Сборник задач

Дерево решений – откат (rollback) и математическое ожидание

Русский

Вольфганг Бёме

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Уровень 1: Лёгкий **2**
Задача 1.1 2
Задача 1.2 3

2 Уровень 2: Средний **4**
Задача 2.1 4
Задача 2.2 5

3 Уровень 3: Сложный **7**
Задача 3.1 7
Задача 3.2 8

1 Уровень 1: Лёгкий

Задача 1.1 – Одноступенчатое дерево решений

Задача 1.1

Компания решает, инвестировать ли в новый проект. При инвестировании прибыль (тыс. евро) зависит от развития рынка:

Сценарий	Вероятность	Прибыль
Хорошая конъюнктура	0,5	200
Средняя конъюнктура	0,3	80
Плохая конъюнктура	0,2	-60

При отказе от инвестиций прибыль гарантированно равна 0.

(a) Построй дерево решений.

(b) Рассчитай математическое ожидание в узле случая.

(c) Какое решение рекомендует метод отката (rollback)?

(d) При каком гарантированном альтернативном доходе отказ от инвестиций был бы выгоднее?

Решение: Задача 1.1

(a) Дерево решений:



(b) Математическое ожидание:

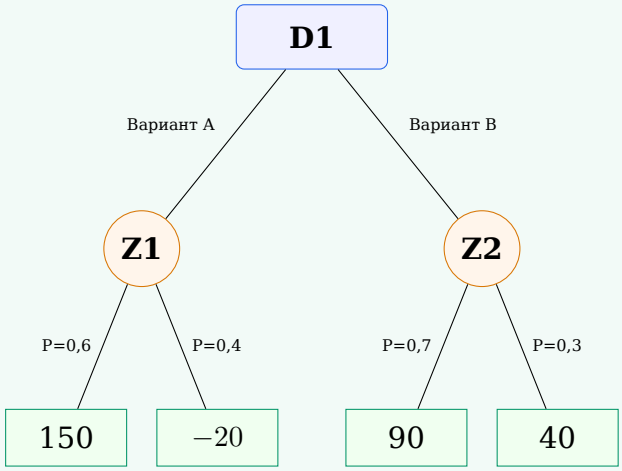
$$\text{MO}_{\text{Рынок}} = 0{,}5 \cdot 200 + 0{,}3 \cdot 80 + 0{,}2 \cdot (-60) = 100 + 24 - 12 = \mathbf{112}$$

Примечание: MO = 112, а не 128. На дереве уже показано корректное значение.
(c) Откат (rollback): $\text{MO}_{\text{корень}} = \max(112,\ 0) = 112 \Rightarrow$ **Инвестировать**.
(d) Пороговое значение: Отказ от инвестиций выгоднее, если гарантированная альтернативная прибыль $g > 112$ тыс. евро.
Оптимальное решение: инвестировать, MO = 112 тыс. евро

Задача 1.2 – Откат: расчёт и интерпретация

Задача 1.2

Дано следующее дерево решений (выплаты в тыс. евро):



(a) Рассчитай MO(Z1) и MO(Z2).

(b) Какой вариант выбирает узел решения D1?

(c) Насколько велико преимущество оптимального варианта (в тыс. евро)?

Решение: Задача 1.2

(a) Математические ожидания:

$$\text{MO}(Z_1) = 0{,}6 \cdot 150 + 0{,}4 \cdot (-20) = 90 - 8 = \mathbf{82}$$

$$\text{MO}(Z_2) = 0{,}7 \cdot 90 + 0{,}3 \cdot 40 = 63 + 12 = \mathbf{75}$$

(b) Решение: $\text{MO}(D_1) = \max(82,\ 75) = 82 \Rightarrow$ **Вариант A**.
(c) Преимущество: $82 - 75 = \mathbf{7}$ тыс. евро.

