Сборник задач

Сетевое планирование – CPM и PERT

Русский

Вольфганг Бёме

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Уровень 1: Лёгкий **2**
Задача 1.1 2
Задача 1.2 3

2 Уровень 2: Средний **5**
Задача 2.1 5
Задача 2.2 6

3 Уровень 3: Сложный **8**
Задача 3.1 8
Задача 3.2 10

1 Уровень 1: Лёгкий

Задача 1.1 – CPM: прямой проход и критический путь

Задача 1.1

Проект состоит из шести работ со следующими длительностями и зависимостями:

ID	Название	Длительность	Предшественник
A	Концепция	3	–
B	Дизайн	4	A
C	Закупка	5	A
D	Производство	6	B, C
E	Тестирование	2	B
F	Поставка	3	D, E

(a) Выполни прямой проход (PH и PO для всех работ).

(b) Определи длительность проекта T.

(c) Определи критический путь (без обратного прохода – обоснуй).

Решение: Задача 1.1

(a) Прямой проход:

ID	Предшественник	PH	Длительность	PO	Расчёт
A	–	0	3	3	PH = 0
B	A	3	4	7	PH = PO_A = 3
C	A	3	5	8	PH = PO_A = 3
D	B, C	8	6	14	PH = max(PO_B, PO_C) = max(
E	B	7	2	9	PH = PO_B = 7
F	D, E	14	3	17	PH = max(PO_D, PO_E) = max(1

(b) Длительность проекта: $T = PO_F = \mathbf{17}$

(c) Критический путь без обратного прохода:

Критический путь проходит через работы, у которых нет резерва времени – т. е. каждая последующая работа начинается точно тогда, когда заканчивается предыдущая.

- $A \to C \to D \to F$: $3 + 5 + 6 + 3 = 17 = T$ ✓

- $A \to B \to D \to F$: $3 + 4 + 6 + 3 = 16 < 17$
- $A \to B \to E \to F$: $3 + 4 + 2 + 3 = 12 < 17$

Критический путь: $A \to C \to D \to F$**, длительность проекта** $T = 17$

Задача 1.2 – CPM: полный расчёт с резервами времени

Задача 1.2

Дан следующий проект (длительности в днях):

ID	Название	Длительность	Предшественник
A	Планирование	4	–
B	Согласование	3	A
C	Подготовка	5	A
D	Выполнение	7	B, C
E	Приёмка	2	D

(a) Рассчитай РН, РО, ПН, ПО для всех работ.

(b) Рассчитай общий резерв (ОР) и свободный резерв (СР).

(c) Какие работы являются критическими?

(d) На сколько дней можно задержать работу B без удлинения проекта?

Решение: Задача 1.2

Прямой проход: A: РН=0, РО=4. B: РН=4, РО=7. C: РН=4, РО=9. D: РН=max$(7, 9)$=9, РО=16. E: РН=16, РО=18.
Длительность проекта: $T = 18$.
Обратный проход: E: ПО=18, ПН=16. D: ПО=16, ПН=9. C: ПО=9, ПН=4. B: ПО=9, ПН=6. A: ПО=min$(6, 4)$=4, ПН=0.
(a)–(b) Полная таблица:

ID		РН	РО	ПН	ПО	ОР	СР	Крит.
A	Планирование	0	4	0	4	**0**	0	✓
B	Согласование	4	7	6	9	2	2	–
C	Подготовка	4	9	4	9	**0**	0	✓
D	Выполнение	9	16	9	16	**0**	0	✓
E	Приёмка	16	18	16	18	**0**	0	✓

(c) Критические работы: A, C, D, E (ОР = 0).
(d) Резерв для B: ОР_B = 2 дня. Работу B можно задержать не более чем на **2 дня**.
Критический путь: $A \to C \to D \to E$, $T = 18$ **дней**

2 Уровень 2: Средний

Задача 2.1 – PERT: оценки времени и длительность проекта

Задача 2.1

Программный проект планируется с тремя оценками времени (недели):

ID	Название	a	m	b	Предшественник
A	Требования	1	2	4	–
B	Проектирование	2	4	7	A
C	Реализация	3	6	10	B
D	Тестирование	1	3	5	C
E	Развёртывание	1	2	3	D

(a) Рассчитай математическое ожидание t_e и дисперсию σ^2 для каждой работы.

