\max(0, -6) = 0$; $\max(6, 0) = 6$. Минимакс $= 0$.
(г) Максимин $=$ Минимакс $= 0 \Rightarrow$ **Седловая точка!** Ячейка (Агрессивная, Агрессивная) $= 0$. Ценность игры $v^* = \mathbf{0}$. Оба играют Агрессивную в равновесии.
(д) Игра показывает: агрессивное поведение гарантирует как минимум ничью (0). Защитное поведение ведёт к отрицательным результатам. В играх с нулевой суммой без возможности сотрудничества агрессия окупается.

Задача 2.6 – Теорема Минимакс и чувствительность

Задача 2.6

Дана следующая игра с нулевой суммой 2×2 с параметром k:

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

(a) При каких значениях k существует седловая точка?

(b) Для $k = 3$: вычислите оптимальную смешанную стратегию и ценность игры.

(c) Для $k = 0$: вычислите оптимальную смешанную стратегию.

(d) Покажите, что ценность игры лежит между 1 и 2 для всех $k \in (1, 2)$.

Решение: Задача 2.6

(а) Седловая точка: Максимин: $\min(k, 2)$ и $\min(1, k)$. Минимакс: $\max(k, 1)$ и $\max(2, k)$.
Седловая точка существует, когда Максимин = Минимакс.

- $k \geq 2$: Максимин $= 2$, Минимакс $= k$. Равновесие при $k = 2$.
- $k \leq 1$: Максимин $= k$, Минимакс $= 1$. Равновесие при $k = 1$.

Седловая точка: $k = 1$ или $k = 2$.

(б) $k=3$**:** Матрица $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. p (вер. строки 1): $3p+1(1-p)=2p+3(1-p) \Rightarrow 1+2p=3-p \Rightarrow 3p=2 \Rightarrow \boldsymbol{p=2/3}$. Ценность игры: $v=3\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{7}{3}}$.
(в) $k=0$**:** Матрица $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. $0\cdot p+1(1-p)=2p+0(1-p) \Rightarrow 1-p=2p \Rightarrow \boldsymbol{p=1/3}$. Ценность игры: $v=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{2}{3}=\boldsymbol{2/3}$.
(г) При $k=1$: $v=1$. При $k=2$: $v=2$. Так как v непрерывна по k между этими граничными седловыми точками, $v\in(1,2)$ для $k\in(1,2)$.

3. Модуль 3 – Игры с ненулевой суммой

Уровень 1: Лёгкий

Задача 3.1 – Равновесие Нэша и Парето в простой игре

Задача 3.1

Два соседа решают, ухаживать ли за общим садом (**Ухаживать**) или нет (**Игнорировать**).

А \ Б	Ухаживать	Игнорировать
Ухаживать	$(4,\ 4)$	$(1,\ 5)$
Игнорировать	$(5,\ 1)$	$(2,\ 2)$

(a) Определите все равновесия Нэша.

(b) Является ли результат Парето-эффективным?

(c) Какой тип игры это представляет?

(d) Какой выигрыш был бы лучшим для обоих?

Решение: Задача 3.1

(а) Лучшие ответы: против Ухаживать: $\max(4,5) = 5 \to$ Игнорировать. Против Игнорировать: $\max(1,2) = 2 \to$ Игнорировать. Игнорировать доминирует для А (и симметрично для Б). **Равн. Нэша: (Игнорировать, Игнорировать) = (2, 2).**
(б) (Игнорировать, Игнорировать) = (2,2) Парето-доминируется (Ухаживать, Ухаживать) = (4,4). $\Rightarrow$ **Не Парето-эффективно.**
(в) Дилемма заключённого: индивидуально рационально $\to$ коллективно субоптимально.
(г) (Ухаживать, Ухаживать) = **(4, 4)** – оба выигрывают. Требуется координация или обязывающее соглашение.

Задача 3.2 – Несколько равновесий Нэша

Задача 3.2

Два водителя (А, Б) на перекрёстке без светофора. Каждый решает: **Ехать** или **Ждать**.

