Сборник задач

Симплекс-метод – линейное программирование

Русский

Вольфганг Бёме

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Уровень 1: Лёгкий **2**
Задача 1.1 2
Задача 1.2 4

2 Уровень 2: Средний **5**
Задача 2.1 5
Задача 2.2 7

3 Уровень 3: Сложный **9**
Задача 3.1 9
Задача 3.2 11

1 Уровень 1: Лёгкий

Задача 1.1 – Планирование производства (2 переменные, 2 ограничения)

Задача 1.1

Предприятие выпускает два продукта A и B.

- Маржинальная прибыль: 3 ден. ед. за единицу A, 5 ден. ед. за единицу B
- Машинное время: A требует 1 ч, B требует 2 ч; мощность: 8 ч
- Складские мощности: A требует 3 ед., B требует 2 ед.; мощность: 12 ед.

Требуется: производственная программа, максимизирующая маржинальную прибыль.

Постановка задачи:

$$\max\ z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 12 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Решение: Задача 1.1

Шаг 1: определение вершин допустимой области.
Вершины получаются как точки пересечения прямых:

- $O = (0,\ 0)$: $z = 0$
- $P_1 = (4,\ 0)$: пересечение $3x_1 + 2x_2 = 12$ с $x_2 = 0 \quad \Rightarrow z = 12$
- $P_2 = (1,\ 3{,}5)$: пересечение обеих прямых $\quad \Rightarrow z = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3{,}5 = 20{,}5$
- $P_3 = (0,\ 4)$: пересечение $x_1 + 2x_2 = 8$ с $x_1 = 0 \quad \Rightarrow z = 20$

Шаг 2: расчёт точки пересечения P_2.

$$x_1 + 2x_2 = 8 \quad \text{и} \quad 3x_1 + 2x_2 = 12$$

Вычитание: $2x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 2$, подстановка: $2 + 2x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = 3$.
Уточнение: $P_2 = (2,\ 3)$, $z = 6 + 15 = 21$.
Шаг 3: определение оптимума.

Вершина	x_1	x_2	z
O	0	0	0
P_1	4	0	12
P_2	2	3	**21**
P_3	0	4	20

Оптимум: $x_1^* = 2,\ x_2^* = 3,\ z^* = \mathbf{21}$

Интерпретация: 2 единицы A и 3 единицы B максимизируют маржинальную прибыль до 21 ден. ед.

Задача 1.2 – Задача о диете (минимизация, 2 переменные)

Задача 1.2

Диету нужно составить из двух продуктов L_1 и L_2.

- Стоимость: 2 € за единицу L_1, 3 € за единицу L_2
- Белки: L_1 даёт 4 г, L_2 даёт 2 г; минимальная потребность: 16 г
- Калории: L_1 даёт 3 ккал, L_2 даёт 6 ккал; минимальная потребность: 24 ккал

Требуется: состав диеты с минимальной стоимостью.

Постановка задачи:

$$\min \; z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &\geq 16 \\ 3x_1 + 6x_2 &\geq 24 \\ x_1,\, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Решение: Задача 1.2

Шаг 1: вершины допустимой области (минимизация = внешняя область).

- $P_1 = (0,\, 8)$: пересечение $4x_1 + 2x_2 = 16$ с $x_1 = 0 \quad \Rightarrow z = 24$
- P_2: точка пересечения обеих прямых
- $P_3 = (8,\, 0)$: пересечение $3x_1 + 6x_2 = 24$ с $x_2 = 0 \quad \Rightarrow z = 16$

Шаг 2: расчёт точки пересечения P_2.

$$4x_1 + 2x_2 = 16 \quad \text{и} \quad 3x_1 + 6x_2 = 24$$

Строка 1 $\times 3$: $12x_1 + 6x_2 = 48$; вычитание: $9x_1 = 24 \Rightarrow x_1 = \frac{8}{3}$, $x_2 = \frac{4 \cdot 8/3 - 16}{-2} \Rightarrow x_2 = \frac{8}{3}$.
$z(P_2) = 2 \cdot \frac{8}{3} + 3 \cdot \frac{8}{3} = \frac{40}{3} \approx 13{,}33$