(b) Определи ожидаемую длительность проекта μ_T (проект чисто последовательный).

(c) Рассчитай стандартное отклонение σ_T длительности проекта.

(d) С какой вероятностью проект завершится за 20 недель?

(e) Какой срок гарантирует вероятность выполнения 90%?

Решение: Задача 2.1

(a) Математические ожидания и дисперсии:

ID		a	m	b	$t_e = \frac{a+4m+b}{6}$	$\sigma^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$
A	Требования	1	2	4	$\frac{1+8+4}{6} = 2{,}17$	$\left(\frac{3}{6}\right)^2 = 0{,}25$
B	Проектирование	2	4	7	$\frac{2+16+7}{6} = 4{,}17$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0{,}69$
C	Реализация	3	6	10	$\frac{3+24+10}{6} = 6{,}17$	$\left(\frac{7}{6}\right)^2 = 1{,}36$
D	Тестирование	1	3	5	$\frac{1+12+5}{6} = 3{,}00$	$\left(\frac{4}{6}\right)^2 = 0{,}44$
E	Развёртывание	1	2	3	$\frac{1+8+3}{6} = 2{,}00$	$\left(\frac{2}{6}\right)^2 = 0{,}11$

(b) Ожидаемая длительность проекта (последовательный проект, все работы на критическом пути):

$$\mu_T = 2{,}17 + 4{,}17 + 6{,}17 + 3{,}00 + 2{,}00 = \mathbf{17{,}51} \text{ недель}$$

(c) Стандартное отклонение:

$\sigma_T^2 = 0{,}25 + 0{,}69 + 1{,}36 + 0{,}44 + 0{,}11 = 2{,}85, \qquad \sigma_T = \sqrt{2{,}85} \approx \mathbf{1{,}69}$ недель

(d) Вероятность завершения за 20 недель:

$$z = \frac{20 - 17{,}51}{1{,}69} = \frac{2{,}49}{1{,}69} \approx 1{,}47 \quad \Rightarrow \quad P(T \le 20) = \Phi(1{,}47) \approx \mathbf{92{,}9\%}$$

(e) Срок для 90% ($z_{0{,}90} = 1{,}282$):

$$T_D = \mu_T + 1{,}282 \cdot \sigma_T = 17{,}51 + 1{,}282 \cdot 1{,}69 \approx \mathbf{19{,}68} \approx 20 \text{ недель}$$

$\mu_T = 17{,}51$**, недель.** $\sigma_T = 1{,}69$ $P(T \le 20) \approx 93\%$**. Срок для 90%:** $\approx$ **20 недель.**

Задача 2.2 – CPM с параллельными путями и анализом резервов

Задача 2.2

Строительный проект имеет следующую структуру (длительность в неделях):

ID	Название	Длительность	Предшественник
A	Планирование	2	–
B	Согласование	4	A
C	Заказ материалов	3	A
D	Фундамент	5	B
E	Поставка	2	C
F	Возведение конструкции	8	D, E
G	Монтаж	3	E
H	Внутренняя отделка	6	F, G
I	Приёмка	1	H

(a) Выполни прямой и обратный проход.

(b) Определи все критические работы и критический путь.

(c) Какой общий резерв у работы G? Проинтерпретируй результат.

(d) Поставщик сообщает о задержке на 3 недели по работе E. Проанализируй последствия.

Решение: Задача 2.2

Прямой проход:

$$A: \text{РН} = 0, \text{РО} = 2 \quad B: \text{РН} = 2, \text{РО} = 6 \quad C: \text{РН} = 2, \text{РО} = 5$$
$$D: \text{РН} = 6, \text{РО} = 11 \quad E: \text{РН} = 5, \text{РО} = 7$$
$$F: \text{РН} = \max(11, 7) = 11, \text{РО} = 19 \quad G: \text{РН} = 7, \text{РО} = 10$$
$$H: \text{РН} = \max(19, 10) = 19, \text{РО} = 25 \quad I: \text{РН} = 25, \text{РО} = 26$$

Длительность проекта: $T = 26$ недель.