А \ Б	**Ехать**	**Ждать**
Ехать	$(-10,\ -10)$	$(3,\ 1)$
Ждать	$(1,\ 3)$	$(0,\ 0)$

(a) Определите все равновесия Нэша.

(b) Оба ли равновесия Парето-эффективны?

(c) Почему это проблема координации, а не дилемма заключённого?

(d) Как можно решить эту проблему на практике?

Решение: Задача 3.2

(а)

- (Ехать, Ждать) = (3,1): А не может улучшить ($3 > 1$), Б не может улучшить ($1 > -10$) ✓ – **Равн. Нэша 1**.
- (Ждать, Ехать) = (1,3): А не может улучшить ($1 > -10$), Б не может улучшить ($3 > 0$) ✓ – **Равн. Нэша 2**.
- (Ехать, Ехать): А переходит на Ждать ($1 > -10$) $\rightarrow$ не равновесие.
- (Ждать, Ждать): А переходит на Ехать ($3 > 0$) $\rightarrow$ не равновесие.

(б) Оба равновесия (3,1) и (1,3) Парето-эффективны (ни один исход не улучшает положение обоих).
(в) Не дилемма заключённого, потому что ни у одного игрока нет доминирующей стратегии. Это проблема координации: игроки должны координироваться, но имеют противоположные предпочтения относительно равновесий.
(г) Практические решения: правила преимущественного проезда, светофоры, “кто приехал первым, едет первым” как фокальная точка.

Уровень 2: Средний

Задача 3.3 – Игра переговоров

Задача 3.3

Покупатель (П) и продавец (Пр) ведут переговоры о доме. П оценивает его в 500, Пр имеет минимальную цену 300 (все значения в тыс. €). Оба одновременно выбирают предложение: **300**, **400** или **500**. Сделка состоится при совпадении предложений; при несовпадении – сделки нет. Выигрыш при сделке: П получает $(500 - \text{цена})$, Пр получает $(\text{цена} - 300)$.

(a) Постройте полную матрицу выигрышей.

(b) Определите все равновесия Нэша.

(c) Все ли равновесия Парето-эффективны?

(d) Какое равновесие Нэша вы бы назвали самым справедливым и почему?

Решение: Задача 3.3

(а) При сделке: цена 300 → (200, 0); цена 400 → (100, 100); цена 500 → (0, 200). Без сделки: (0, 0).

П \ Пр	**300**	**400**	**500**
300	$(200,\ 0)$	$(0,\ 0)$	$(0,\ 0)$
400	$(0,\ 0)$	$(100,\ 100)$	$(0,\ 0)$
500	$(0,\ 0)$	$(0,\ 0)$	$(0,\ 200)$

(б) Все три диагональные ячейки – равновесия Нэша: **(300,300)=(200,0)**, **(400,400)=(100,100)**, **(500,500)=(0,200)**.
(в) Все три Парето-эффективны (отказ от сделки (0,0) был бы хуже для обоих). Но между собой: (100,100) справедливее; (200,0) и (0,200) – крайние распределения.
(г) **(400, 400) = (100, 100)** – самое справедливое равновесие Нэша:

- Симметричное деление выигрыша от сделки (всего 200 тыс., по 100 каждому)
- Совпадает с решением переговоров Нэша (произведение максимизировано: $100 \times 100 = 10000$)

Задача 3.4 – Анализ Парето и социальный оптимум

Задача 3.4

Две фирмы (X, Y) принимают решение об экологических инвестициях: **Высокие**, **Средние** или **Низкие**.

X \ Y	Высокие	Средние	Низкие
Высокие	(4, 4)	(2, 5)	(0, 6)
Средние	(5, 2)	(3, 3)	(1, 4)
Низкие	(6, 0)	(4, 1)	(2, 2)

(a) Определите все равновесия Нэша.

(b) Постройте полную таблицу по Парето.

(c) Вычислите общественное благосостояние (сумма выигрышей) для всех исходов.

(d) Какой исход максимизирует суммарное благосостояние, и насколько он отличается от равновесия Нэша?