2 Уровень 2: Средний

Задача 2.1 – Двухступенчатое дерево с последующим решением

Задача 2.1

Фармацевтическая компания рассматривает вопрос регистрации препарата.
Этап 1: Провести клиническое исследование (затраты 100) или прекратить (выплата 0).
Этап 2 (после исследования):

- Успех исследования ($P = 0{,}7$): решение – вывод на рынок или продажа лицензии.
- Неудача исследования ($P = 0{,}3$): выплата -100.

Этап 3 (после успеха):

- **Вывод на рынок** (нетто после затрат): Большой успех ($P = 0{,}5$, $+400$), небольшой успех ($P = 0{,}3$, $+150$), неудача ($P = 0{,}2$, -80).
- **Продажа лицензии**: гарантированный доход $+120$.

(a) Выполни полный откат.

(b) Какая стратегия оптимальна?

(c) Как изменится решение, если вероятность успеха исследования снизится до $P = 0{,}5$?

Решение: Задача 2.1

(a) Откат:
Узел случая: вывод на рынок:

$$\text{МО}_{\text{Рынок}} = 0{,}5 \cdot 400 + 0{,}3 \cdot 150 + 0{,}2 \cdot (-80) = 200 + 45 - 16 = \mathbf{229}$$

Узел решения, этап 3:

$$\text{МО}_{\text{Этап3}} = \max(229,\ 120) = \mathbf{229} \quad \Rightarrow \text{Вывод на рынок}$$

Узел случая: исследование:

$$\text{МО}_{\text{Иссл.}} = 0{,}7 \cdot 229 + 0{,}3 \cdot (-100) = 160{,}3 - 30 = \mathbf{130{,}3}$$

Узел решения, этап 1:

$$\text{МО}_{\text{корень}} = \max(130{,}3,\ 0) = \mathbf{130{,}3} \quad \Rightarrow \text{Провести исследование}$$

(b) Оптимальная стратегия:

1. Провести исследование.
2. При успехе: выбрать вывод на рынок (МО=229 > лицензия=120).
3. При неудаче: убыток 100.

Общее МО: **130,3 тыс. евро**.
(c) Чувствительность при P(успех) $= 0{,}5$:

$$\text{МО}'_{\text{Иссл.}} = 0{,}5 \cdot 229 + 0{,}5 \cdot (-100) = 114{,}5 - 50 = \mathbf{64{,}5}$$

Всё ещё $> 0 \Rightarrow$ исследование остаётся целесообразным, но значительно менее привлекательным.
Пороговое значение: МО = 0 при p^*: $p \cdot 229 + (1-p) \cdot (-100) = 0 \Rightarrow 329p = 100 \Rightarrow p^* \approx 0{,}304$. Только при вероятности успеха ниже 30% исследование стоит прекратить.

Задача 2.2 – Сравнение двух стратегических путей

Задача 2.2

Логистическая компания выбирает между двумя стратегиями расширения.
Стратегия А – собственный автопарк: Высокий спрос ($P = 0{,}6$, прибыль 300), низкий спрос ($P = 0{,}4$, убыток -80).
Стратегия В – аутсорсинг: Первый контракт доступен ($P = 0{,}8$):

- Контракт А: хороший партнёр ($P = 0{,}6$, прибыль 200), плохой партнёр ($P = 0{,}4$, прибыль 60).
- Контракт В (альтернатива): гарантированная прибыль 100.

Контракт недоступен ($P = 0{,}2$): прибыль -20.

(a) Построй полное дерево решений.

(b) Выполни откат.

(c) Какая стратегия оптимальна?

Решение: Задача 2.2

(a) Дерево:
Стратегия А – простой узел случая. Стратегия В имеет внешний узел случая (доступен ли контракт?) и – если да – узел решения (контракт А или В), за которым следует ещё один узел случая при контракте А.

