Метод симплекса

Линейное программирование — основы и алгоритм

Русский

Вольфганг Бёме

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

Данный документ систематически вводит метод симплекса. Он предназначен для студентов без предварительных знаний в области оптимизации.

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Введение и мотивация **2**

2 Основные понятия линейного программирования **2**
2.1 Общая задача линейного программирования 2
2.2 Важные понятия 3

3 Геометрическая интерпретация (2 переменные) **3**
3.1 Пример геометрического решения 3
3.2 Основная теорема линейного программирования 4

4 Стандартная форма и переменные отклонения **5**
4.1 Приведение к стандартной форме 5
4.2 Базисные решения и базисные переменные 5

5 Алгоритм симплекса **6**
5.1 Симплекс-таблица 6
5.2 Правила выбора ведущего элемента 7
5.2.1 Выбор ведущего столбца (входящая переменная) . . 7
5.2.2 Выбор ведущей строки (выходящая переменная) . . 7
5.2.3 Пивотная операция 8
5.3 Полная схема алгоритма 8

6 Полный пример: 2 переменные **8**

7 Расширенный пример: 5 переменных, 4 ограничения **9**

8 Двойственность **10**
8.1 Двойственная задача линейного программирования 10
8.2 Теоремы слабой и сильной двойственности 11
8.3 Условие дополняющей нежёсткости 11

9 Теневые цены **12**
9.1 Экономическая интерпретация двойственных переменных 12
9.2 Область действия теневых цен 12

10 Алгоритм двойственного симплекса **13**
10.1 Мотивация 13
10.2 Алгоритм 13
10.3 Полный пример: двойственный симплекс 14

11 Особые случаи **15**
11.1 Неограниченная задача 15
11.2 Недопустимая задача 15
11.3 Вырожденность 16

12 Вычислительная сложность и практические замечания 16
12.1 Теоретическая сложность 16
12.2 Двойственность 16
12.3 Практические замечания 16

13 Резюме 17

1. Введение и мотивация

Многие задачи принятия решений можно сформулировать как **задачи линейной оптимизации**: ищется наилучшее решение — измеряемое линейной целевой функцией — при выполнении линейных ограничений.

Типичные области применения

- **Производство:** Какое количество продуктов производить для максимизации прибыли при ограничениях мощности?
- **Логистика:** Как планировать маршруты для минимизации затрат?
- **Финансы:** Как сформировать портфель, максимизирующий доходность при заданном риске?
- **Планирование питания:** Как сочетать продукты при минимальных затратах и выполнении всех норм питания?

Метод симплекса (*Simplex Algorithm*), разработанный Дж. Б. Данцигом в 1947 году, является классическим методом решения таких задач и по сей день остаётся одним из наиболее широко применяемых.

2. Основные понятия линейного программирования

2.1. Общая задача линейного программирования

Определение: Задача линейного программирования (ЗЛП)

Задача линейного программирования (ЗЛП) имеет вид:

Максимизировать (или минимизировать)
$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1}$$

при ограничениях
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i = 1, \ldots \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \tag{3}$$

где $c_j, a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ — заданные константы, $x_j \geq 0$ — **переменные решения**.

В матричной записи ЗЛП:

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{unter} \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

mit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

2.2. Важные понятия

Определение: Допустимое множество и оптимальное решение

- Набор $(x_1, \ldots, x_n)$ называется **допустимым**, если удовлетворяет (2) и (3).
- Множество всех допустимых наборов — **допустимое множество** $\mathcal{F}$.
- Допустимый набор $\mathbf{x}^*$ — **оптимальное решение**, если $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ (максимизация).

Определение: Выпуклое множество и вершина

- Множество $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ **выпукло**, если для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F}$ и $\lambda \in [0, 1]$: $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in \mathcal{F}$.
- Точка $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ — **вершина** (крайняя точка), если не может быть представлена как собственная выпуклая комбинация двух других точек из $\mathcal{F}$.

Допустимое множество ЗЛП всегда является **выпуклым политопом** — пересечением конечного числа полупространств.

3. Геометрическая интерпретация (2 переменные)

Für den Fall $n = 2$ lässt sich das LP anschaulich in der Ebene darstellen.

