Сборник задач

Многокритериальная оптимизация – граница Парето и методы решения

Русский

Вольфганг Бёме

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Уровень 1: Лёгкий **2**
Задача 1.1 2
Задача 1.2 3

2 Уровень 2: Средний **5**
Задача 2.1 5
Задача 2.2 6

3 Уровень 3: Сложный **8**
Задача 3.1 8
Задача 3.2 9

1 Уровень 1: Лёгкий

Задача 1.1 – Проверка доминирования и множество Парето

Задача 1.1

Даны шесть решений с двумя целевыми функциями (обе минимизируются):

Решение	z_1	z_2	Парето-оптимально?
A	2	8	?
B	4	5	?
C	6	3	?
D	3	7	?
E	5	5	?
F	1	9	?

Задания:

(a) Определи для каждой пары, доминирует ли одно решение над другим.

(b) Определи Парето-оптимальные решения.

(c) Изобрази решения на диаграмме (z_1, z_2) и отметь границу Парето.

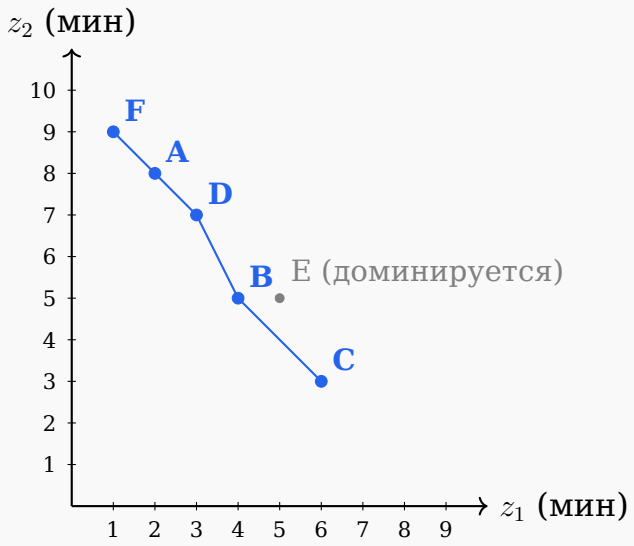
(d) Определи идеальную точку и точку надир границы Парето.

Решение: Задача 1.1

(a) Проверка доминирования:
Доминирует ли D над A? $z_1(D) = 3 > z_1(A) = 2$ – нет (D хуже по z_1).
Доминирует ли A над D? $z_1(A) = 2 \leq 3$, $z_2(A) = 8 > 7$ – нет (A хуже по z_2).
Доминирует ли B над E? $z_1(B) = 4 \leq 5$, $z_2(B) = 5 \leq 5$ и z_1 строго меньше – **да, B доминирует над E.**
Доминирует ли B над D? $z_1(B) = 4 > 3$ – нет.
Доминирует ли C над B? $z_1(C) = 6 > 4$ – нет.
Доминирует ли A над F? $z_1(A) = 2 > 1$ – нет. Доминирует ли F над A? $z_1(F) = 1 < 2$, $z_2(F) = 9 > 8$ – нет (F хуже по z_2).
(b) Парето-оптимальные решения:
E доминируется решением B $\Rightarrow$ E **не** является Парето-оптимальным. Все остальные (A, B, C, D, F) не доминируются никаким другим решением $\Rightarrow$ **множество Парето: {A, B, C, D,**

F}.

(c) Диаграмма:



(d) Идеальная точка и точка надир:

$$\mathbf{z}^{\text{id}} = (\min z_1, \min z_2) = (1, 3), \qquad \mathbf{z}^{\text{nad}} = (\max z_1, \max z_2)|_{\mathcal{P}} = (6, 9)$$

Множество Парето: {A, B, C, D, F}, идеал: (1,3), надир: (6,9)

Задача 1.2 – Метод взвешивания (простой случай)

Задача 1.2

$$\max \; z_1 = 3x_1 + 2x_2, \qquad \max \; z_2 = x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Задания:

(a) Реши для весов $\mathbf{w} = (1, 0)$, $(0{,}5, 0{,}5)$ и $(0, 1)$.

(b) Определи идеальную точку.

(c) Какие вершины допустимой области являются Парето-оптимальными?

