# Многокритериальная оптимизация

## Фронт Парето, метод взвешивания и метод $\varepsilon$-ограничений

Русский

**Вольфганг Бёме**

wolfgang.boehme@economic-modeling.de
www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

---

Данный документ вводит в многокритериальную оптимизацию. Предварительное условие: базовые знания линейного программирования.

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

# Содержание


**1 Введение и мотивация** **2**

**2 Основные понятия многокритериальной оптимизации** **2**
2.1 Общая задача многокритериальной оптимизации . . . . . 2
2.2 Идеальная и надир-точки . . . . . 3
2.3 Геометрическая интерпретация . . . . . 4

**3 Методы решения** **4**
3.1 Обзор . . . . . 4
3.2 Метод взвешивания (Weighted Sum) . . . . . 4
3.2.1 Выборка пространства весов . . . . . 5
3.3 Метод $\varepsilon$-ограничений . . . . . 5
3.3.1 Алгоритм: выборка методом $\varepsilon$-ограничений . . . . . 6
3.4 Сравнение методов . . . . . 6

**4 Полный пример** **6**
4.1 Постановка задачи . . . . . 6
4.2 Идеальная и надир-точки . . . . . 7
4.3 Метод взвешивания: выбранные решения . . . . . 7
4.4 Фронт Парето: графическое представление . . . . . 7
4.5 $\varepsilon$-ограничения: вычисление . . . . . 8

**5 Многокритериальная оптимизация при $k > 2$ критериях** **8**
5.1 Трудности при большом числе критериев . . . . . 8
5.2 Методы визуализации при $k > 2$ . . . . . 9
5.3 Пример: 3 критерия . . . . . 9

**6 Поддержка принятия решений: выбор решения** **9**
6.1 Методы выбора решения . . . . . 9
6.2 Нормировка . . . . . 10

**7 Вычислительная сложность и практические замечания** **10**
7.1 Сложность . . . . . 10
7.2 Практическое программное обеспечение . . . . . 10

**8 Резюме** **11**

# 1. Введение и мотивация

In der Praxis müssen Entscheidungen häufig mehrere, oft **konkurrierende Ziele** gleichzeitig berücksichtigen. Klassische Beispiele:

**Типичные многокритериальные задачи**

- **Оптимизация портфеля:** максимизация доходности *и* минимизация риска
- **Планирование производства:** максимизация прибыли *и* минимизация экологической нагрузки
- **Разработка транспортных средств:** минимизация расхода топлива *и* максимизация мощности
- **Логистика:** минимизация транспортных расходов *и* времени доставки
- **Медицина:** максимизация эффективности *и* минимизация побочных эффектов

Ключевая проблема: несколько критериев, как правило, **нельзя оптимизировать одновременно**. Улучшение одного критерия часто ухудшает другой (**компромисс**). Поэтому вместо единственного оптимального решения мы ищем множество всех *эффективных* компромиссных решений — **фронт Парето**.

# 2. Основные понятия многокритериальной оптимизации

## 2.1. Общая задача многокритериальной оптимизации

**Определение: Задача многокритериальной оптимизации (МКО)**

**Задача многокритериальной оптимизации** (МКО) имеет вид:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{F}} \mathbf{z}(\mathbf{x}) = \big(z_1(\mathbf{x}),\, z_2(\mathbf{x}),\, \ldots,\, z_k(\mathbf{x})\big)^{\top}$$

wobei $\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ der **Entscheidungsraum** und $\mathbf{z} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^k$ der **Zielraumabbildung** (Kriterienvektor) ist.
Задачи максимизации $\max z_i(\mathbf{x})$ преобразуются в $\min(-z_i(\mathbf{x}))$.

**Определение: Доминирование**

Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F}$ — два допустимых решения.

