Сборник задач

Теория принятия решений – Принятие решений в условиях неопределённости

Русский

Вольфганг Бёме

wolfgang.boehme@economic-modeling.de
www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Уровень 1: Лёгкий **2**
Задача 1.1 2
Задача 1.2 3

2 Уровень 2: Средний **5**
Задача 2.1 5
Задача 2.2 6

3 Уровень 3: Сложный **8**
Задача 3.1 8
Задача 3.2 9

1 Уровень 1: Лёгкий

Задача 1.1 – Максимакс и максимин

Задача 1.1

Инвестор рассматривает три варианта вложений. Ожидаемая доходность (в тыс. евро) зависит от развития конъюнктуры:

Альтернатива	Подъём	Стагнация	Рецессия
Акции	80	20	-30
Облигации	30	25	15
Денежный рынок	15	15	15

(a) Примени правило **максимакс** и обоснуй решение.

(b) Примени правило **максимин** и обоснуй решение.

(c) Объясни, какое отношение к риску стоит за каждым правилом.

(d) Какую альтернативу выбрал бы крайне не склонный к риску инвестор?

Решение: Задача 1.1

(a) Максимакс – лучший возможный результат для каждой альтернативы:

Альтернатива	Подъём	Стагнация	Рецессия	**Максимум**
Акции	80	20	-30	**80**
Облигации	30	25	15	30
Денежный рынок	15	15	15	15

$\Rightarrow$ **Акции** (максимум = 80). Оптимист, рассчитывающий на подъём, выбирает вариант с наибольшей потенциальной доходностью.

(b) Максимин – лучший минимум (наихудший случай):

Альтернатива	Подъём	Стагнация	Рецессия	**Минимум**
Акции	80	20	-30	-30
Облигации	30	25	15	15
Денежный рынок	15	15	15	**15**

$\max(\min) = 15$ у денежного рынка *и* облигаций. $\Rightarrow$ **денежный рынок или облигации**. Поскольку минимум одинаков, облигации предпочтительнее (более высокий максимум).

(c) Отношение к риску:

- Максимакс: *оптимистичный* – всегда рассчитывает на лучшее состояние.
- Максимин: *пессимистичный* – всегда рассчитывает на худшее состояние (критерий Вальда).

(d) Не склонный к риску инвестор: **Денежный рынок** – гарантированные 15 тыс. евро без риска потерь.

Задача 1.2 – Лаплас и Гурвиц

Задача 1.2

Компания планирует вывести на рынок новый продукт. Прогнозируемые маржинальные доходы (тыс. евро) в зависимости от рыночного спроса:

Альтернатива	Высокий спрос	Средний спрос	Низкий спр
Массовое производство	200	120	30
Серийное производство	140	100	60
Мелкосерийное производство	80	70	65

(a) Примени правило **Лапласа**.

(b) Примени правило **Гурвица** для $\alpha = 0{,}4$ и $\alpha = 0{,}7$.

(c) При каком значении α мелкосерийное производство становится столь же привлекательным, как массовое производство?

Решение: Задача 1.2

(a) Лаплас ($p_j = 1/4 = 0{,}25$):

$$\bar{e}_{\text{Масс.}} = (200 + 120 + 30 - 50)/4 = 300/4 = 75{,}0$$
$$\bar{e}_{\text{Сер.}} = (140 + 100 + 60 + 0)/4 = 300/4 = 75{,}0$$
$$\bar{e}_{\text{Мелк.}} = (80 + 70 + 65 + 50)/4 = 265/4 = 66{,}25$$

Ничья: **Массовое = серийное производство** (оба 75,0).
(b) Гурвиц $H_i = \alpha \cdot \max + (1-\alpha) \cdot \min$:
При $\alpha = 0{,}4$:

$$H_{\text{Масс.}} = 0{,}4 \cdot 200 + 0{,}6 \cdot (-50) = 80 - 30 = 50$$
$$H_{\text{Сер.}} = 0{,}4 \cdot 140 + 0{,}6 \cdot 0 = 56$$
$$H_{\text{Мелк.}} = 0{,}4 \cdot 80 + 0{,}6 \cdot 50 = 32 + 30 = 62$$