Решение: Задача 1.2

(a) Метод взвешивания:
Скаляризация: max $w(3x_1 + 2x_2) + (1 - w)(x_1 + 4x_2) =$ max $(2w + 1)x_1 + (4 - 2w)x_2$

$w = 1$**:** max $3x_1 + 2x_2$. Вершины: $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 4)$.
Значения целевой функции: 0, 9, 10, 8. **Оптимум:** $(2, 2)$**,** $z_1 = 10$**,** $z_2 = 10$.
$w = 0{,}5$**:** max $2x_1 + 3x_2$.
Значения: 0, 6, 10, 12. **Оптимум:** $(0, 4)$**,** $z_1 = 8$**,** $z_2 = 16$.
$w = 0$**:** max $x_1 + 4x_2$.
Значения: 0, 3, 10, 16. **Оптимум:** $(0, 4)$**,** $z_1 = 8$**,** $z_2 = 16$.
(b) Идеальная точка:
$z_1^{\max} = 10$ **(в** $(2, 2)$**),** $z_2^{\max} = 16$ **(в** $(0, 4)$**).**

$$\mathbf{z}^{\text{id}} = (10,\ 16) \quad \text{(недостижимо одновременно)}$$

(c) Парето-оптимальные вершины:
Вершина $(0, 0)$: $z = (0, 0)$ – доминируется всеми остальными.
Вершина $(3, 0)$: $z = (9, 3)$ – доминируется $(2, 2)$ с $z = (10, 10)$.
Вершина $(2, 2)$: $z = (10, 10)$ – Парето-оптимальна (лучшее z_1).
Вершина $(0, 4)$: $z = (8, 16)$ – Парето-оптимальна (лучшее z_2).
Парето-оптимальные вершины: $(2, 2)$ **и** $(0, 4)$**. Отрезок между ними также Парето-оптимален.**

2 Уровень 2: Средний

Задача 2.1 – Метод взвешивания против метода ε-ограничений

Задача 2.1

$$\max\ z_1 = 5x_1 + 4x_2, \qquad \min\ z_2 = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\le 24 \\ x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Это пример из теоретической части.

(a) Рассчитай три точки Парето методом взвешивания (выбери $w \in \{0{,}2;\ 0{,}5;\ 0{,}8\}$).

(b) Рассчитай три точки Парето методом ε-ограничений ($\varepsilon \in \{0,\ 5,\ 10{,}5\}$, основная цель: max z_1).

(c) Сравни результаты обоих методов.

(d) Рассчитай идеальную точку и точку надир.

Решение: Задача 2.1

(a) Метод взвешивания:
Преобразование: max z_1, min $z_2 \Leftrightarrow$ max $(-z_2)$. Взвешенно: max $w \cdot z_1 + (1-w)\cdot(-z_2)$.

$$\max\ w(5x_1 + 4x_2) - (1-w)(3x_1 + x_2) = \max\ (8w-3)x_1 + (5w-1)x_2$$

$w = 0{,}2$: коэффициенты $(-1{,}4;\ 0)$. Оптимум при $x_1 = 0$: проверка $(0, 3)$: $z_1 = 12$, $z_2 = 3$.
$w = 0{,}5$: коэффициенты $(1;\ 1{,}5)$. Максимизация в вершинах: $(0, 3)$: $0 + 4{,}5 = 4{,}5$; $(3, 1{,}5)$: $3 + 2{,}25 = 5{,}25$. Оптимум: $(3, 1{,}5)$, $z_1 = 21$, $z_2 = 10{,}5$.
$w = 0{,}8$: коэффициенты $(3{,}4;\ 3)$. Оптимум в $(3, 1{,}5)$: $z_1 = 21$, $z_2 = 10{,}5$.

w	(x_1^*, x_2^*)	z_1	z_2
0,2	$(0, 3)$	12	3
0,5	$(3, 1{,}5)$	21	10,5
0,8	$(3, 1{,}5)$	21	10,5

(b) Метод ε-ограничений: Основная цель: max z_1, дополнительное ограничение: $z_2 = 3x_1 + x_2 \le \varepsilon$.