- **x доминирует y** (запись: $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$), если:
  1. $z_i(\mathbf{x}) \leq z_i(\mathbf{y})$ для всех $i = 1, \ldots, k$ (не хуже ни по одному критерию), и
  2. $z_j(\mathbf{x}) < z_j(\mathbf{y})$ хотя бы для одного $j$ (строго лучше хотя бы по одному критерию).
- **x** и **y несравнимы**, если ни $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, ни $\mathbf{y} \prec \mathbf{x}$.

**Определение: Оптимальность по Парето**

Решение $\mathbf{x}^* \in \mathcal{F}$ называется **Парето-оптимальным** (эффективным), если не существует другого допустимого решения $\mathbf{y} \in \mathcal{F}$, доминирующего $\mathbf{x}^*$:

$$\nexists\, \mathbf{y} \in \mathcal{F} : \mathbf{y} \prec \mathbf{x}^*$$

Множество всех Парето-оптимальных решений называется **множеством Парето** (в пространстве решений) или **фронтом Парето** (в пространстве критериев).

## 2.2. Идеальная и надир-точки

**Определение: Идеальная и надир-точки**

- **Идеальная точка** $\mathbf{z}^{\text{id}} \in \mathbb{R}^k$ содержит наилучшие достижимые значения каждого критерия:

  $$z_i^{\text{id}} = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}} z_i(\mathbf{x}) \quad \forall\, i$$

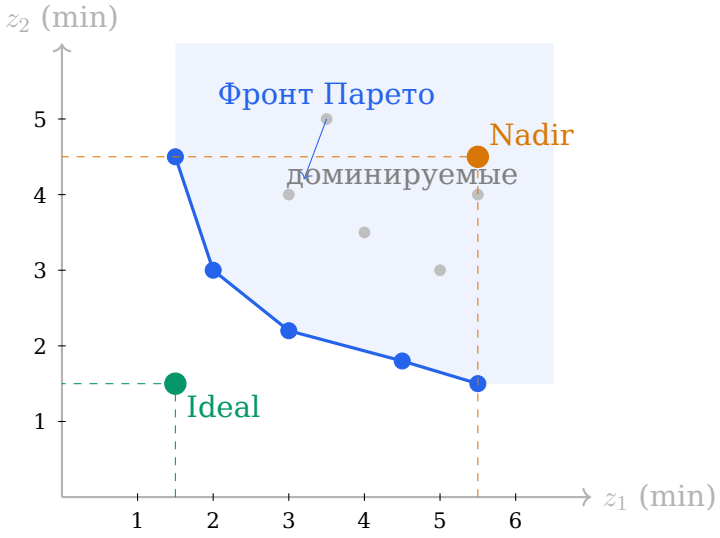
  Идеальная точка, как правило, **недостижима** (лежит вне фронта Парето).
- **Надир-точка** $\mathbf{z}^{\text{nad}} \in \mathbb{R}^k$ содержит наихудшие значения среди Парето-оптимальных решений:

  $$z_i^{\text{nad}} = \max_{\mathbf{x}^* \in \mathcal{P}} z_i(\mathbf{x}^*) \quad \forall\, i$$

  где $\mathcal{P}$ — множество Парето.

Область между идеальной и надир-точкой описывает **зону компромиссов** фронта Парето.

### 2.3. Геометрическая интерпретация




Синяя кривая — фронт Парето: ни одна точка на нём не может быть улучшена по одному критерию без ухудшения другого. Серые точки доминируемы.

## 3. Методы решения

### 3.1. Обзор

Существуют два основных класса методов:

- **Методы a priori:** предпочтения задаются *до* оптимизации (например, метод взвешивания).
- **Методы a posteriori:** вычисляется полный фронт Парето, затем лицо, принимающее решения, выбирает.

### 3.2. Метод взвешивания (Weighted Sum)

**Определение: Метод взвешивания**

**Метод взвешивания** скаляризует критерии с помощью весов:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{F}} \sum_{i=1}^{k} w_i \cdot z_i(\mathbf{x}), \quad \text{wobei } w_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} w_i = 1$$

Для каждого вектора весов $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_k)$ на стандартном симплексе решается скалярная ЗЛП.