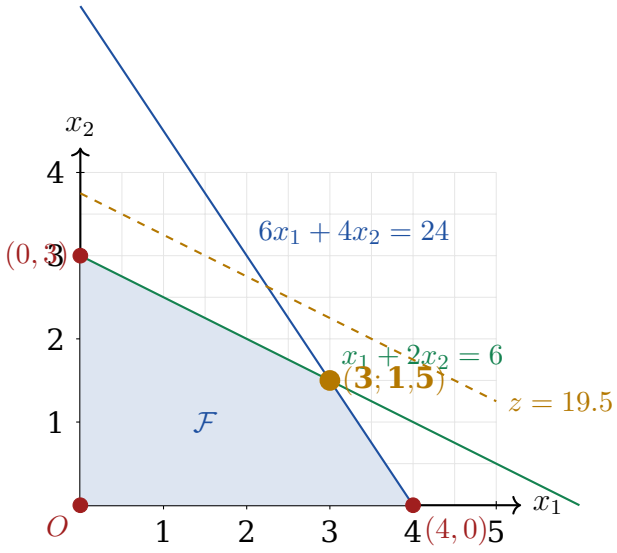
3.1. Пример геометрического решения

Пример 1: Планирование производства

Предприятие производит два продукта P_1 и P_2. Маржинальная прибыль: 5 д.е. за единицу P_1 и 4 д.е. за единицу P_2. Действуют ограничения:

$$\max \; z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \quad \text{(мощность оборудования)} \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \quad \text{(складская ёмкость)} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Вершины допустимого множества: $O = (0,0)$, $(4,0)$, $(3;\,1{,}5)$, $(0,3)$. Оптимум в вершине $(3;\,1{,}5)$: $z^* = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1{,}5 = 19{,}5$.

3.2. Основная теорема линейного программирования

Теорема 1: Основная теорема ЛП

Пусть ЗЛП допустима и ограничена. Тогда:

1. Допустимое множество $\mathcal{F}$ выпукло.
2. Всегда существует оптимальное решение в вершине $\mathcal{F}$.
3. Если $\mathcal{F}$ непусто и ограничено, ЗЛП имеет конечное оптимальное решение.

Доказательство. **(1):** Каждое ограничение задаёт выпуклое полупространство. Пересечение выпуклых множеств выпукло.

(2): Пусть $\mathbf{x}^*$ — оптимальное решение, но не крайняя точка. Тогда $\mathbf{x}^* = \lambda\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{v}$. В силу линейности:

$$\mathbf{c}^\top\mathbf{x}^* = \lambda\mathbf{c}^\top\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{c}^\top\mathbf{v}$$

Следовательно, хотя бы одно из $\mathbf{c}^\top\mathbf{u}$, $\mathbf{c}^\top\mathbf{v}$ не меньше $\mathbf{c}^\top\mathbf{x}^*$ — такое же решение есть и в крайней точке. Повторяя аргумент, всегда приходим к вершине.

(3): Поскольку $\mathcal{F}$ непусто и имеет конечное число крайних точек, максимум линейного функционала на $\mathcal{F}$ всегда достигается. □

Вывод для алгоритма: Поскольку оптимум всегда в вершине, а их *конечное* число, достаточно систематически переходить от вершины к вершине, улучшая целевую функцию. Это и есть идея метода симплекса.

4. Стандартная форма и переменные отклонения

4.1. Приведение к стандартной форме

Метод симплекса работает со **стандартной формой** ЗЛП, где все ограничения — равенства.

Определение: Стандартная форма

ЗЛП в стандартной форме:

$$\max \ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{unter} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

Преобразование неравенства в уравнение:

Для каждого ограничения $\leq$ вводим **переменную отклонения** $s_i \geq 0$:

$$\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} + s_i = b_i, \quad s_i \geq 0$$

Переменная отклонения s_i показывает удалённость ограничения от своей границы.

Пример 1 (продолжение): Введение переменных отклонения

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + s_1 &= 24 \\ x_1 + 2x_2 + s_2 &= 6 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ЗЛП теперь имеет $n + m = 4$ переменных и $m = 2$ уравнения.

4.2. Базисные решения и базисные переменные

Определение: Базис — базисные переменные — базисное решение

Пусть $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$.