Решение: Задача 3.4

(а) Низкие доминирует для обоих. Равн. Нэша: **(Низкие, Низкие) = (2, 2).**
(б/в) Таблица Парето с благосостоянием:

Исход	X	Y	Благосост.	Парето
(Высокие, Высокие)	4	4	8	эффективен
(Высокие, Средние)	2	5	7	доминируем
(Высокие, Низкие)	0	6	6	эффективен
(Средние, Высокие)	5	2	7	доминируем
(Средние, Средние)	3	3	6	доминируем
(Средние, Низкие)	1	4	5	доминируем
(Низкие, Высокие)	6	0	6	эффективен
(Низкие, Средние)	4	1	5	доминируем
(Низкие, Низкие)	2	2	4	доминируем – **Равн. Нэша!**

(г) Максимум благосостояния: **(Высокие, Высокие) = (4, 4), благосостояние = 8.** Равн. Нэша (2,2) даёт благосостояние 4 – лишь половину! ⇒ Регулирование (экологический налог, субсидии) могло бы направить фирмы к социальному оптимуму.

Уровень 3: Сложный

Задача 3.5 – Повторяющаяся игра и стратегия “Ты – мне”

Задача 3.5

Два олигополиста (А, Б) играют следующую ценовую игру:

А \ Б	Высокая	Низкая
Высокая	$(8,\ 8)$	$(0,\ 12)$
Низкая	$(12,\ 0)$	$(3,\ 3)$

Игра повторяется **бесконечно**. Оба игрока используют коэффициент дисконтирования $\delta \in (0,1)$.

(a) Определите равновесие Нэша однократной игры.

(b) А использует стратегию “Ты – мне, я – тебе”: начать с Высокой; в каждом следующем периоде копировать выбор соперника в предыдущем периоде. Вычислите приведённую стоимость взаимного сотрудничества (Высокая/Высокая) для А.

(c) Вычислите приведённую стоимость одностороннего отклонения (Низкая в $t=0$, затем наказание Нэшем с $t=1$) для А.

(d) Покажите, что сотрудничество устойчиво при $\delta \geq \frac{4}{9}$.

Решение: Задача 3.5

(а) Равн. Нэша однократной игры: Низкая доминирует (12>8 и 3>0). **(Низкая, Низкая) = (3, 3).**
(б) Приведённая стоимость сотрудничества (Высокая/Высокая навсегда):

$$V_K = 8 + 8\delta + 8\delta^2 + \cdots = \frac{8}{1-\delta}$$

(в) Приведённая стоимость отклонения (Низкая в $t=0$, затем Нэш с $t=1$):

$$V_A = 12 + 3\delta + 3\delta^2 + \cdots = 12 + \frac{3\delta}{1-\delta}$$

(г) Сотрудничество устойчиво при $V_K \geq V_A$:

$$\frac{8}{1-\delta} \geq 12 + \frac{3\delta}{1-\delta}$$

$$\frac{8-3\delta}{1-\delta} \geq 12 \;\Rightarrow\; 8-3\delta \geq 12(1-\delta) \;\Rightarrow\; 9\delta \geq 4 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\delta \geq \frac{4}{9}}$$

При $\delta \geq 4/9$ стратегия “Ты – мне” является равновесием Нэша повторяющейся игры. Практически: обе фирмы должны достаточно ценить будущее.

Задача 3.6 – Смешанные стратегии в игре с ненулевой суммой

Задача 3.6

Два игрока (P = строки, C = столбцы) играют следующую игру:

P \ C	**Лево**	**Право**
Верх	$(2,\ 1)$	$(0,\ 0)$
Низ	$(0,\ 0)$	$(1,\ 2)$

(a) Определите все чистые равновесия Нэша.

(b) Покажите, что существует смешанное равновесие Нэша, и вычислите p^* (P играет Верх с вероятностью p) и q^* (C играет Лево с вероятностью q).

(c) Вычислите выигрыши в смешанном равновесии для обоих игроков.

(d) Почему эту игру называют “Битва полов”? Сравните три равновесия Нэша.