**Теорема 1: Корректность метода взвешивания**

Любое решение взвешенной задачи скаляризации при $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ (все веса положительны) является Парето-оптимальным. Для выпуклых фронтов Парето вариация $\mathbf{w}$ даёт все Парето-оптимальные решения.

*Доказательство.* Sei $\mathbf{x}^*$ optimal für $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ und angenommen, $\mathbf{x}^*$ sei nicht Pareto-optimal. Dann existiert $\mathbf{y} \in \mathcal{F}$ mit $z_i(\mathbf{y}) \leq z_i(\mathbf{x}^*)$ für alle $i$ und $z_j(\mathbf{y}) < z_j(\mathbf{x}^*)$ für ein $j$. Dann gilt:

$$\sum_i w_i z_i(\mathbf{y}) < \sum_i w_i z_i(\mathbf{x}^*)$$

(da $w_j > 0$), was der Optimalität von $\mathbf{x}^*$ widerspricht. □

**Ограничение:** При **невыпуклых** фронтах Парето метод взвешивания не может достичь некоторых участков (вогнутые области). Метод $\varepsilon$-ограничений более универсален.

### 3.2.1. Выборка пространства весов

Для $k = 2$ критериев веса выбираются равномерно:

$$\mathbf{w}^{(t)} = \left( \frac{t}{T},\ 1 - \frac{t}{T} \right), \quad t = 0, 1, \ldots, T$$

Для $k > 2$ стандартный симплекс исследуется случайной выборкой или регулярным разбиением.

## 3.3. Метод $\varepsilon$-ограничений

**Определение: Метод $\varepsilon$-ограничений**

В **методе $\varepsilon$-ограничений** оптимизируется основной критерий $z_p$, а остальные ограничиваются величинами $\varepsilon_i$:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}} \ z_p(\mathbf{x}) \quad \text{s.t.} \quad z_i(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_i \quad \forall\, i \neq p$$

Систематическая вариация $\varepsilon_i$ порождает все Парето-оптимальные решения (включая невыпуклые участки).

**Теорема 2: Полнота метода $\varepsilon$-ограничений**

Любое Парето-оптимальное решение может быть найдено методом $\varepsilon$-ограничений при подходящем выборе $\varepsilon$ и основного критерия.

*Идея доказательства.* Пусть $\mathbf{x}^*$ Парето-оптимально. Положим $\varepsilon_i = z_i(\mathbf{x}^*)$ для всех $i \neq p$. Тогда $\mathbf{x}^*$ допустимо для задачи $\varepsilon$-ограничений. Предположим, другое решение $\mathbf{y}$ даёт $z_p(\mathbf{y}) < z_p(\mathbf{x}^*)$ при $z_i(\mathbf{y}) \leq \varepsilon_i$. Тогда $\mathbf{y}$ доминирует $\mathbf{x}^*$ — противоречие. □

### 3.3.1. Алгоритм: выборка методом $\varepsilon$-ограничений

1. Вычислить диапазон каждого вторичного критерия: $[z_i^{\min}, z_i^{\max}]$ отдельными ЗЛП.
2. Разбить диапазон на $T$ шагов: $\varepsilon_i^{(t)} = z_i^{\min} + t \cdot \frac{z_i^{\max} - z_i^{\min}}{T}$.
3. Решить ограниченную ЗЛП для каждого значения $\varepsilon$.
4. Удалить доминируемые точки из множества результатов.