- **Базис** B — выбор m линейно независимых столбцов $\mathbf{A}$.
- Соответствующие переменные — **базисные** x_B, остальные — **небазисные** x_N.
- При $x_N = \mathbf{0}$ получаем **базисное решение**: $x_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$.
- Базисное решение с $x_B \geq \mathbf{0}$ — **допустимое базисное решение** (ДБР).

Теорема 2: Вершины и допустимые базисные решения

Каждая вершина допустимого множества $\mathcal{F}$ соответствует ДБР, и наоборот.

Идея доказательства. Точка $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ является вершиной тогда и только тогда, когда активные ограничения совместно с $x_j = 0$ для достаточного числа j образуют единственную систему — что в точности соответствует определению базисного решения. □

Начальное ДБР: $x_1 = x_2 = 0$, $s_1 = 24$, $s_2 = 6$ (начало координат).

5. Алгоритм симплекса

5.1. Симплекс-таблица

Симплекс-таблица компактно представляет ЗЛП: матрица коэффициентов, правая часть и строка целевой функции.

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	b
s_1	6	4	1	0	24
s_2	1	2	0	1	6
z	-5	-4	0	0	0

Соглашение: Строка целевой функции содержит **приведённые стоимости** $\bar{c}_j$. Отрицательные $\bar{c}_j < 0$ означают, что целевую функцию можно улучшить.

5.2. Правила выбора ведущего элемента

Определение: Приведённые стоимости и критерий оптимальности

Приведённые стоимости небазисной переменной x_j:

$$\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{a}_j$$

ДБР оптимально, если $\bar{c}_j \leq 0$ для всех небазисных x_j (максимизация).

5.2.1. Выбор ведущего столбца (входящая переменная)

Правило Данцига (наибольшее улучшение на переменную)

Входящая переменная x_s — небазисная с **наиболее отрицательной** приведённой стоимостью:

$$s = \arg\min_j \bar{c}_j$$

Обоснование: Увеличение x_s на единицу улучшает целевую функцию на $|\bar{c}_s|$. Правило Данцига выбирает переменную с наибольшей скоростью улучшения.

5.2.2. Выбор ведущей строки (выходящая переменная)

Правило минимального отношения

Для входящей переменной x_s вычислим **минимальное отношение**:

$$r = \arg\min_{i:\, a_{is} > 0} \frac{b_i}{a_{is}}$$

Базисная переменная в строке r выходит из базиса.

Доказательство: сохранение допустимости. При увеличении x_s с 0 до $\theta > 0$ базисные переменные меняются:

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - a_{is} \cdot \theta, \quad i = 1, \ldots, m$$

Чтобы все $x_{B_i} \geq 0$ сохранялись:

$$\theta \leq \frac{\bar{b}_i}{a_{is}} \quad \text{für alle } i \text{ mit } a_{is} > 0$$

Максимально допустимое $\theta^* = \min_{i:\, a_{is}>0} \frac{\bar{b}_i}{a_{is}}$. Строка, дающая минимум, — ведущая; её базисная переменная обнуляется и выходит. □

5.2.3. Пивотная операция

Пусть (r, s) — ведущий элемент a_{rs}. **Пивотная операция**:

1. **Нормировка ведущей строки:** строка $r \div a_{rs}$:
$$\text{Zeile}_r \leftarrow \frac{1}{a_{rs}} \cdot \text{Zeile}_r$$
2. **Исключение в остальных строках:** для $i \neq r$:
$$\text{Zeile}_i \leftarrow \text{Zeile}_i - a_{is} \cdot \text{Zeile}_r$$
3. **Исключение в строке целевой функции:**
$$\text{Zeile}_z \leftarrow \text{Zeile}_z - \bar{c}_s \cdot \text{Zeile}_r$$

После пивотной операции x_s в базисе (единичный вектор в столбце s).

5.3. Полная схема алгоритма

Алгоритм: метод симплекса

1. **Инициализация:** начальная таблица (переменные отклонения в базисе).
2. **Проверка оптимальности:** все $\bar{c}_j \leq 0$? ДБР оптимально. Стоп.
3. **Ведущий столбец:** $s = \arg\min_j \bar{c}_j < 0$.
4. **Проверка неограниченности:** $a_{is} \leq 0$ для всех i? ЗЛП неограничена. Стоп.
5. **Ведущая строка:** $r = \arg\min_{i:\, a_{is}>0} \bar{b}_i / a_{is}$.
6. **Пивотная операция:** смена базиса (x_s входит, x_{B_r} выходит).
7. Перейти к шагу 2.