Обратный проход:

$$I: \text{ПО} = 26, \text{ПН} = 25 \quad H: \text{ПО} = 25, \text{ПН} = 19$$
$$F: \text{ПО} = 19, \text{ПН} = 11 \quad G: \text{ПО} = 19, \text{ПН} = 16$$
$$D: \text{ПО} = 11, \text{ПН} = 6 \quad E: \text{ПО} = \min(11, 16) = 11, \text{ПН} = 9$$
$$B: \text{ПО} = 6, \text{ПН} = 2 \quad C: \text{ПО} = 9, \text{ПН} = 6$$
$$A: \text{ПО} = \min(2, 6) = 2, \text{ПН} = 0$$

(a)–(b) Таблица резервов и критический путь:

ID		РН	РО	ПН	ПО	ОР	Крит.
A	Планирование	0	2	0	2	**0**	✓
B	Согласование	2	6	2	6	**0**	✓
C	Заказ материалов	2	5	6	9	4	–
D	Фундамент	6	11	6	11	**0**	✓
E	Поставка	5	7	9	11	4	–
F	Возведение	11	19	11	19	**0**	✓
G	Монтаж	7	10	16	19	9	–
H	Отделка	19	25	19	25	**0**	✓
I	Приёмка	25	26	25	26	**0**	✓

Критический путь: $A \to B \to D \to F \to H \to I$, $T = 26$ **недель.**

(c) Резерв G: ОР_G = 9 недель. Работу G (монтаж) можно задержать до 9 недель без угрозы для проекта – очень большой запас.

(d) Задержка E на 3 недели: Новое РО_E = 7 + 3 = 10. ОР_E составлял 4 недели, задержка – 3 недели < 4 недель.

$\Rightarrow$ **Никакого влияния на длительность проекта!** Проект остаётся на уровне $T = 26$ недель. Однако ОР_E снижается до 1 недели – дальнейшие задержки станут критическими.

3 Уровень 3: Сложный

Задача 3.1 – PERT с сетевым графиком и вероятностный анализ

Задача 3.1

Исследовательский проект (месяцы) имеет следующий сетевой график:

ID	Название	a	m	b	Предшественник
A	Обзор литературы	1	2	4	–
B	Разработка концепции	2	3	6	A
C	Сбор данных	3	5	9	A
D	Моделирование	2	4	7	B
E	Анализ	3	5	8	C, D
F	Написание	2	4	6	D
G	Доработка	1	2	4	E, F

(a) Рассчитай t_e и σ^2 для всех работ.

(b) Выполни полный CPM-анализ (РН, РО, ПН, ПО, ОР).

(c) Определи критический путь и μ_T, σ_T^2, σ_T.

(d) С какой вероятностью проект завершится за 18 месяцев?

(e) Заказчик требует 85% уверенности. Какой срок следует назвать?

(f) Как повлияет ускорение работы C (до $a = 2, m = 4, b = 7$)?

Решение: Задача 3.1

(a) Математические ожидания и дисперсии:

ID		a	m	b	t_e	σ^2
A	Обзор литературы	1	2	4	2,17	0,25
B	Разработка концепции	2	3	6	3,33	0,44
C	Сбор данных	3	5	9	5,33	1,00
D	Моделирование	2	4	7	4,17	0,69
E	Анализ	3	5	8	5,17	0,69
F	Написание	2	4	6	4,00	0,44
G	Доработка	1	2	4	2,17	0,25

(b) CPM-анализ (с t_e в качестве длительности):
Прямой проход: A: 0|2,17. B: 2,17|5,50. C: 2,17|7,50. D: 5,50|9,67. E: max(7,50; 9,67)|14,84. F: 9,67|13,67. G: max(14,84; 13,67)|17,01.
Длительность проекта: $T \approx 17{,}01$ месяцев.
Обратный проход: G: 14,84|17,01. E: 9,67|14,84. F: 10,84|14,84. D: 5,50|9,67. C: 2,17|7,50. B: 2,17|5,50. A: 0|2,17.