Вершина	x_1	x_2	z
P_1	0	8	24
P_2	$8/3$	$8/3$	$40/3 \approx 13{,}33$
P_3	8	0	16

Оптимум: $x_1^* = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$, $x_2^* = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$, $z^* = \mathbf{\frac{40}{3}} \approx \mathbf{13{,}33}$ €

2 Уровень 2: Средний

Задача 2.1 – Ассортимент производства (3 переменные, 3 ограничения)

Задача 2.1

Компания производит три продукта P_1, P_2, P_3 со следующими данными:

	P_1	P_2	P_3	Мощность
Ресурс A (ч)	2	1	3	30
Ресурс B (ч)	1	3	1	24
Ресурс C (ч)	3	1	2	36
Маржинальная прибыль (ден. ед.)	5	4	6	–

Постановка задачи:

$$\max\ z = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 30 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 24 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 36 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Решение: Задача 2.1

Поскольку имеется 3 переменные, чисто геометрическое решение уже непрактично. Симплекс-алгоритм даёт после 2 итераций:
Шаг 1: начальная таблица (дополнительные переменные s_1, s_2, s_3, начальный базис: s_1, s_2, s_3).
Шаг 2: итерации.
Итерация 1: ведущий столбец x_3 (приведённый коэффициент -6). Правило отношений: $30/3 = 10$, $24/1 = 24$, $36/2 = 18$. Ведущая строка: ограничение 1. После шага замены: $x_3 = 10$ входит в базис.
Итерация 2: ведущий столбец x_1 (приведённый коэффициент -3). Правило отношений даёт ведущую строку – ограничение 3.
Результат после сходимости:

Переменная	Значение
x_1^*	6
x_2^*	0
x_3^*	6
z^*	**66**

Проверка ограничений:

$$2(6) + 0 + 3(6) = 30 \leq 30 \checkmark$$
$$6 + 0 + 6 = 12 \leq 24 \checkmark$$
$$3(6) + 0 + 2(6) = 30 \leq 36 \checkmark$$

Оптимум: $x_1^* = 6,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 6,\ z^* =$ **66**
Примечание: P_2 не производится (небазисная переменная с теневой ценой 0).

Задача 2.2 – Оптимизация перевозок (4 переменные)

Задача 2.2

Транспортная компания планирует рейсы с двумя типами транспортных средств F_1 (большое) и F_2 (малое) по двум маршрутам R_1 и R_2.

	F_1R_1 (x_1)	F_1R_2 (x_2)	F_2R_1 (x_3)	F_2R_2 (x_4)
Прибыль (ден. ед./рейс)	8	6	5	4
Часы водителя	3	2	2	1
Транспорт F_1 (рейсы)	1	1	0	0
Транспорт F_2 (рейсы)	0	0	1	1

Доступные часы водителей: 24, макс. рейсов F_1: 6, макс. рейсов F_2: 8.

Постановка задачи:

$$\max \; z = 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &\leq 24 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_3 + x_4 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Решение: Задача 2.2

Анализ: поскольку ограничения 2 и 3 содержат лишь по две переменные, подзадачи можно анализировать отдельно.

Подзадача 1 (F_1, ограничение 2): чтобы максимизировать $8x_1 + 6x_2$ при $x_1 + x_2 \leq 6$, выбираем x_1 максимальным. С учётом ограничения 1 (часы водителей): при $x_1 = 6$ расходуется 18 ч.

Результат симплекс-метода после сходимости:

Часы водителей являются связывающим узким местом. Оптимальное распределение: $x_1 = 6$ (все рейсы F_1 на R_1), $x_2 = 0$. Оставшиеся часы водителей: $24 - 18 = 6$. Для F_2: $2x_3 + x_4 \leq 6$ и $x_3 + x_4 \leq 8$. Оптимум: $x_3 = 0$, $x_4 = 6$.

Переменная	Значение
x_1^* (F_1, R_1)	6
x_2^* (F_1, R_2)	0
x_3^* (F_2, R_1)	0
x_4^* (F_2, R_2)	6
z^*	**72**

Проверка: $3(6) + 0 + 0 + 6 = 24 \leq 24$✓; $6 + 0 = 6 \leq 6$✓; $0 + 6 = 6 \leq 8$✓
Оптимум: $z^* = \mathbf{72}$ ден. ед.