6. Полный пример: 2 переменные

Решим пример 1 полностью методом симплекса.
Начальная таблица:

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	b
s_1	6	4	1	0	24
s_2	1	2	0	1	6
z	-5	-4	0	0	0

Итерация 1: $\bar{c}_1 = -5$ наименьший $\Rightarrow$ x_1 входит. Отношения: $24/6 = 4$, $6/1 = 6$. Минимум: $4 \Rightarrow$ s_1 выходит. Ведущий элемент: **6**.

Пивот: строка 1 $\div 6$; строка 2 $-1\cdot$строка 1; строка z $+5\cdot$строка 1.

Таблица после итерации 1:

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	1	$2/3$	$1/6$	0	4
s_2	0	$4/3$	$-1/6$	1	2
z	0	$-2/3$	$5/6$	0	20

Итерация 2: $\bar{c}_2 = -2/3 < 0 \Rightarrow$ x_2 входит. Отношения: $4/(2/3) = 6$, $2/(4/3) = 3/2$. Минимум: $3/2 \Rightarrow$ s_2 выходит. Ведущий: **4/3**.

Пивот: строка 2 $\cdot\frac{3}{4}$; строка 1 $-\frac{2}{3}\cdot$строка 2; строка z $+\frac{2}{3}\cdot$строка 2.

Таблица после итерации 2 (оптимальная):

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	1	0	$1/4$	$-1/2$	3
x_2	0	1	$-1/8$	$3/4$	$3/2$
z	0	0	$3/4$	$1/2$	**19,5**

Все приведённые стоимости ≥ 0: **оптимум достигнут.**

$$\boxed{x_1^* = 3, \quad x_2^* = 1{,}5, \quad z^* = 19{,}5}$$

7. Расширенный пример: 5 переменных, 4 ограничения

Пример 2: Планирование производственной программы

$$\max \; z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 2x_5$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 &\leq 240 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 &\leq 270 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 &\leq 420 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 &\leq 350 \\ x_1, \ldots, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

После введения переменных отклонения $s_1, \ldots, s_4$ получаем ЗЛП с 9 переменными и 4 уравнениями. Инструмент симплекса вычисляет оптимальное решение.

Замечание: При 5 переменных и 4 ограничениях алгоритм может обойти до $\binom{9}{4} = 126$ базисных решений. На практике итераций значительно меньше.

8. Двойственность

8.1. Двойственная задача линейного программирования

Для каждой задачи линейного программирования — **прямой задачи** — существует связанная **двойственная задача**. Двойственность является одним из фундаментальных понятий линейного программирования.

Определение: Прямая и двойственная задачи

Пусть **прямая задача** задана как:

$$\text{(P)} \quad \max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{unter} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Тогда соответствующая **двойственная задача**:

$$\text{(D)} \quad \min \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \quad \text{unter} \quad \mathbf{A}^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

Переменные $y_i \geq 0$ называются **двойственными переменными** или **теневыми ценами**.

Правила построения:

- Двойственная задача имеет столько переменных y_i, сколько ограничений у прямой (m штук).
- Двойственная задача имеет столько ограничений, сколько переменных у прямой (n штук).
- Матрица коэффициентов двойственной задачи — **транспонированная** $\mathbf{A}^\top$ прямой.
- Прямая max $\rightarrow$ двойственная min; прямая $\leq \rightarrow$ двойственная $\geq$.

Пример 1 (продолжение): Двойственная задача

Прямая задача:

$$\max \; z = 5x_1 + 4x_2 \quad \text{u.d.N.} \quad 6x_1 + 4x_2 \leq 24, \quad x_1 + 2x_2 \leq 6, \quad x_1, x_2 \geq 0$$

Соответствующая двойственная задача:

$$\min \; w = 24y_1 + 6y_2 \quad \text{u.d.N.} \quad 6y_1 + y_2 \geq 5, \quad 4y_1 + 2y_2 \geq 4, \quad y_1, y_2 \geq 0$$

8.2. Теоремы слабой и сильной двойственности

Теорема 3: Теорема слабой двойственности

Пусть $\mathbf{x}$ — допустимое решение (P), а $\mathbf{y}$ — допустимое решение (D). Тогда:

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$$

Доказательство. Da $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ und $\mathbf{A}^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$:

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq (\mathbf{A}^\top \mathbf{y})^\top \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{y}^\top \mathbf{b} = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$$

□

Следствие: Любое допустимое решение двойственной задачи даёт **верхнюю оценку** оптимального значения прямой задачи. Оптимальное значение прямой задачи всегда лежит в интервале $[\mathbf{c}^\top \mathbf{x}, \mathbf{b}^\top \mathbf{y}]$ для любых допустимых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

Теорема 4: Теорема сильной двойственности

Если (P) имеет конечное оптимальное решение $\mathbf{x}^*$, то и (D) имеет конечное оптимальное решение $\mathbf{y}^*$, и при этом:

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}^*$$

Идея доказательства. В оптимальной таблице симплекса строка целевой функции под переменными отклонения s_i содержит значение y_i^* (с правильным знаком). Поскольку все приведённые стоимости ≥ 0 и все правые части ≥ 0, вектор $\mathbf{y}^* = \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1}$ является и двойственно допустимым, и оптимальным. Равенство $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}^*$ следует из условий дополняющей нежёсткости. □

8.3. Условие дополняющей нежёсткости

Теорема 5: Условие дополняющей нежёсткости (УДН)

$\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ одновременно оптимальны для (P) и (D) тогда и только тогда, когда:

$$y_i^* \cdot (b_i - \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, m \tag{4}$$

$$x_j^* \cdot (\mathbf{a}_j^\top \mathbf{y}^* - c_j) = 0 \quad \forall\, j = 1, \ldots, n \tag{5}$$

Интерпретация:

- (4): Если $y_i^* > 0$ (двойственная переменная активна), то i-е прямое ограничение должно быть **активным** ($b_i - \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}^* = 0$, нет зазора).
- (5): Если $x_j^* > 0$ (прямая переменная активна), то j-е двойственное ограничение должно быть активным.

9. Теневые цены

9.1. Экономическая интерпретация двойственных переменных

Определение: Теневая цена

Теневая цена y_i^* i-го ограничения показывает, насколько изменяется оптимальное значение z^* при увеличении правой части b_i на одну единицу — при условии, что текущий оптимальный базис сохраняется:

$$y_i^* = \frac{\partial z^*}{\partial b_i}$$

Вывод: В оптимальной таблице $\mathbf{x}_B^* = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$. Изменение $\Delta\mathbf{b}$ приводит к:

$$\Delta z^* = \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1}\Delta\mathbf{b} = (\mathbf{y}^*)^\top \Delta\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \cdot \Delta b_i$$

Теневые цены можно считать непосредственно из оптимальной таблицы: они находятся в строке целевой функции под столбцами переменных отклонения s_i.

9.2. Область действия теневых цен

Линейное соотношение $\Delta z^* = \mathbf{y}^{*\top}\Delta\mathbf{b}$ справедливо лишь пока **оптимальный базис остаётся неизменным**. Область допустимых изменений определяется из условия $\mathbf{A}_B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) \geq \mathbf{0}$:

$$\Delta b_i \in \left[-\frac{(\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b})_k}{(\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{e}_i)_k},\ \ldots \right] \quad \text{für alle } k \text{ mit } (\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{e}_i)_k > 0$$

Пример 1 (продолжение): Теневые цены

В оптимальной таблице (после двух итераций) строка целевой функции под s_1 и s_2 содержит:

$$y_1^* = \frac{3}{4}, \qquad y_2^* = \frac{1}{2}$$

Интерпретация:

- Один дополнительный машинный час ($b_1 = 25$ вместо 24) увеличивает z^* на $0{,}75$ д.е.
- Одна дополнительная складская единица ($b_2 = 7$ вместо 6) увеличивает z^* на $0{,}5$ д.е.
- Оба ограничения **активны**: $s_1^* = s_2^* = 0$. Поэтому обе теневые цены положительны.