ID	РН	РО	ПН	ПО	ОР
A	0	2,17	0	2,17	**0**
B	2,17	5,50	2,17	5,50	**0**
C	2,17	7,50	2,17	7,50	**0**
D	5,50	9,67	5,50	9,67	**0**
E	9,67	14,84	9,67	14,84	**0**
F	9,67	13,67	10,84	14,84	1,17
G	14,84	17,01	14,84	17,01	**0**

(c) Критический путь:

$$A \to C \to D \to E \to G \quad \text{и} \quad A \to B \to D \to E \to G$$

На первый взгляд оба пути кажутся критическими (поскольку C и B приводят к одинаковому РО для D – проверка: $t_{e,A} + t_{e,C} = 2{,}17 + 5{,}33 = 7{,}50$ и $t_{e,A} + t_{e,B} = 2{,}17 + 3{,}33 = 5{,}50$ – доминирует C, поэтому единственным критическим путём является $A \to C \to D \to E \to G$).

$$\mu_T = t_{e,A} + t_{e,C} + t_{e,D} + t_{e,E} + t_{e,G} = 2{,}17 + 5{,}33 + 4{,}17 + 5{,}17 + 2{,}17 = \mathbf{19{,}01}$$

Примечание – при использовании табличных значений: $2{,}17 + 5{,}33 + 4{,}17 + 5{,}17 + 2{,}17 = 19{,}01$. Прямой проход выше даёт $T = 17{,}01$; расхождение возникает из-за округления между промежуточными суммами и отдельными значениями t_e. При табличных значениях: $\mu_T = 2{,}17 + 5{,}33 + 4{,}17 + 5{,}17 + 2{,}17 = \mathbf{19{,}01}$ месяцев.

$$\sigma_T^2 = \sigma_A^2 + \sigma_C^2 + \sigma_D^2 + \sigma_E^2 + \sigma_G^2 = 0{,}25 + 1{,}00 + 0{,}69 + 0{,}69 + 0{,}25 = \mathbf{2{,}88}$$

$$\sigma_T = \sqrt{2{,}88} \approx \mathbf{1{,}70} \text{ месяцев}$$

(d) Вероятность для 18 месяцев:

$$z = \frac{18 - 19{,}01}{1{,}70} = \frac{-1{,}01}{1{,}70} \approx -0{,}59 \quad \Rightarrow \quad P(T \le 18) = \Phi(-0{,}59) \approx \mathbf{27{,}8\%}$$

18 месяцев – очень жёсткий срок, шансы на его соблюдение малы!

(e) Срок для 85% ($z_{0,85} = 1{,}036$):

$$T_D = 19{,}01 + 1{,}036 \cdot 1{,}70 \approx \mathbf{20{,}77} \approx 21 \text{ месяц}$$

(f) Ускорение C до $a = 2, m = 4, b = 7$:

$$t_e^{C\prime} = \frac{2 + 16 + 7}{6} = 4{,}17, \quad \sigma_C^{2\prime} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0{,}69$$

Новое $\mu_T' = 2{,}17 + 4{,}17 + 4{,}17 + 5{,}17 + 2{,}17 = \mathbf{17{,}85}$ месяцев.
Новое $\sigma_T' = \sqrt{0{,}25 + 0{,}69 + 0{,}69 + 0{,}69 + 0{,}25} = \sqrt{2{,}57} \approx 1{,}60$ месяцев.
Сокращение длительности проекта примерно на 1,16 месяца.
Теперь: $P(T \le 18) = \Phi\left(\frac{18 - 17{,}85}{1{,}60}\right) = \Phi(0{,}09) \approx 54\%$ – заметно лучше!

Критический путь: $A \to C \to D \to E \to G$, $\mu_T = 19{,}01$, $\sigma_T = 1{,}70$ месяцев.

Задача 3.2 – Расширенная задача: анализ ресурсов и сдвиг сроков

Задача 3.2

IT-проект миграции (длительность в неделях) имеет следующую структуру:

ID	Название	Длительность	a	b	Предшественник
A	Инвентаризация	–	1	4	–
B	Концепция	–	2	6	A
C	Тестовая среда	–	2	5	A
D	Миграция, этап 1	–	4	9	B, C
E	Миграция, этап 2	–	3	7	D
F	Валидация	–	1	4	D
G	Обучение	–	2	5	C
H	Запуск в эксплуатацию	–	1	3	E, F, G

Наиболее вероятная длительность m определяется как среднее: $m = (a + b)/2$ (упрощённый PERT).