## 3.4. Сравнение методов

| Свойство | Метод взвешивания | $\varepsilon$-ограничения |
|---|---|---|
| Невыпуклые фронты | Неполный | Полный |
| Вычислительная сложность | Низкая | Средняя |
| Anzahl LP-Probleme | $T$ | $T \cdot (k-1)$ |
| Интерпретация | Интуитивная | Прямое управление |
| Равномерная выборка | Нет | Да |

# 4. Полный пример

## 4.1. Постановка задачи

**Пример: двухкритериальное планирование производства**

Предприятие производит два продукта с двумя конкурирующими критериями: максимизация прибыли и экономия ресурсов.

$$\max \; z_1 = 5x_1 + 4x_2 \qquad \text{(прибыль)}$$

$$\min \; z_2 = 3x_1 + x_2 \qquad \text{(потребление ресурсов)}$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Преобразование: $\min\,(-5x_1 - 4x_2)$ и $\min\,(3x_1 + x_2)$.

## 4.2. Идеальная и надир-точки

**Идеальная точка:** оптимизировать каждый критерий отдельно.

$z_1$ maximieren: Simplex liefert $x_1 = 3$, $x_2 = 1{,}5$, $z_1^{\text{id}} = 21$.

$z_2$ minimieren: Ecke $(0, 0)$ liefert $z_2^{\text{id}} = 0$ (aber $z_1 = 0$ – kein Zielkonflikt sichtbar). Bei $x_1, x_2 \geq 0$: $z_2^{\min} = 0$ bei $(0, 0)$.

**Надир-точка:** наихудшие значения на фронте Парето. $z_1^{\text{nad}} = 0$ (bei $(0, 0)$), $z_2^{\text{nad}} = 10{,}5$ (bei $x_1 = 3, x_2 = 1{,}5$).

**Компромисс:** максимальная прибыль $z_1 = 21$ стоит ресурсов $z_2 = 10{,}5$. Минимальные ресурсы $z_2 = 0$ не дают прибыли.

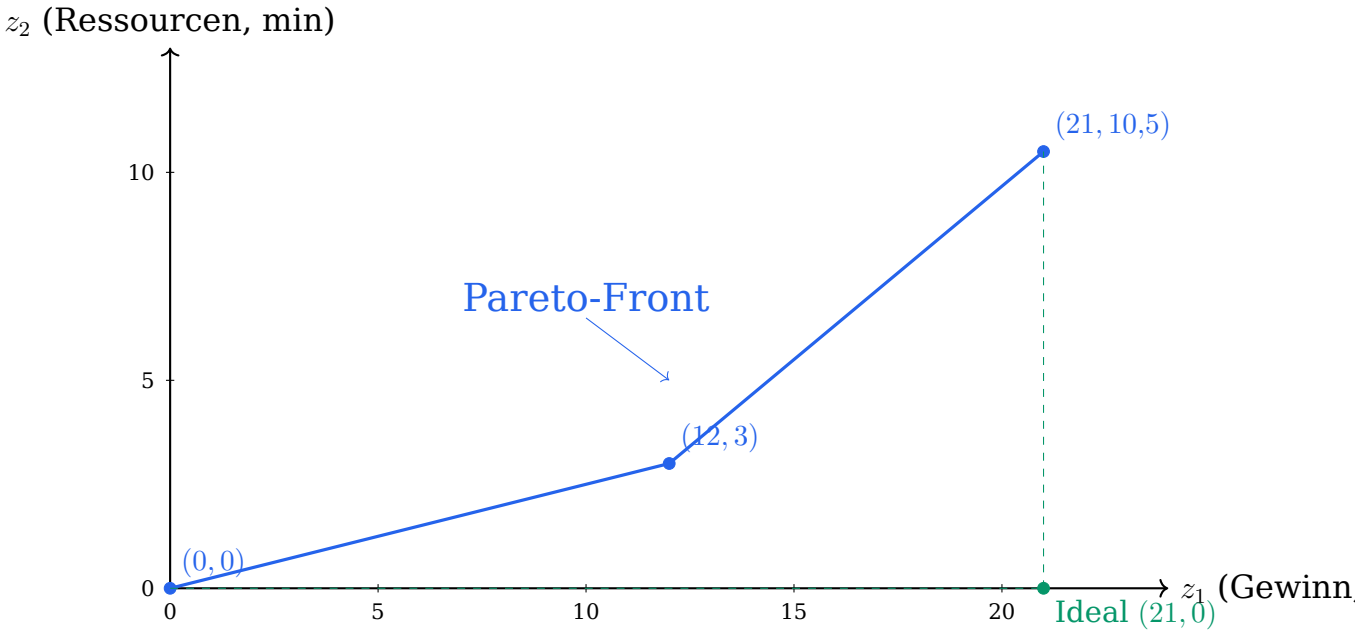
## 4.3. Метод взвешивания: выбранные решения