Проверка через двойственный оптимум:

$$w^* = 24 \cdot \tfrac{3}{4} + 6 \cdot \tfrac{1}{2} = 18 + 3 = 21 = z^* \checkmark$$

10. Алгоритм двойственного симплекса

10.1. Мотивация

Прямой симплекс всегда поддерживает **прямую допустимость** (все $\bar{b}_i \geq 0$) и стремится к **двойственной допустимости** (все $\bar{c}_j \geq 0$). **Двойственный симплекс** поступает наоборот: он начинает с двойственно допустимой, но прямо недопустимой таблицы и шаг за шагом восстанавливает прямую допустимость.

Определение: Двойственно допустимая таблица

Таблица называется **двойственно допустимой**, если все приведённые стоимости неотрицательны: $\bar{c}_j \geq 0$ для всех j. Однако она может быть прямо недопустимой: $\bar{b}_i < 0$ хотя бы для одного i.

Типичные применения:

- Задачи с ограничениями типа $\geq$ (двойственно допустимы после умножения на -1)
- **Анализ чувствительности:** после изменения правой части **b** текущая оптимальная таблица может стать прямо недопустимой — двойственный симплекс эффективно переоптимизирует.
- Метод ветвей и границ в целочисленном программировании

10.2. Алгоритм

Алгоритм: двойственный симплекс

1. **Инициализация:** составить двойственно допустимую начальную таблицу ($\bar{c}_j \geq 0$ для всех j).
2. **Проверка прямой допустимости:** $\bar{b}_i \geq 0$ для всех i? Решение **прямо и двойственно оптимально**. Стоп.
3. **Ведущая строка:** выбрать $r = \arg\min_i \bar{b}_i < 0$ (наиболее отрицательная правая часть).
4. **Проверка недопустимости:** $a_{rj} \geq 0$ для всех j? ЗЛП **недопустима**. Стоп.
5. **Ведущий столбец:** выбрать s по **двойственному крите-**

рию минимального отношения:

$$s = \arg\min_{j:\, a_{rj} < 0} \frac{\bar{c}_j}{|a_{rj}|}$$

6. **Пивотная операция:** выполнить смену базиса.
7. Перейти к шагу 2.

Доказательство: двойственная допустимость сохраняется. После пивотной операции с ведущим элементом $a_{rs} < 0$ приведённая стоимость $\bar{c}_j$ изменяется:

$$\bar{c}'_j = \bar{c}_j - \frac{a_{rj}}{a_{rs}} \cdot \bar{c}_s$$

Поскольку $\bar{c}_s = 0$ (базисная переменная до пивота), $\bar{c}_j$ для небазисных переменных $j \neq s$ изменяется согласно:

$$\bar{c}'_j = \bar{c}_j - \frac{a_{rj}}{a_{rs}} \cdot \bar{c}_s^{(\text{neu})}$$

Die Pivotspaltenregel $s = \arg\min_{a_{rj}<0} \bar{c}_j/|a_{rj}|$ garantiert $\bar{c}'_j \geq 0$ für alle j. □

10.3. Полный пример: двойственный симплекс

Пример 3: Двойственный симплекс

$$\max\ z = -2x_1 - 3x_2 \qquad (\text{äquivalent: } \min\ 2x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 \quad \Rightarrow \quad -x_1 - x_2 \leq -4 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 6 \quad \Rightarrow \quad -2x_1 - x_2 \leq -6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Начальная таблица (после преобразования; переменные отклонения s_1, s_2):

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	b
s_1	-1	-1	1	0	-4
s_2	-2	-1	0	1	-6
z	-2	-3	0	0	0

Двойственно допустима? Все $\bar{c}_j \leq 0$ в строке z (учитывая знаки: $-(-2) = 2 \geq 0$, $-(-3) = 3 \geq 0$). ✓

Итерация 1: Ведущая строка: $r = 2$ ($\bar{b}_2 = -6$ наиболее отрицательна). Двойственные отношения: $\bar{c}_1/|a_{21}| = 2/2 = 1$, $\bar{c}_2/|a_{22}| = 3/1 = 3$. Минимум: $s = 1$ (x_1 входит). Ведущий элемент: $a_{21} = -2$.

Таблица после итерации 1:

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	b
s_1	0	$-1/2$	1	$-1/2$	-1
x_1	1	$1/2$	0	$-1/2$	3
z	0	-2	0	-1	6

Итерация 2: Ведущая строка: $r = 1$ ($\bar{b}_1 = -1$). Двойственные отношения: $\bar{c}_2/|a_{12}| = 2/(1/2) = 4$, $\bar{c}_4/|a_{14}| = 1/(1/2) = 2$. Минимум: $s = 4$ (s_2 входит). Ведущий элемент: $a_{14} = -1/2$.