Решение: Задача 3.6

(а) Чистые равновесия Нэша:

- (Верх, Лево) = (2,1): P не может улучшить ($2 > 0$), C не может улучшить ($1 > 0$) ✓
- (Низ, Право) = (1,2): P не может улучшить ($1 > 0$), C не может улучшить ($2 > 0$) ✓

(б) Смешанное равновесие: C безразличен (q = вер. Лево): $2q + 0(1-q) = 0 \cdot q + 1(1-q) \Rightarrow 2q = 1-q \Rightarrow \boldsymbol{q^* = 1/3}$. P безразличен ($p$ = вер. Верх): $1 \cdot p + 0(1-p) = 0 \cdot p + 2(1-p) \Rightarrow p = 2-2p \Rightarrow \boldsymbol{p^* = 2/3}$.
(в) Выигрыши в смешанном равновесии:

- P: $2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$
- C: $1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$

(г) Битва полов: Игра координации с противоположными предпочтениями: Р предпочитает (Верх, Лево) = (2,1), С предпочитает (Низ, Право) = (1,2). Оба хотят координироваться, но на разных равновесиях. Сравнение трёх равновесий:

- (Верх, Лево): хорошо для Р (2), плохо для С (1)
- (Низ, Право): плохо для Р (1), хорошо для С (2)
- Смешанное: оба получают лишь $2/3$ – худший результат для обоих!

4. Модуль 4 – Кооперативная теория игр

Уровень 1: Лёгкий

Задача 4.1 – Значение Шепли: 3 игрока

Задача 4.1

Три фирмы (1, 2, 3) могут совместно реализовать проект. Характеристическая функция описывает достижимую прибыль в тыс. €:

$$v(\emptyset) = 0, \quad v(\{1\}) = 0, \quad v(\{2\}) = 0, \quad v(\{3\}) = 0$$
$$v(\{1,2\}) = 60, \quad v(\{1,3\}) = 40, \quad v(\{2,3\}) = 30, \quad v(\{1,2,3\}) = 90$$

(a) Вычислите значение Шепли для всех трёх игроков.

(b) Проверьте: удовлетворяет ли распределение Шепли эффективности и индивидуальной рациональности?

(c) Какой игрок имеет наибольший вклад в большую коалицию?

Решение: Задача 4.1

(а) Значение Шепли: $\phi_i = \sum_{S \ni i} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}[v(S) - v(S \setminus \{i\})]$
Для $n = 3$: вес для $|S| = 1$: $\frac{0!\cdot 2!}{6} = \frac{2}{6}$; для $|S| = 2$: $\frac{1!\cdot 1!}{6} = \frac{1}{6}$; для $|S| = 3$: $\frac{2!\cdot 0!}{6} = \frac{2}{6}$.
Игрок 1:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \tfrac{2}{6}[v(\{1\}) - v(\emptyset)] + \tfrac{1}{6}[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] + \tfrac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{3\})] + \tfrac{2}{6}[v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})] \\ &= \tfrac{2}{6}\cdot 0 + \tfrac{1}{6}\cdot 60 + \tfrac{1}{6}\cdot 40 + \tfrac{2}{6}\cdot 60 \\ &= 0 + 10 + 6{,}67 + 20 = \mathbf{36{,}67}\end{aligned}$$

Игрок 2: $\phi_2 = \frac{2}{6}\cdot 0 + \frac{1}{6}\cdot 60 + \frac{1}{6}\cdot 30 + \frac{2}{6}\cdot 50 = 0 + 10 + 5 + 16{,}67 = \mathbf{31{,}67}$
Игрок 3: $\phi_3 = 90 - 36{,}67 - 31{,}67 = \mathbf{21{,}67}$
Проверка: $36{,}67 + 31{,}67 + 21{,}67 = 90$ ✓
(б) Эффективность: $\sum \phi_i = 90 = v(\{1,2,3\})$ ✓ Индивидуальная рациональность: все значения положительны и больше нуля ✓.
(в) Игрок 1 имеет наибольший вклад ($\phi_1 = 36{,}67$) – он создаёт наибольшую добавленную ценность в коалициях.