$\varepsilon = 0$: $3x_1 + x_2 \leq 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$. $z_1 = 0$, $z_2 = 0$.
$\varepsilon = 5$: доп. ограничение $3x_1 + x_2 \leq 5$. Решение ЛП: $x_1 = 1{,}5$, $x_2 = 0{,}5$: $z_1 = 9{,}5$, $z_2 = 5$.
$\varepsilon = 10{,}5$: уравнение $3x_1 + x_2 = 10{,}5$ совместно с $6x_1 + 4x_2 = 24$ и $x_1 + 2x_2 = 6$: $x_1 = 3$, $x_2 = 1{,}5$. $z_1 = 21$, $z_2 = 10{,}5$.
(c) Сравнение: Оба метода достигают крайних точек $(0, 0)$ с $z = (0, 0)$, $(0, 3)$ с $z = (12, 3)$ и $(3, 1{,}5)$ с $z = (21, 10{,}5)$. Метод ε-ограничений дополнительно находит промежуточные точки на границе Парето. Метод взвешивания даёт одну и ту же точку при $w = 0{,}5$ и $w = 0{,}8$, поскольку в этой области граница кусочно-линейна.
(d) Идеальная точка и точка надир:

$$\mathbf{z}^{\text{id}} = (21,\ 0), \qquad \mathbf{z}^{\text{nad}} = (0,\ 10{,}5)$$

Граница Парето: отрезок от $(z_1, z_2) = (0, 0)$ через $(12, 3)$ до $(21, 10{,}5)$.

Задача 2.2 – Нормализация и компромиссное решение

Задача 2.2

Дана граница Парето двухкритериальной ЛП-задачи (обе цели максимизируются) со следующими Парето-оптимальными точками:

Точка	z_1	z_2
P_1	20	5
P_2	15	10
P_3	10	16
P_4	4	18

(a) Определи идеальную точку и точку надир.

(b) Нормализуй значения целевой функции на $[0, 1]$.

(c) Рассчитай для каждой точки Парето евклидово расстояние до идеальной точки (в нормализованном пространстве).

(d) Какая точка является наилучшим компромиссным решением (минимальное расстояние)?

(e) Рассчитай альтернативно метрику Чебышева (L_∞-расстояние) и сравни.

Решение: Задача 2.2

(a) Идеальная точка и точка надир:

$$\mathbf{z}^{\text{id}} = (20, 18), \qquad \mathbf{z}^{\text{nad}} = (4, 5)$$

(b) Нормализация: $\tilde{z}_i = \frac{z_i - z_i^{\text{nad}}}{z_i^{\text{id}} - z_i^{\text{nad}}}$

Точка	$\tilde{z}_1 = \frac{z_1-4}{16}$	$\tilde{z}_2 = \frac{z_2-5}{13}$
P_1	$\frac{16}{16} = 1{,}000$	$\frac{0}{13} = 0{,}000$
P_2	$\frac{11}{16} = 0{,}688$	$\frac{5}{13} = 0{,}385$
P_3	$\frac{6}{16} = 0{,}375$	$\frac{11}{13} = 0{,}846$
P_4	$\frac{0}{16} = 0{,}000$	$\frac{13}{13} = 1{,}000$

(c) Евклидово расстояние до идеальной точки $\tilde{\mathbf{z}}^{\text{id}} = (1, 1)$:

$$d_2(P_i) = \sqrt{(1 - \tilde{z}_1)^2 + (1 - \tilde{z}_2)^2}$$

$$d_2(P_1) = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1{,}000$$
$$d_2(P_2) = \sqrt{0{,}312^2 + 0{,}615^2} = \sqrt{0{,}097 + 0{,}378} = \sqrt{0{,}475} \approx \mathbf{0{,}689}$$
$$d_2(P_3) = \sqrt{0{,}625^2 + 0{,}154^2} = \sqrt{0{,}391 + 0{,}024} = \sqrt{0{,}415} \approx 0{,}644$$
$$d_2(P_4) = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1{,}000$$

(d) Наилучшее компромиссное решение: P_3 с $d_2 \approx 0{,}644$ (наименьшее расстояние до идеала).

(e) Метрика Чебышева: $d_\infty(P_i) = \max(1 - \tilde{z}_1, 1 - \tilde{z}_2)$

Точка	$1 - \tilde{z}_1$	$1 - \tilde{z}_2$	d_∞
P_1	0,000	1,000	1,000
P_2	0,312	0,615	0,615
P_3	0,625	0,154	0,625
P_4	1,000	0,000	1,000

Метрика Чебышева выбирает P_2 ($d_\infty = 0{,}615$), евклидова – P_3. Выбор метрики влияет на выбор решения!