$\Rightarrow$ **Мелкосерийное производство** ($H = 62$).
При $\alpha = 0{,}7$:

$$H_{\text{Масс.}} = 0{,}7 \cdot 200 + 0{,}3 \cdot (-50) = 140 - 15 = 125$$
$$H_{\text{Сер.}} = 0{,}7 \cdot 140 + 0{,}3 \cdot 0 = 98$$
$$H_{\text{Мелк.}} = 0{,}7 \cdot 80 + 0{,}3 \cdot 50 = 56 + 15 = 71$$

$\Rightarrow$ **Массовое производство** ($H = 125$).
(c) Пороговое значение α^*: мелкосерийное = массовое производство:

$$\alpha \cdot 80 + (1-\alpha) \cdot 50 = \alpha \cdot 200 + (1-\alpha) \cdot (-50)$$

$80\alpha + 50 - 50\alpha = 200\alpha - 50 + 50\alpha \quad \Rightarrow \quad 30\alpha + 50 = 250\alpha - 50 \quad \Rightarrow \quad 220\alpha = 100 \quad \Rightarrow \quad \alpha^* = \dfrac{100}{220}$

При $\alpha < 0{,}455$: мелкосерийное производство. При $\alpha > 0{,}455$: массовое производство.

2 Уровень 2: Средний

Задача 2.1 – Критерий Сэвиджа-Ниханса и сравнение методов

Задача 2.1

Логистическая компания выбирает маршрут перевозки. Затраты (тыс. евро) в зависимости от интенсивности движения (задача минимизации):

Альтернатива	Низкая	Обычная	Высокая	Очень высока
Маршрут A (автомагистраль)	40	60	90	140
Маршрут B (шоссе)	50	55	70	80
Маршрут C (железная дорога)	65	65	65	65

(a) Построй матрицу сожалений (Сэвиджа-Ниханса).

(b) Какой маршрут рекомендует критерий Сэвиджа-Ниханса?

(c) Дополнительно примени максимин и Лапласа (внимание: минимизация!).

(d) Составь итоговую таблицу всех трёх методов и дай рекомендацию.

Решение: Задача 2.1

(a) Матрица сожалений:
При минимизации: $r_{ij} = e_{ij} - \min_k e_{kj}$ (минимум столбца вместо максимума).
Минимумы столбцов: низкая=40, обычная=55, высокая=65, очень высокая=65.

Альтернатива	Низкая	Обычная	Высокая	Оч. высокая	**макс. сож**
Маршрут A	$40-40=0$	$60-55=5$	$90-65=25$	$140-65=75$	**75**
Маршрут B	$50-40=10$	$55-55=0$	$70-65=5$	$80-65=15$	15
Маршрут C	$65-40=25$	$65-55=10$	$65-65=0$	$65-65=0$	**25**

(b) Сэвидж-Ниханс: $\min(\text{макс. сожаление}) = 15 \Rightarrow$ **Маршрут B**.
(c) Максимин (= минимакс при минимизации):
Максимум строки: A=140, B=80, C=65. $\min(\max) = 65 \Rightarrow$ **Маршрут C**.

Лаплас ($\bar{e}_i = \frac{1}{4}\sum_j e_{ij}$): $\bar{e}_A = (40+60+90+140)/4 = 82{,}5$, $\bar{e}_B = (50+55+70+80)/4 = 63{,}75$, $\bar{e}_C = 65$. $\min(\bar{e}) = 63{,}75 \Rightarrow$ **Маршрут B**.

(d) Итоговая таблица:

Метод	Рекомендация	Значение
Максимин/минимакс	Маршрут C	макс. затраты = 65
Лаплас	Маршрут B	ср. = 63,75
Сэвидж-Ниханс	Маршрут B	макс. сожаление = 15

Рекомендация: **Маршрут B** – рекомендован двумя методами и обеспечивает хороший баланс между затратами и риском.