Задача 4.2 – Ядро и стабильность

Задача 4.2

Три игрока (1, 2, 3) с характеристической функцией:

$$v(\{1\}) = 10,\ v(\{2\}) = 20,\ v(\{3\}) = 15$$

$$v(\{1,2\}) = 50,\ v(\{1,3\}) = 40,\ v(\{2,3\}) = 45,\ v(\{1,2,3\}) = 70$$

(a) Что такое ядро кооперативной игры?

(b) Сформулируйте все условия, которым должно удовлетворять распределение (x_1, x_2, x_3), чтобы лежать в ядре.

(c) Проверьте, лежит ли распределение $(20, 25, 25)$ в ядре.

(d) Вычислите значение Шепли и проверьте, лежит ли оно в ядре.

Решение: Задача 4.2

(а) Ядро: множество всех распределений, которые ни одна подгруппа игроков не может улучшить отделением.
(б) Условия ядра:

- Эффективность: $x_1 + x_2 + x_3 = 70$
- Индивидуальная рациональность: $x_1 \geq 10$, $x_2 \geq 20$, $x_3 \geq 15$
- Коалиционная рациональность: $x_1 + x_2 \geq 50$, $x_1 + x_3 \geq 40$, $x_2 + x_3 \geq 45$

(в) Проверка $(20, 25, 25)$: Эффективность: $70 = 70$ ✓. Индивидуальная: $20 > 10$, $25 > 20$, $25 > 15$ ✓. Коалиции: $20 + 25 = 45 < 50$ **НАРУШЕНО!** $\Rightarrow (20, 25, 25)$ **не лежит в ядре**.
(г) Значение Шепли: $\phi_1 = \frac{2}{6}(10) + \frac{1}{6}(30) + \frac{1}{6}(25) + \frac{2}{6}(25) = 3{,}33 + 5 + 4{,}17 + 8{,}33 = 20{,}83$ $\phi_2 = \frac{2}{6}(20) + \frac{1}{6}(30) + \frac{1}{6}(30) + \frac{2}{6}(25) = 6{,}67 + 5 + 5 + 8{,}33 = 25$ $\phi_3 = 70 - 20{,}83 - 25 = 24{,}17$
Проверка ядра: $\phi_1 + \phi_2 = 45{,}83 < 50$ **НАРУШЕНО** – значение Шепли **не лежит в ядре** (ядро может быть пустым).

Уровень 2: Средний

Задача 4.3 – Значение Шепли: голоса

Задача 4.3

Совет директоров состоит из 4 членов с весами голосов: $w_1 = 3$, $w_2 = 2$, $w_3 = 2$, $w_4 = 1$. Решения требуют большинства в $q = 5$ голосов. Характеристическая функция:

$$v(S) = 1, \text{ если } \sum_{i \in S} w_i \geq 5, \quad v(S) = 0 \text{ иначе.}$$

(a) Вычислите $v(S)$ для всех коалиций.

(b) Вычислите значение Шепли для всех четырёх игроков.

(c) Интерпретируйте: действительно ли игрок 4 (с 1 голосом) не имеет влияния?

(d) Сравните веса голосов с индексом власти Шепли.

Решение: Задача 4.3

(а) Выигрывающие коалиции (сумма ≥ 5):

- Пары: $\{1,2\} = 5$✓, $\{1,3\} = 5$✓, остальные пары < 5
- Тройки: $\{1,2,3\} = 7$✓, $\{1,2,4\} = 6$✓, $\{1,3,4\} = 6$✓, $\{2,3,4\} = 5$✓
- $\{1,2,3,4\} = 8$✓

(б) Значения Шепли (по всем $4! = 24$ перестановкам):
Каждый игрок получает 1/24 за каждый порядок, в котором он пивотален.
Стандартный результат: $\phi_1 = \frac{10}{24} \approx 0{,}417$; $\phi_2 = \phi_3 = \frac{6}{24} = 0{,}250$; $\phi_4 = \frac{2}{24} \approx 0{,}083$. Проверка: $0{,}417 + 0{,}250 + 0{,}250 + 0{,}083 = 1$ ✓
(в) Игрок 4 имеет значение Шепли $8{,}3\%$ – он действительно имеет влияние, а именно в ситуациях, где $\{2,3,4\}$ становится выигрывающей. Без игрока 4 $\{2,3\} = 4 < 5$ – он пивотален в этой коалиции.
(г) Веса голосов: $3:2:2:1 = 37{,}5\% : 25\% : 25\% : 12{,}5\%$. Шепли: $41{,}7\% : 25\% : 25\% : 8{,}3\%$. Игрок 1 имеет больше власти, чем его доля голосов, игрок 4 – меньше.