Для $k = 2$ используем $\mathbf{w} = (w, 1 - w)$, $w \in [0, 1]$. Skalarisiertes Problem: $\min\ -w(5x_1 + 4x_2) + (1 - w)(3x_1 + x_2) = \min\ (3 - 8w)x_1 + (1 - 5w)x_2$

| $w$ | $c_1 = 3 - 8w$ | $c_2 = 1 - 5w$ | $x_1^*$ | $x_2^*$ | $(z_1, z_2)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 3 | 1 | 0 | 0 | (0, 0) |
| 0,2 | 1,4 | 0 | 0 | 3 | (12, 3) |
| 0,3 | 0,6 | $-0{,}5$ | 0 | 3 | (12, 3) |
| 0,5 | $-1$ | $-1{,}5$ | 3 | 1,5 | (21, 10,5) |
| 0,8 | $-3{,}4$ | $-3$ | 3 | 1,5 | (21, 10,5) |
| 1,0 | $-5$ | $-4$ | 3 | 1,5 | (21, 10,5) |

**Pareto-optimale Punkte** (nach Entfernung dominierter Lösungen): $(0, 0) \to (z_1 = 0, z_2 = 0)$, $(0, 3) \to (z_1 = 12, z_2 = 3)$, $(3, 1{,}5) \to (z_1 = 21, z_2 = 10{,}5)$.

## 4.4. Фронт Парето: графическое представление




## 4.5. $\varepsilon$-ограничения: вычисление

Основной критерий: max $z_1$. Ограничение: $z_2 = 3x_1 + x_2 \leq \varepsilon$.

| $\varepsilon$ | $x_1^*$ | $x_2^*$ | $z_1$ | $z_2$ | Status |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | Pareto-optimal |
| 2 | 0 | 2 | 8 | 2 | Pareto-optimal |
| 3 | 0 | 3 | 12 | 3 | Pareto-optimal |
| 5 | 0,5 | 3,5 | 16,5 | 5 | Pareto-optimal |
| 8 | 1,75 | 2,75 | 19,75 | 8 | Pareto-optimal |
| 10,5 | 3 | 1,5 | 21 | 10,5 | Pareto-optimal |

Метод $\varepsilon$-ограничений в данном случае охватывает тот же диапазон, что и метод взвешивания, так как фронт Парето выпуклый.

# 5. Многокритериальная оптимизация при $k > 2$ критериях

## 5.1. Трудности при большом числе критериев

С ростом числа критериев $k$ трудности возрастают:

- Фронт Парето является $(k-1)$-мерным многообразием — графически неизображаем.
- Доля доминируемых решений *убывает* (при $k \to \infty$ случайные точки почти не доминируют друг друга).
- Вычислительная сложность растёт с $k$.

## 5.2. Методы визуализации при $k > 2$

- **Параллельные координаты:** каждый критерий как вертикальная ось, решения — ломаные.
- **Матрица диаграмм рассеяния:** все пары $(z_i, z_j)$.
- **Радарная диаграмма:** подходит для небольшого числа решений.
- **Тепловая карта:** значения критериев как интенсивность цвета.