Оптимальная таблица:

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	b
s_2	0	1	-2	1	2
x_1	1	1	-1	0	2
z	0	0	-2	0	**8**

Все $\bar{b}_i \geq 0$: **прямо и двойственно оптимально.**

$$\boxed{x_1^* = 2, \quad x_2^* = 0, \quad z^* = -8 \ (\min\ 2x_1 + 3x_2 = 4 \Rightarrow z^*_{\min} = 4)}$$

11. Особые случаи

11.1. Неограниченная задача

Определение: Неограниченность

ЗЛП **неограничена**, если $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{F}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = +\infty$.

Обнаружение: На шаге 4: все элементы ведущего столбца ≤ 0 — минимальное отношение не существует.

11.2. Недопустимая задача

Определение: Недопустимость

ЗЛП **недопустима**, если $\mathcal{F} = \emptyset$.

Это происходит при противоречивых ограничениях (напр. $x_1 \leq 2$ и $x_1 \geq 5$). При ограничениях $\geq$ нет очевидного начального базиса — нужен **двухфазный метод** или **метод большого M**.

11.3. Вырожденность

Определение: Вырожденность

ДБР **вырождено**, если хотя бы одна базисная переменная равна нулю.

При вырожденности правило минимального отношения даёт 0 (**зависание**). Теоретически возможен цикл — на практике предотвращается **правилом Блэнда** или лексикографическим правилом.

Теорема: Сходимость симплекса (невырожденный случай)

При отсутствии вырожденных ДБР алгоритм завершается за конечное число шагов с оптимальным решением или установлением неограниченности.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{F}$ имеет конечное число вершин и целевая функция *строго* возрастает, ни одна вершина не посещается дважды. Алгоритм завершается не более чем за $\binom{n}{m}$ шагов. □

12. Вычислительная сложность и практические замечания

12.1. Теоретическая сложность

Число вершин ЗЛП может быть экспоненциальным (пример Кли—Минти, 1972). Тем не менее метод симплекса очень эффективен на практике:

- Типичное число итераций: $O(m)$ до $O(3m)$
- **Полиномиальные алгоритмы:** метод эллипсоидов (Хачиян, 1979) и метод внутренней точки (Кармаркар, 1984) теоретически полиномиальны, но медленнее на практике.

12.2. Двойственность

Для каждой ЗЛП (прямой) существует **двойственная ЗЛП**. **Теорема сильной двойственности**: при допустимости обеих задач их оптимальные значения совпадают. Двойственные переменные (теневые цены) содержатся в оптимальной таблице.

12.3. Практические замечания

- Для больших задач ($n, m > 10^4$) — **пересмотренный симплекс** или методы внутренней точки.

- **Программное обеспечение:** CPLEX, Gurobi, GLPK, SciPy (Python), linprog (MATLAB).
- Для **целочисленных** переменных одного симплекса недостаточно — нужен метод ветвей и границ.

13. Резюме

Ключевые положения метода симплекса

1. **Оптимум всегда в вершине** допустимого множества (основная теорема).
2. Вершины соответствуют **допустимым базисным решениям**: m в базисе, $n - m$ равны нулю.
3. Симплекс переходит от вершины к вершине, **улучшая целевую функцию**.
4. **Ведущий столбец** — наиболее отрицательная приведённая стоимость.
5. **Ведущая строка** — правило минимального отношения (допустимость).
6. **Оптимальность**: все приведённые стоимости ≥ 0.
7. **Неограниченность**: в ведущем столбце нет положительных элементов.
8. Завершение гарантировано при отсутствии **вырожденности**.
9. Для каждой ЗЛП есть **двойственная**. В оптимуме $z^* = w^*$ (теорема сильной двойственности).
10. **Теневые цены** y_i^* — ценность дополнительной единицы i-го ресурса.
11. **Двойственный симплекс** начинает с двойственной допустимости и шаг за шагом восстанавливает прямую.
12. **УДН:** активное прямое ограничение $\Leftrightarrow$ положительная теневая цена.