Задача 4.4 – Решение переговоров Нэша

Задача 4.4

Две стороны (А, Б) договариваются о распределении прибыли в 100 тыс. €. Точка разногласия (статус-кво): $(d, d) = (10, 20)$.

(a) Что такое решение переговоров Нэша? Сформулируйте задачу оптимизации.

(b) Вычислите решение Нэша (x^*, x^*).

(c) Как изменится решение, если статус-кво вырастет до $(20, 20)$?

(d) Интерпретируйте аксиомы решения Нэша (эффективность, симметрия, инвариантность к масштабированию, независимость от посторонних альтернатив).

Решение: Задача 4.4

(а) Решение переговоров Нэша максимизирует произведение Нэша:

$$\max_{x,x}(x - d)(x - d) \quad \text{при} \quad x + x = 100,\ x \geq d,\ x \geq d$$

(б) С $d = 10$, $d = 20$ и $x + x = 100$:

$$\max_{x}(x - 10)(80 - x)$$

УУП: $(80 - x) - (x - 10) = 0 \Rightarrow 90 = 2x \Rightarrow \boldsymbol{x^* = 45}$, $\boldsymbol{x^* = 55}$.
Интерпретация: Б имеет более высокий статус-кво (20 > 10) и получает больше (55 > 45).
(в) Статус-кво $(20, 20)$: $\max(x - 20)(x - 20)$, $x + x = 100$. УУП: $(80 - x) - (x - 20) = 0 \Rightarrow 100 - 2x = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x^* = 50}$, $\boldsymbol{x^* = 50}$. Симметричное статус-кво $\Rightarrow$ симметричное распределение.
(г) Аксиомы:

- *Эффективность:* решение лежит на границе Парето.
- *Симметрия:* при симметричной игре оба получают поровну.
- *Инвариантность к масштабированию:* линейные преобразования не меняют решение.
- *Независимость от посторонних альтернатив:* посторонние альтернативы не меняют решение.

Уровень 3: Сложный

Задача 4.5 – Выпуклая игра и ядро

Задача 4.5

Игра (N, v) с $N = \{1, 2, 3\}$ и:

$$v(\{1\}) = 2,\ v(\{2\}) = 3,\ v(\{3\}) = 1$$

$$v(\{1, 2\}) = 10,\ v(\{1, 3\}) = 7,\ v(\{2, 3\}) = 8,\ v(\{1, 2, 3\}) = 15$$

(a) Покажите, что игра выпукла (проверьте условие выпуклости для всех релевантных пар коалиций).

(b) Вычислите значение Шепли.

(c) Покажите, что для выпуклых игр значение Шепли лежит в ядре.

(d) Определите все вершины ядра.