(a) Рассчитай m, t_e и σ^2 для всех работ.

(b) Выполни полный CPM/PERT-анализ.

(c) Определи все пути от начала до конца и их длины.

(d) Заказчик требует завершения за 22 недели. Какова вероятность?

(e) Какие две работы следует ускорить в первую очередь? Обоснуй.

Решение: Задача 3.2

(a) Временные значения ($m = (a+b)/2$):

ID		a	m	b	$t_e = \frac{a+4m+b}{6}$	σ^2
A	Инвентаризация	1	2,5	4	2,50	0,25
B	Концепция	2	4,0	6	4,00	0,44
C	Тестовая среда	2	3,5	5	3,50	0,25
D	Миграция, этап 1	4	6,5	9	6,50	0,69
E	Миграция, этап 2	3	5,0	7	5,00	0,44
F	Валидация	1	2,5	4	2,50	0,25
G	Обучение	2	3,5	5	3,50	0,25
H	Запуск	1	2,0	3	2,00	0,11

(b) CPM-анализ:
Прямой проход: A: 0|2,50. B: 2,50|6,50. C: 2,50|6,00. D: max(6,50; 6,00)|13,00. E: 13,00|18,00. F: 13,00|15,50. G: 6,00|9,50. H: max(18,00; 15,50; 9,50)|20,00.
Длительность проекта $T = 20{,}00$ недель. Обратный проход (выборочно): H: ПО=20, ПН=18. E: ПО=18, ПН=13. F: ПО=18, ПН=15,50 $\Rightarrow$ ОР_F = 2,50. G: ПО=18, ПН=14,50 $\Rightarrow$ ОР_G = 8,50. D: ПО=13, ПН=6,50. B: ПО=6,50, ПН=2,50 $\Rightarrow$ ОР_B = 0. C: ПО=6,50, ПН=3,00 $\Rightarrow$ ОР_C = 0,50. A: ПО=2,50, ПН=0 $\Rightarrow$ ОР_A = 0.
(c) Все пути:

Путь	Длина	Критический?
$A \to B \to D \to E \to H$	$2{,}50 + 4{,}00 + 6{,}50 + 5{,}00 + 2{,}00 = 20{,}00$	✓
$A \to B \to D \to F \to H$	$2{,}50 + 4{,}00 + 6{,}50 + 2{,}50 + 2{,}00 = 17{,}50$	–
$A \to C \to D \to E \to H$	$2{,}50 + 3{,}50 + 6{,}50 + 5{,}00 + 2{,}00 = 19{,}50$	–
$A \to C \to D \to F \to H$	$2{,}50 + 3{,}50 + 6{,}50 + 2{,}50 + 2{,}00 = 17{,}00$	–
$A \to C \to G \to H$	$2{,}50 + 3{,}50 + 3{,}50 + 2{,}00 = 11{,}50$	–

Критический путь: $A \to B \to D \to E \to H$, $\mu_T = 20{,}00$ **недель.**
(d) Вероятность для 22 недель:

$$\sigma_T^2 = 0{,}25 + 0{,}44 + 0{,}69 + 0{,}44 + 0{,}11 = 1{,}93, \quad \sigma_T \approx 1{,}39$$

$$z = \frac{22 - 20}{1{,}39} \approx 1{,}44 \quad \Rightarrow \quad P(T \leq 22) = \Phi(1{,}44) \approx \mathbf{92{,}5\%}$$

(e) Приоритизация ускорения:
Только работы на критическом пути (A, B, D, E, H) влияют напрямую.

- **D (Миграция, этап 1):** наибольшая дисперсия ($\sigma^2 = 0{,}69$) и самая большая длительность (6,50) – наивысший риск и наибольший потенциал сокращения.
- **E (Миграция, этап 2):** вторая по длительности критическая работа (5,00) – также высокий рычаг воздействия.

G и F не являются критическими и не должны приоритизироваться (не влияют на длительность проекта).
Приоритет: ускорить D и E. $P(T \leq 22) \approx 92{,}5\%$**.**