Задача 2.2 – Математическое ожидание и анализ чувствител

Задача 2.2

Фармацевтическая компания рассматривает три исследовательских проекта. Ожидаемая прибыль (млн евро):

Проект	Успех	Частичный успех	Неудача
Проект X	500	100	-200
Проект Y	300	150	50
Проект Z	200	180	120

Отдел исследований оценивает: $P(\text{успех}) = 0{,}3$, $P(\text{частичный успех}) = 0{,}5$, $P(\text{неудача}) = 0{,}2$.

(a) Вычисли математическое ожидание для всех трёх проектов.

(b) Какой проект рекомендует правило математического ожидания?

(c) На сколько процентных пунктов должна снизиться $P(\text{успех})$, чтобы проект Y стал привлекательнее проекта X? (Допущение: $P(\text{частичный успех})$ остаётся неизменной, неудача получает оставшуюся вероятность.)

(d) Дополнительно примени максимин и сравни результаты.

Решение: Задача 2.2

(a) Математические ожидания:

$$E[X] = 0{,}3 \cdot 500 + 0{,}5 \cdot 100 + 0{,}2 \cdot (-200) = 150 + 50 - 40 = \mathbf{160}$$
$$E[Y] = 0{,}3 \cdot 300 + 0{,}5 \cdot 150 + 0{,}2 \cdot 50 = 90 + 75 + 10 = \mathbf{175}$$
$$E[Z] = 0{,}3 \cdot 200 + 0{,}5 \cdot 180 + 0{,}2 \cdot 120 = 60 + 90 + 24 = \mathbf{174}$$

(b) $\Rightarrow$ **Проект Y** ($E = 175$ млн евро).
(c) Анализ чувствительности:
Пусть p – новая вероятность успеха (неудача $= 0{,}2 + (0{,}3 - p)$):

$$E[X](p) = p \cdot 500 + 0{,}5 \cdot 100 + (0{,}5 - p) \cdot (-200) = 500p + 50 - 100 + 200p = 700p - 50$$
$$E[Y](p) = p \cdot 300 + 0{,}5 \cdot 150 + (0{,}5 - p) \cdot 50 = 300p + 75 + 25 - 50p = 250p + 100$$

Уравнение $E[X] = E[Y]$:

$$700p - 50 = 250p + 100 \quad \Rightarrow \quad 450p = 150 \quad \Rightarrow \quad p^* = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$$

$P(\text{успех})$ должна снизиться с 0,30 до уровня ниже $0{,}333$ – то есть уже **минимальное снижение** делает Y привлекательнее. При $p = 0{,}3$ уже $E[Y] = 175 > E[X] = 160$ (Y уже лучше).
Проверка: Y уже лучше. Обратный вопрос: при каком p X становится лучше Y? $p > 1/3 \approx 0{,}333$ – то есть при росте с 0,3 выше 0,333.
(d) Максимин: Минимумы: X=-200, Y=50, Z=120. $\Rightarrow$ **Проект Z** (самый надёжный минимум).
Сравнение: математическое ожидание $\rightarrow$ Y; максимин $\rightarrow$ Z. Склонный к риску принимает Y, не склонный к риску – Z.

3 Уровень 3: Сложный

Задача 3.1 – Сравнение всех шести методов

Задача 3.1

Энергетическая компания принимает решение о расширении генерирующих мощностей. Прибыль (млн евро) в зависимости от развития спроса на энергию:

Альтернатива	Сильный рост	Умеренный	Стагнация	Сн
Крупная солнечная генерация	300	180	80	
Морская ветрогенерация	250	200	90	
Газовый резерв	160	140	120	
Атомная энергетика	220	220	220	

Экспертные вероятности: $P = (0{,}25;\ 0{,}35;\ 0{,}25;\ 0{,}15)$.

(a) Примени все шесть методов (максимакс, максимин, Лаплас, Гурвиц с $\alpha = 0{,}6$, Сэвидж-Ниханс, математическое ожидание).

(b) Составь полную сравнительную таблицу.

(c) Какая альтернатива набирает больше всего голосов?

(d) Интерпретируй результат: когда всё же предпочтителен метод с меньшим числом голосов?