Решение: Задача 4.5

(а) Условие выпуклости: $v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$ для всех S, T.
Проверка $S = \{1, 2\}, T = \{1, 3\}$: $15 + 2 \geq 10 + 7 \Rightarrow 17 \geq 17$ ✓
$S = \{1, 2\}, T = \{2, 3\}$: $15 + 3 \geq 10 + 8 \Rightarrow 18 \geq 18$ ✓
$S = \{1, 3\}, T = \{2, 3\}$: $15 + 1 \geq 7 + 8 \Rightarrow 16 \geq 15$ ✓
Все остальные условия тривиальны (одиночные игроки). **Игра выпукла.**
(б) Значение Шепли: $\phi_1 = \frac{2}{6}(2) + \frac{1}{6}(7) + \frac{1}{6}(6) + \frac{2}{6}(7) = \frac{31}{6} \approx$ **5,17**
$\phi_2 = \frac{2}{6}(3) + \frac{1}{6}(8) + \frac{1}{6}(7) + \frac{2}{6}(7) = \frac{35}{6} \approx$ **5,83** $\phi_3 = 15 - 5{,}17 - 5{,}83 =$ **4,00**
Проверка: $5{,}17 + 5{,}83 + 4 = 15$ ✓
(в) Свойство выпуклых игр: для выпуклых игр значение Шепли всегда лежит в ядре, поскольку супермодулярность гарантирует выполнение всех условий ядра. Проверка: $\phi_1 + \phi_2 = 11 \geq 10$ ✓; $\phi_1 + \phi_3 = 9{,}17 \geq 7$ ✓; $\phi_2 + \phi_3 = 9{,}83 \geq 8$ ✓.
(г) Вершины ядра получаются из значений Шепли при разных порядках (для выпуклых игр это в точности вершины ядра): $(2, 8, 5)$, $(2, 7, 6)$, $(7, 3, 5)$, $(6, 8, 1)$, $(7, 7, 1)$, $(9, 5, 1)$ – по одной на каждую перестановку. Значение Шепли $(5{,}17, 5{,}83, 4)$ – центроид (среднее) всех вершин.

Задача 4.6 – Справедливое распределение затрат

Задача 4.6

Три города (А, Б, В) хотят совместно построить водопровод. Затраты на отдельные или объединённые трубопроводы (в млн €):

$$c(\{\}) = 12,\ c(\{\}) = 10,\ c(\{\}) = 8$$

$$c(\{,\}) = 16,\ c(\{,\}) = 15,\ c(\{,\}) = 13,\ c(\{,,\}) = 20$$

(a) Покажите, что большая коалиция эффективна (субаддитивность).

(b) Определите характеристическую функцию экономии $v(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S)$ и вычислите все значения.

(c) Вычислите значение Шепли экономии.

(d) Вычислите вклад каждого города в затраты по Шепли и проверьте рациональность.

Решение: Задача 4.6

(а) Субаддитивность:

- $c(\{,\}) = 16 \leq 30 = 12{+}10{+}8$... корректнее: $c(\{,\}) = 16 \leq 22 = 12{+}10$ ✓(экономия 6)
- $c(\{,\}) = 15 \leq 20 = 12 + 8$ ✓(экономия 5)
- $c(\{,\}) = 13 \leq 18 = 10 + 8$ ✓(экономия 5)
- $c(\{,,\}) = 20 \leq 30 = 12 + 10 + 8$ ✓(экономия 10)

(б) Функция экономии $v(S)$:

$$\begin{aligned} v(\{\}) = 12 - 12 = 0, \quad v(\{\}) = 0, \quad v(\{\}) = 0 \\ v(\{,\}) = 12 + 10 - 16 = 6 \\ v(\{,\}) = 12 + 8 - 15 = 5 \\ v(\{,\}) = 10 + 8 - 13 = 5 \\ v(\{,,\}) = 12 + 10 + 8 - 20 = 10 \end{aligned}$$

(в) Значение Шепли экономии: $\phi = \frac{2}{6}(0) + \frac{1}{6}(6) + \frac{1}{6}(5) + \frac{2}{6}(5) = \frac{21}{6} = 3{,}5$ $\phi = \frac{2}{6}(0) + \frac{1}{6}(6) + \frac{1}{6}(5) + \frac{2}{6}(5) = 3{,}5$ $\phi = 10 - 3{,}5 - 3{,}5 = 3{,}0$
(г) Вклад в затраты по Шепли: Город А платит: $c(\{\}) - \phi = 12 - 3{,}5 = \mathbf{8{,}5}$ млн. Город Б платит: $c(\{\}) - \phi = 10 - 3{,}5 = \mathbf{6{,}5}$ млн. Город В платит: $c(\{\}) - \phi = 8 - 3{,}0 = \mathbf{5{,}0}$ млн.
Проверка: $8{,}5 + 6{,}5 + 5{,}0 = 20$ млн $= c(\{,,\})$ ✓
Рациональность: каждый город платит меньше своих индивидуальных затрат ($8{,}5 < 12$, $6{,}5 < 10$, $5{,}0 < 8$) ✓.