## 5.3. Пример: 3 критерия

**Пример с 3 критериями**

$$\max\ z_1 = 5x_1 + 4x_2, \quad \max\ z_2 = 2x_1 + 6x_2, \quad \min\ z_3 = 3x_1 + x_2$$

$$6x_1 + 4x_2 \le 24, \quad x_1 + 2x_2 \le 6, \quad x_1, x_2 \ge 0$$

Выбранные Парето-оптимальные решения (вычислено инструментом МКО):

| $x_1$ | $x_2$ | $z_1$ (max) | $z_2$ (max) | $z_3$ (min) | Доминирующая вершина |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | Нет (Парето) |
| 0 | 3 | 12 | 18 | 3 | Pareto |
| 3 | 1,5 | 21 | 15 | 10,5 | Pareto |
| 4 | 0 | 20 | 8 | 12 | Pareto |

Видно: $z_1$ и $z_2$ предпочитают разные вершины, $z_3$ — начало координат. Фронт Парето включает все четыре вершины.

# 6. Поддержка принятия решений: выбор решения

## 6.1. Методы выбора решения

После вычисления фронта Парето лицо, принимающее решения, выбирает решение. Распространённые методы:

**1. Приближение к утопической точке (компромиссное решение):**

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{P}} \left\| \frac{\mathbf{z}(\mathbf{x}) - \mathbf{z}^{\text{id}}}{\mathbf{z}^{\text{nad}} - \mathbf{z}^{\text{id}}} \right\|_p$$

Точка на фронте Парето с наименьшим нормированным расстоянием до идеальной точки ($p = 2$: евклидово, $p = \infty$: Чебышёва).

**2. Скаляризация Чебышёва:**

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{F}} \max_{i=1,\dots,k} w_i \left| z_i(\mathbf{x}) - z_i^{\text{id}} \right|$$

Находит также точки на невыпуклых фронтах Парето.

**3. Интерактивные методы:** ЛПР последовательно уточняет предпочтения, напр. отвечая на попарные сравнения (*STEM*, *NIMBUS*).

## 6.2. Нормировка

Перед сравнением критерии следует нормировать:

$$\tilde{z}_i(\mathbf{x}) = \frac{z_i(\mathbf{x}) - z_i^{\text{id}}}{z_i^{\text{nad}} - z_i^{\text{id}}} \in [0,1]$$

# 7. Вычислительная сложность и практические замечания

## 7.1. Сложность

Вычисление полного фронта Парето в общем случае NP-трудно (при нелинейных критериях или целочисленных переменных). Для линейных МКО метод взвешивания с $T$ векторами весов требует $T$ решений ЗЛП за $O(T \cdot \text{время ЗЛП})$.

## 7.2. Практическое программное обеспечение

- **Python:** `pymoo` (NSGA-II, NSGA-III, метод взвешивания, $\varepsilon$-ограничения)
- **MATLAB:** `gamultiobj` (генетический алгоритм для МКО)
- **Gurobi/CPLEX:** двухкритериальная LP-оптимизация параметрическими методами
- **jMetal:** Java-фреймворк для эволюционной многокритериальной оптимизации

# 8. Резюме

**Ключевые положения: многокритериальная оптимизация**

1. При **конкурирующих критериях** не существует единственного оптимального решения — есть множество эффективных компромиссных решений.
2. Решение **Парето-оптимально**, если его нельзя улучшить ни по одному критерию, не ухудшив другой.
3. **Идеальная точка** содержит наилучшие индивидуальные значения (обычно недостижима); **надир-точка** — наихудшие значения на фронте Парето.
4. **Метод взвешивания** решает скалярную ЗЛП для каждого вектора весов — прост, но неполон для невыпуклых фронтов.
5. **Метод $\varepsilon$-ограничений** ограничивает вторичные критерии и полон для произвольных фронтов.
6. При $k = 2$ критериях фронт Парето — кривая в 2D; при $k > 2$ — многомерное многообразие.
7. **Нормировка** значений критериев существенна для выбора решения и сравнения методов.
8. Для **выбора решения** подходят методы компромисса (Чебышёв, евклидово расстояние) или интерактивные процедуры.

---