Решение: Задача 3.1

(a) Все методы:

Максимакс: max: солнце=300, ветер=250, газ=160, атом=220. $\Rightarrow$ **Солнце** (300).
Максимин: min: солнце=-40, ветер=0, газ=100, атом=220. $\Rightarrow$ **Атомная энергетика** (220).
Лаплас: $\bar{e} = \frac{1}{4}\sum_j$: солнце=$(300+180+80-40)/4 = 130$, ветер=$(250+200+90+0)/4 = 135$, газ=$(160+140+120+100)/4 = 130$, атом=220. $\Rightarrow$ **Атомная энергетика** (220).
Гурвиц ($\alpha = 0{,}6$): $H_i = 0{,}6{\cdot}\max + 0{,}4{\cdot}\min$: $H_{\text{солнце}} = 0{,}6{\cdot}300 + 0{,}4{\cdot}(-40) = 180 - 16 = 164$, $H_{\text{ветер}} = 0{,}6 \cdot 250 + 0{,}4 \cdot 0 = 150$, $H_{\text{газ}} = 0{,}6 \cdot 160 + 0{,}4 \cdot 100 = 96 + 40 = 136$, $H_{\text{атом}} = 0{,}6{\cdot}220 + 0{,}4{\cdot}220 = 220$. $\Rightarrow$ **Атомная энергетика** (220).
Сэвидж-Ниханс: Оптимумы столбцов: 300, 220, 220, 220.

	Сильный	Умерен.	Стагн.	Снижение	макс. сожал.
Солнце	0	40	140	260	**260**
Ветер	50	20	130	220	**220**
Газ	140	80	100	120	**140**
Атом	80	0	0	0	80

$\Rightarrow$ **Атомная энергетика** (макс. сожаление = 80).
Математическое ожидание: $E[\text{Солнце}] = 0{,}25 \cdot 300 + 0{,}35 \cdot 180 + 0{,}25 \cdot 80 + 0{,}15 \cdot (-40) = 75 + 63 + 20 - 6 = 152$
$E[\text{Ветер}] = 0{,}25 \cdot 250 + 0{,}35 \cdot 200 + 0{,}25 \cdot 90 + 0{,}15 \cdot 0 = 62{,}5 + 70 + 22{,}5 + 0 = 155$
$E[\text{Газ}] = 0{,}25 \cdot 160 + 0{,}35 \cdot 140 + 0{,}25 \cdot 120 + 0{,}15 \cdot 100 = 40 + 49 + 30 + 15 = 134$
$E[\text{Атом}] = 220$ (постоянно). $\Rightarrow$ **Атомная энергетика** (220).
(b) Сравнительная таблица:

Метод	Рекомендация	Значение	Голоса
Максимакс	Солнце	300	1
Максимин	Атом	220	
Лаплас	Атом	220	
Гурвиц ($\alpha = 0{,}6$)	Атом	220	
Сэвидж-Ниханс	Атом	80	
Мат. ожидание	Атом	220	5

(c) Большинство голосов: **Атомная энергетика** побеждает с 5 из 6 голосов.
(d) Интерпретация: Несмотря на явное большинство в пользу атомной энергетики, можно выбрать солнечную генерацию, если инвестор *очень оптимистичен* и делает ставку на высокий потенциал роста (300) – например, компания, уже находящаяся под угрозой из-за долгов и придерживающаяся стратегии «всё или ничего» (максимакс). Кроме того: при низком α в критерии Гурвица или очень высокой вероятности успеха ветер или солнце могут стать более привлекательными.

Задача 3.2 – Расширенная задача: минимизация и чувствительность

Задача 3.2

Руководитель производства выбирает между четырьмя производственными стратегиями. Затраты (тыс. евро) в зависимости от развития спроса (задача минимизации):

Стратегия	Бум	Обычный	Слабый	Кризис
Полная автоматизация	80	90	140	200
Частичная автоматизация	100	100	110	130
Гибкое ручное производство	120	115	105	90
Аутсорсинг	110	105	100	95

Вероятности: $P = (0{,}30;\ 0{,}40;\ 0{,}20;\ 0{,}10)$.