Евклидова: P_3; Чебышева: P_2. Рекомендация: P_2 или P_3 в зависимости от предпочтений.

3 Уровень 3: Сложный

Задача 3.1 – Три целевые функции: полный анализ

Задача 3.1

$$\max\ z_1 = 5x_1 + 4x_2, \quad \max\ z_2 = 2x_1 + 6x_2, \quad \min\ z_3 = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\le 24 \\ x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(a) Рассчитай значения целевых функций во всех четырёх вершинах допустимой области: $(0,0)$, $(4,0)$, $(3,1{,}5)$, $(0,3)$.

(b) Проверь для каждой пары вершин наличие доминирования.

(c) Определи Парето-оптимальные вершины.

(d) Рассчитай идеальную точку.

(e) Какая вершина является наилучшим компромиссным решением (Чебышев, равные веса)?

Решение: Задача 3.1

(a) Значения целевых функций в вершинах:

Вершина	x_1	x_2	(z_1, z_2, z_3)
E_0	0	0	$(0,\ 0,\ 0)$
E_1	4	0	$(20,\ 8,\ 12)$
E_2	3	1,5	$(21,\ 15,\ 10{,}5)$
E_3	0	3	$(12,\ 18,\ 3)$

(b) Проверка доминирования (в терминах минимизации: z_3 мин, $-z_1$ мин, $-z_2$ мин):
E_0 против E_1: E_1 лучше по z_1 и z_2, хуже по z_3. Доминирования нет.
E_0 против E_2: E_2 лучше по z_1 и z_2, хуже по z_3 (0 против 10,5). Доминирования нет.
E_0 против E_3: E_3 лучше по z_1 и z_2, хуже по z_3 (0 против 3). Доминирования нет.
E_1 против E_2: z_1: $20 < 21$ (E1 хуже), z_2: $8 < 15$ (E1 хуже), z_3: $12 > 10{,}5$ (E1 хуже). E_2 доминирует над E_1!
E_1 против E_3: z_1: $20 > 12$ (E1 лучше), z_2: $8 < 18$ (E1 хуже). Доминирования нет.

E_2 против E_3: z_1: $21 > 12$ (E2 лучше), z_2: $15 < 18$ (E2 хуже). Доминирования нет.

(c) Парето-оптимальные вершины: E_1 доминируется вершиной $E_2 \Rightarrow$ **Парето-вершины:** E_0, E_2, E_3.

(Примечание: E_0 с $z = (0,0,0)$ в зависимости от приложения разумно исключить, но формально она Парето-оптимальна.)

(d) Идеальная точка:

$$z_1^{\text{id}} = 21\ (E_2), \quad z_2^{\text{id}} = 18\ (E_3), \quad z_3^{\text{id}} = 0\ (E_0)$$

$$\mathbf{z}^{\text{id}} = (21,\ 18,\ 0) \quad \text{(недостижимо одновременно)}$$

(e) Компромиссное решение по Чебышеву: нормализуем относительно надира $(0,0,12)$:

$$\tilde{z}_1 = z_1/21, \quad \tilde{z}_2 = z_2/18, \quad \tilde{z}_3 = (12 - z_3)/12$$

Вершина	$\tilde{z}_1$	$\tilde{z}_2$	$\tilde{z}_3$	$d_\infty = \max(1 - \tilde{z}_i)$
E_0	0	0	1	1,000
E_2	1	0,833	0,125	0,167
E_3	0,571	1	0,750	0,429

Наилучшее компромиссное решение: $E_2 = (3,1{,}5)$ **с** $d_\infty = 0{,}167$**.**

Задача 3.2 – Невыпуклая граница Парето и сравнение методов

Задача 3.2

Рассмотрим двухкритериальную задачу, граница Парето которой содержит следующие (дискретные) точки:

Точка	z_1 (макс)	z_2 (макс)
Q_1	0	10
Q_2	3	9
Q_3	7	7
Q_4	9	5
Q_5	10	0

Кроме того, существует точка $Q^* = (5,8)$, которая *не* находится методом взвешивания.

(a) Проверь, что Q^* является Парето-оптимальной.

(b) Покажи, что не существует вектора весов $\mathbf{w} = (w, 1-w)$ с $w \in [0,1]$, порождающего решение Q^* (невыпуклая граница).