(b) Откат:
Стратегия A:

$$\text{МО}_A = 0{,}6 \cdot 300 + 0{,}4 \cdot (-80) = 180 - 32 = \mathbf{148}$$

Стратегия B – контракт A (узел случая):

$$\text{МО}_{\text{КонтрА}} = 0{,}6 \cdot 200 + 0{,}4 \cdot 60 = 120 + 24 = \mathbf{144}$$

Стратегия B – узел решения (контракт A против B):

$$\text{МО}_{\text{Выбор}} = \max(144,\ 100) = \mathbf{144} \quad \Rightarrow \text{Контракт А}$$

Стратегия B – внешний узел случая:

$$\text{МО}_B = 0{,}8 \cdot 144 + 0{,}2 \cdot (-20) = 115{,}2 - 4 = \mathbf{111{,}2}$$

(c) Решение: $\max(\text{МО}_A, \text{МО}_B) = \max(148,\ 111{,}2) = 148 \Rightarrow$ **Стратегия А (собственный автопарк)**.

3 Уровень 3: Сложный

Задача 3.1 – Трёхступенчатое дерево с анализом чувствитель

Задача 3.1

Технологическая компания планирует разработку новой ИИ-платформы.
Этап 1: Начать исследовательскую фазу (затраты 200) или прекратить проект (0).
Этап 2 (после исследований): Технологический прорыв ($P = 0{,}5$) или частичный успех ($P = 0{,}5$).
Этап 3a (прорыв): Решение о выходе на рынок:

- Собственная платформа: лидерство на рынке ($P = 0{,}4$, $+800$), доля рынка ($P = 0{,}4$, $+300$), провал ($P = 0{,}2$, -150).
- Кооперация с крупной корпорацией: гарантированно $+350$.

Этап 3b (частичный успех): Решение:

- Продолжить разработку (затраты 100): новый прорыв ($P = 0{,}6$, $+400$), неудача ($P = 0{,}4$, -100).
- Лицензировать: гарантированно $+80$.

(a) Выполни полный откат.

(b) Определи оптимальную стратегию.

(c) Каким должен быть гарантированный доход от кооперации, чтобы она была предпочтительнее собственной платформы?

(d) При какой вероятности прорыва p (этап 2) исследовательская фаза всё ещё едва оправдана?

Решение: Задача 3.1

(a) Откат:
Этап 3a – собственная платформа:

$$\text{МО}_{\text{соб.}} = 0{,}4 \cdot 800 + 0{,}4 \cdot 300 + 0{,}2 \cdot (-150) = 320 + 120 - 30 = \mathbf{410}$$

Этап 3a – решение при прорыве:

$$\text{МО}_{\text{3a}} = \max(410,\ 350) = \mathbf{410} \quad \Rightarrow \text{Собственная платформа}$$

Этап 3b – продолжить разработку (нетто после затрат 100):

$$\text{МО}_{\text{Прод.}} = 0{,}6 \cdot 400 + 0{,}4 \cdot (-100) - 100 = 240 - 40 - 100 = \mathbf{100}$$

Этап 3b – решение при частичном успехе:

$$\text{МО}_{3b} = \max(100,\ 80) = \mathbf{100} \quad \Rightarrow \text{Продолжить разработку}$$

Этап 2 – узел случая (нетто после затрат на исследования 200):

$$\text{МО}_{\text{И}} = 0{,}5 \cdot 410 + 0{,}5 \cdot 100 - 200 = 205 + 50 - 200 = \mathbf{55}$$

Этап 1 – узел решения:

$$\text{МО}_{\text{корень}} = \max(55,\ 0) = \mathbf{55} \quad \Rightarrow \text{Исследовать}$$

(b) Оптимальная стратегия:

1. Начать исследовательскую фазу.
2. При прорыве: разработать собственную платформу.
3. При частичном успехе: продолжить разработку (не лицензировать).

Общее МО: **55 млн евро**.
(c) Пороговое значение для кооперации: Кооперация выгоднее собственной разработки, если $g_{\text{Коопер.}} > 410$. Ответ: доход от кооперации должен составлять **более 410** млн евро.
(d) Пороговое значение для p: При общей вероятности прорыва p:

$$\text{МО}(p) = p \cdot 410 + (1-p) \cdot 100 - 200 = 310p + 100 - 200 = 310p - 100$$

$\text{МО} \geq 0 \Leftrightarrow 310p \geq 100 \Leftrightarrow p \geq \frac{100}{310} \approx$ **0,323**
Исследования окупаются начиная с вероятности прорыва примерно **32%**.