3 Уровень 3: Сложный

Задача 3.1 – Многопериодное производство (5 переменных)

Задача 3.1

Компания планирует использование пяти видов деятельности $x_1, \ldots, x_5$ с использованием трёх ресурсов.

$$\max \; z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 2x_5$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 &\leq 240 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 &\leq 270 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 &\leq 420 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 &\leq 350 \\ x_1, \ldots, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Это пример из CSV-файла симплекс-инструмента. Определи оптимальное решение и проинтерпретируй теневые цены ограничений.

Решение: Задача 3.1

Оптимальное решение (рассчитано с помощью симплекс-инструмента):

Переменная	Значение	Интерпретация
x_1^*	0	Вид деятельности 1 не выбран
x_2^*	0	Вид деятельности 2 не выбран
x_3^*	0	Вид деятельности 3 не выбран
x_4^*	48	Вид деятельности 4 задействован максимально
x_5^*	0	Вид деятельности 5 не выбран
z^*	**288**	

Проверка ограничений при $x_4 = 48$**:**

$$\begin{aligned} 5 \cdot 48 = 240 \leq 240 \checkmark \quad &\text{(связывающее)} \\ 4 \cdot 48 = 192 \leq 270 \checkmark \quad &\text{(резерв: 78)} \\ 2 \cdot 48 = 96 \leq 420 \checkmark \quad &\text{(резерв: 324)} \\ 3 \cdot 48 = 144 \leq 350 \checkmark \quad &\text{(резерв: 206)} \end{aligned}$$

Теневые цены (из оптимальной таблицы, строка целевой функции):

- Ограничение 1 **связывающее**: теневая цена $= 6/5 = 1{,}2$ ден. ед. за дополнительную единицу мощности.
- Ограничения 2–4 не связывающие: теневые цены $= 0$ (дополнительная мощность не приносит выгоды).

Интерпретация: используется только вид деятельности 4 с наибольшей маржинальной прибылью (6 ден. ед.), поскольку у него лучшее соотношение с расходом ресурса по ограничению 1 (5 единиц): $6/5 = 1{,}2$. У всех остальных видов деятельности соотношение хуже.
Оптимум: $x_4^* = 48$, все остальные $= 0$, $z^* =$ **288**

Задача 3.2 – Анализ чувствительности

Задача 3.2

Дана следующая ЛП-задача:

$$\max \; z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 18 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 24 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Определи оптимальное решение.
(b) На сколько можно увеличить коэффициент целевой функции c_1, чтобы оптимальный базис не изменился? (анализ чувствительности)
(c) Правая часть ограничения 1 меняется на $b_1 = 20$. Как изменится оптимальное значение?

Решение: Задача 3.2

Часть (a): оптимальное решение
Симплекс-алгоритм даёт:

Переменная	Значение
x_1^*	0
x_2^*	6
x_3^*	0
z^*	**30**

Проверка: $3(6) = 18 \leq 18$✓; $6 \leq 12$✓; $2(6) = 12 \leq 24$✓

Часть (b): анализ чувствительности для c_1
В оптимальной таблице приведённый коэффициент x_1 равен:

$$\bar{c}_1 = c_1 - \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{a}_1$$

С оптимальным базисом $\{x_2\}$ (ограничение 1 связывающее) и $\mathbf{c}_B = (5)$:

$$\bar{c}_1 = c_1 - 5 \cdot \tfrac{2}{3} = c_1 - \tfrac{10}{3}$$

Текущий базис остаётся оптимальным, пока $\bar{c}_1 \leq 0$, то есть:

$$c_1 \leq \tfrac{10}{3} \approx 3{,}33$$

Поскольку $c_1 = 4 > \frac{10}{3}$: базис уже **не оптимален**!

Корректный базис после полного прогона симплекс-метода: $x_1^* = 8$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, $z^* = 32$.

Часть (c): изменение правой части ($b_1 = 20$)
Теневая цена ограничения 1 в оптимуме равна $y_1 = 5/3$.
Изменение оптимального значения:

$$\Delta z = y_1 \cdot \Delta b_1 = \tfrac{5}{3} \cdot (20 - 18) = \tfrac{5}{3} \cdot 2 = \tfrac{10}{3} \approx 3{,}33$$

Новое оптимальное значение: $z^* = 30 + \frac{10}{3} = \frac{100}{3} \approx 33{,}33$
Итог: $z^*(a) = 30$; базис меняется при $c_1 > 10/3$; $z^*(c) \approx 33{,}33$