(c) Рассчитай, какое значение ε нужно выбрать, чтобы найти Q^* методом ε-ограничений (основная цель: max z_1, дополнительное ограничение: $z_2 \geq \varepsilon$).

(d) Рассчитай идеальную точку и точку надир для всей границы Парето.

(e) Нормализуй все точки и определи наилучшее компромиссное решение (евклидово расстояние).

Решение: Задача 3.2

(a) Парето-оптимальность $Q^* = (5,8)$:
Проверим все остальные точки: $Q_1 = (0,10)$: $z_1(Q_1) = 0 < 5 \Rightarrow Q_1$ хуже по z_1. Доминирования нет. $Q_2 = (3,9)$: $z_1(Q_2) = 3 < 5 \Rightarrow$ хуже по z_1. Доминирования нет. $Q_3 = (7,7)$: $z_1(Q_3) = 7 > 5$, $z_2(Q_3) = 7 < 8 \Rightarrow$ несравнимо. $Q_4 = (9,5)$: $z_1 > 5$, $z_2 < 8 \Rightarrow$ несравнимо. $Q_5 = (10,0)$: $z_2 < 8 \Rightarrow$ несравнимо.
Ни одна точка не доминирует над $Q^* \Rightarrow Q^*$ **Парето-оптимальна.**
(b) Недостижимость методом взвешивания:
Взвешенная задача: max $w \cdot z_1 + (1-w) \cdot z_2$. Для Q^* получаем значение $5w + 8(1-w) = 8 - 3w$.
Чтобы Q^* была оптимальной, должно выполняться: $8 - 3w \geq$ значение всех остальных точек:

$$8 - 3w \geq 10 - 10w \Rightarrow 7w \geq 2 \Rightarrow w \geq 2/7 \approx 0{,}286 \quad (Q_1)$$
$$8 - 3w \geq 7 + 0 \cdot w = 7 + 7(1-w) + 7w \Rightarrow 8 - 3w \geq 7 + 7 - 7w \Rightarrow 4w \geq 6 \Rightarrow w \geq 1{,}5 \quad (Q_3, \text{не}$$

Для $Q_3 = (7,7)$: $7w + 7(1-w) = 7$ для всех w. Для Q^*: $5w + 8(1-w) = 8 - 3w$. $8 - 3w > 7 \Rightarrow w < 1/3$. Но для $Q_4 = (9,5)$: $9w + 5(1-w) = 5 + 4w > 8 - 3w \Leftrightarrow 7w > 3 \Leftrightarrow w > 3/7$.
Поскольку $w < 1/3 \approx 0{,}333$ и $w > 3/7 \approx 0{,}429$ не могут выполняться одновременно, **не существует w, при котором Q^* оптимальна.** Граница Парето в этой области невыпукла.
(c) Метод ε-ограничений: Положим $z_2 \geq \varepsilon$ и max z_1.
Q^* имеет $z_2 = 8$. Выбираем $\varepsilon = 8$: тогда z_1 максимизируется при условии $z_2 \geq 8$.
Точки с $z_2 \geq 8$: $Q_1(0,10)$, $Q_2(3,9)$, $Q^*(5,8)$.
Максимальное z_1 среди них: Q^* с $z_1 = 5$. $\varepsilon = 8$.
(d) Идеальная точка и точка надир (включая Q^*):

$$\mathbf{z}^{\text{id}} = (10,\ 10), \qquad \mathbf{z}^{\text{nad}} = (0,\ 0)$$

(e) Нормализация и компромиссное решение:
Поскольку надир $= (0,0)$ и идеал $= (10,10)$: $\tilde{z}_i = z_i/10$.

Точка	$\tilde{z}_1$	$\tilde{z}_2$	$1-\tilde{z}_1$	$1-\tilde{z}_2$	d_2
Q_1	0,0	1,0	1,0	0,0	1,000
Q_2	0,3	0,9	0,7	0,1	0,707
Q^*	0,5	0,8	0,5	0,2	**0,539**
Q_3	0,7	0,7	0,3	0,3	0,424
Q_4	0,9	0,5	0,1	0,5	0,510
Q_5	1,0	0,0	0,0	1,0	1,000

Наилучшее компромиссное решение: $Q_3 = (7, 7)$ **с** $d_2 = 0{,}424$ **– наиболее сбалансированная точка.**
Q^* **занимает третье место с** $d_2 = 0{,}539$**, но была бы достижима только методом** ε**-ограничений.**