Задача 3.2 – Последовательное решение и ценность информации

Задача 3.2

Застройщик рассматривает покупку земельного участка (затраты 500). После покупки он решает о виде застройки.
После покупки – право застройки (узел случая):

- Коммерческая застройка разрешена ($P = 0{,}6$): решение – коммерческая или жилая застройка.
- Только жилая ($P = 0{,}4$): возможна только жилая застройка.

Если коммерческая застройка разрешена:

- **Коммерческая:** хороший рынок ($P = 0{,}5$, $+1200$), плохой рынок ($P = 0{,}5$, $+200$).
- **Жилая:** хороший рынок ($P = 0{,}7$, $+900$), плохой рынок ($P = 0{,}3$, $+400$).

Возможна только жилая застройка: Хороший рынок ($P = 0{,}7$, $+900$), плохой рынок ($P = 0{,}3$, $+400$).
Все суммы в тыс. евро, нетто после цены покупки.

(a) Выполни полный откат.

(b) Стоит ли покупать участок?

(c) **Ценность информации:** эксперт может заранее прояснить право застройки (стоимость: X). Рассчитай максимальную цену X, которую стоит заплатить за заключение.

(d) Как изменится решение, если хороший рынок для коммерческой застройки наступает лишь с вероятностью $P = 0{,}3$?

Решение: Задача 3.2

(a) Откат:
Жилая застройка (одинакова в обоих случаях):

$$\text{МО}_{\text{Жил.}} = 0{,}7 \cdot 900 + 0{,}3 \cdot 400 = 630 + 120 = \mathbf{750}$$

Коммерческая застройка:

$$\text{МО}_{\text{Комм.}} = 0{,}5 \cdot 1200 + 0{,}5 \cdot 200 = 600 + 100 = \mathbf{700}$$

Решение при разрешённой коммерческой застройке:

$$\text{МО}_{\text{Комм-разр.}} = \max(700,\ 750) = \mathbf{750} \quad \Rightarrow \text{Жилая застройка}$$

Примечание: даже если коммерческая застройка разрешена, жилая застройка выгоднее!
Узел случая: право застройки:

$$\text{МО}_{\text{Право}} = 0{,}6 \cdot 750 + 0{,}4 \cdot 750 = \mathbf{750}$$

(Поскольку оба случая дают одинаковое МО.)
Узел решения: покупка: $\text{МО}_{\text{Покупка}} = 750 - 500 = 250$ (цена покупки уже вычтена). $\max(250,\ 0) = \mathbf{250} \Rightarrow$ **Покупать!**
(b) Рекомендация по покупке: Да, МО = **250 тыс. евро**.
(c) Ценность информации от заключения эксперта:
При совершенной информации (эксперт заранее проясняет право застройки):

- Если коммерческая застройка разрешена ($P = 0{,}6$): выбрать жилую (МО=750).
- Если только жилая ($P = 0{,}4$): жилая (МО=750).

Поскольку оба случая дают одинаковое МО, информация *не приносит дополнительной ценности* для решения о застройке. МО с информацией = 750.
Однако: без информации покупают за 500 и получают МО=750, то есть чистую прибыль 250. С информацией в случае «только жилая» решение можно было бы принять иначе – но поскольку жилая застройка выбирается в любом случае, ценность заключения составляет:
EVPI = МО с информацией − МО без информации $= 750 - 750 =$ **0**
В данном случае заключение **не имеет дополнительной ценности** – решение о застройке не зависит от права застройки.
(d) Чувствительность: $P($**хороший рынок, коммерч.**$) = 0{,}3$**:**

$$\text{МО}'_{\text{Комм.}} = 0{,}3 \cdot 1200 + 0{,}7 \cdot 200 = 360 + 140 = \mathbf{500}$$

Решение при разрешённой коммерческой застройке: $\max(500,\ 750) = 750 \Rightarrow$ по-прежнему жилая застройка. Общее решение не меняется – жилая застройка доминирует ещё сильнее.