(a) Примени минимакс (максимин для затрат), Лапласа, Сэвиджа-Ниханса и математическое ожидание.

(b) Составь полную матрицу сожалений.

(c) При каком значении α по Гурвицу (минимизация: $H_i = \alpha \cdot \min_j + (1-\alpha) \cdot \max_j$) решение меняется с аутсорсинга на полную автоматизацию?

(d) Какая стратегия наиболее устойчива к неопределённости вероятностей? Обоснуй.

Решение: Задача 3.2

(a) Методы:
Минимакс (min максимума строки): max: Полн.=200, Частич.=130, Ручн.=120, Аутс.=110. $\min(200, 130, 120, 110) = 110 \Rightarrow$ **Аутсорсинг**.
Лаплас ($\bar{c}_i = \frac{1}{4}\sum_j c_{ij}$): Полн.=$(80 + 90 + 140 + 200)/4 = 127{,}5$, Частич.=$(100+100+110+130)/4 = 110$, Ручн.=$(120+115+105+90)/4 = 107{,}5$, Аутс.=$(110+105+100+95)/4 = 102{,}5$. $\min = 102{,}5 \Rightarrow$ **Аутсорсинг**.
Математическое ожидание: $E[\text{Полн.}] = 0{,}3 \cdot 80 + 0{,}4 \cdot 90 + 0{,}2 \cdot 140 + 0{,}1 \cdot 200 = 24 + 36 + 28 + 20 = 108$
$E[\text{Частич.}] = 0{,}3 \cdot 100 + 0{,}4 \cdot 100 + 0{,}2 \cdot 110 + 0{,}1 \cdot 130 = 30 + 40 + 22 + 13 = 105$
$E[\text{Ручн.}] = 0{,}3 \cdot 120 + 0{,}4 \cdot 115 + 0{,}2 \cdot 105 + 0{,}1 \cdot 90 = 36 + 46 + 21 + 9 = 112$
$E[\text{Аутс.}] = 0{,}3 \cdot 110 + 0{,}4 \cdot 105 + 0{,}2 \cdot 100 + 0{,}1 \cdot 95 = 33 + 42 + 20 + 9{,}5 = 104{,}5$
$\min = 104{,}5 \Rightarrow$ **Аутсорсинг**.
(b) Матрица сожалений ($r_{ij} = c_{ij} - \min_k c_{kj}$):
Минимумы столбцов: бум=80, обычный=90, слабый=100, кризис=90.

	Бум	Обычн.	Слабый	Кризис	макс. сожал.
Полн. автом.	0	0	40	110	**110**
Частич. автом.	20	10	10	40	40
Ручн. гибк.	40	25	5	0	40
Аутсорсинг	30	15	0	5	30

Сэвидж-Ниханс: $\min(110, 40, 40, 30) = 30 \Rightarrow$ **Аутсорсинг**.
(c) Пороговое значение по Гурвицу ($H_i = \alpha \cdot \min_j c_{ij} + (1-\alpha) \cdot \max_j c_{ij}$):
min: Полн.=80, Аутс.=95. max: Полн.=200, Аутс.=110.

$$H_{\text{Полн.}} = 80\alpha + 200(1-\alpha) = 200 - 120\alpha$$
$$H_{\text{Аутс.}} = 95\alpha + 110(1-\alpha) = 110 - 15\alpha$$

Равенство: $200 - 120\alpha = 110 - 15\alpha \Rightarrow 90 = 105\alpha \Rightarrow \alpha^* = \frac{90}{105} \approx$ **0,857**
При $\alpha > 0{,}857$ (очень оптимистичный взгляд на низкие затраты) побеждает полная автоматизация.
(d) Наиболее устойчивая стратегия: **Аутсорсинг** – имеет наименьшее максимальное сожаление (30), самое низкое среднее по Лапласу (102,5) и лучшее математическое ожидание (104,5). При неопределённости вероятностей аутсорсинг остаётся стабильно в лидерах во всех сценариях, не показывая крайне плохого результата ни в одном состоянии.