Целочисленное программирование

Метод ветвей и границ — основы и алгоритм

Русский

Вольфганг Бёме

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

Данный документ систематически вводит целочисленное программирование. Предварительное условие: базовые знания метода симплекса.

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Введение и мотивация **2**

2 Основные понятия **2**
2.1 Типы целочисленных программ 2
2.2 LP-релаксация 3
2.3 Почему округление не работает 3

3 Алгоритм ветвей и границ **3**
3.1 Основной принцип 3
3.2 Полный алгоритм 4
3.3 Стратегии выбора узла и переменной 4

4 Полный пример **5**
4.1 Постановка задачи 5
4.2 Узел 0: LP-релаксация 5
4.3 Узел 1: $x_1 \leq 1$ 6
4.4 Узел 2: $x_1 \geq 2$ 6
4.5 Узел 3: $x_1 \geq 2$, $x_2 \leq 2$ 6
4.6 Узел 4: $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 3$ 7
4.7 Узел 5: $x_1 \leq 2$, $x_2 \leq 2$ (и $x_1 \geq 2$) 7
4.8 Узел 6: $x_1 \geq 3$, $x_2 \leq 2$ 7
4.9 Узел 7: $x_1 \geq 3$, $x_2 = 0$ 7
4.10 Узел 8: $x_1 \geq 3$, $x_2 \geq 1$, $x_2 \leq 2$ 7
4.11 Итог: дерево ветвей и границ 7
4.12 Оптимальное решение 8

5 Корректность и сходимость **8**

6 Специальные структуры: двоичные программы **9**
6.1 Задача о рюкзаке 0-1 9
6.2 Плоскости разрезов 9

7 Ветви и границы + плоскости разрезов: метод ветвей и разрезов **9**

8 Вычислительная сложность и практические замечания **10**
8.1 NP-трудность 10
8.2 Практическое программное обеспечение 10

9 Резюме **11**

1. Введение и мотивация

In vielen realen Optimierungsproblemen können die Entscheidungsvariablen keine beliebigen reellen Werte annehmen, sondern müssen **ganzzahlig** sein. Typische Beispiele:

Типичные применения целочисленного программирования

- **Выбор местоположения:** строить ли завод на данном месте? ($x_i \in \{0, 1\}$)
- **Задача о рюкзаке:** сколько единиц товара взять? ($x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)
- **Планирование персонала:** сколько сотрудников назначить на смену i? ($x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)
- **Планирование производства:** сколько целых единиц оборудования закупить? ($x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)
- **Маршрутизация:** использовать ли маршрут j? ($x_j \in \{0, 1\}$)

Простое округление LP-решения, как правило, **не** даёт оптимального целочисленного решения и может приводить к недопустимым решениям. Поэтому необходим специальный алгоритм: **метод ветвей и границ**.

2. Основные понятия

2.1. Типы целочисленных программ

Определение: Целочисленные программы

- **Целочисленная линейная программа (ЦЛП):** все переменные целые.

$$\max \ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$$

- **Смешанная целочисленная линейная программа (СЦЛП):** только часть переменных целые.

$$\max \ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \mathbf{d}^\top \mathbf{y} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{y} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^p, \ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$$

- **Двоичная целочисленная программа (ДЦП):** все переменные двоичные ($x_i \in \{0, 1\}$).

2.2. LP-релаксация

Определение: LP-релаксация

LP-релаксация ЦЛП получается отказом от условий целочисленности:

$$\text{(LP-R)} \quad \max \ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Теорема 1: Оценка через LP-релаксацию

Для каждой ЦЛП: оптимальное значение LP-релаксации z^*_{LP} является **верхней оценкой** оптимального значения ЦЛП z^*_{ILP}:

$$z^*_{ILP} \leq z^*_{LP}$$

Доказательство. Каждое целочисленно допустимое решение также LP-допустимо (условие целочисленности строже). LP оптимизируется по большему допустимому множеству, поэтому его оптимум не меньше. □

Integrality gap: разность $z^*_{LP} - z^*_{ILP}$ называется **зазором целочисленности**. Чем он больше, тем сложнее задача.

2.3. Почему округление не работает

Контрпример: округление даёт неверные результаты

$$\max \ z = 5x_1 + 4x_2 \quad \text{s.t.} \quad 6x_1 + 4x_2 \leq 21, \quad x_1 + 2x_2 \leq 7, \quad x_1, x_2 \geq 0, \ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

LP-релаксация: $x_1^* = 2{,}5$, $x_2^* = 2{,}25$, $z^*_{LP} = 21{,}5$
Округлено: $\lfloor x_1 \rfloor = 2$, $\lfloor x_2 \rfloor = 2 \Rightarrow z = 18$ (zulässig, aber nicht optimal!)
Истинный оптимум: $x_1^* = 3$, $x_2^* = 0$, $z^*_{ILP} = 15$ *oder besser:* $x_1^* = 1$, $x_2^* = 3$, $z = 17$
Tatsächlich: $x_1^* = 3$, $x_2^* = 0$ mit $z = 15$ oder $x_1^* = 0$, $x_2^* = 3$ mit $z = 12$ – das gerundete Ergebnis $(2, 2)$ mit $z = 18$ ist zufällig besser, aber es ist nicht das wahre Optimum. Das wahre Optimum liegt bei $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $z = 18$ – in diesem Fall stimmt es zufällig, aber das ist nicht garantiert!

3. Алгоритм ветвей и границ

3.1. Основной принцип

Метод ветвей и границ (МВГ) объединяет три идеи:

1. **Релаксация (границы):** решить LP для получения верхней оценки поддерева.
2. **Ветвление:** разбить задачу на две подзадачи добавлением ограничения.
3. **Отсечение:** отбросить подзадачи, чья верхняя оценка не превышает лучшего известного целочисленного решения.

Определение: переменная ветвления и ветвление

Пусть $\mathbf{x}^*$ — LP-оптимальное решение подзадачи, x_j^* — дробная переменная ($x_j^* \notin \mathbb{Z}$). Тогда **ветвление по** x_j:

- **Левое поддерево:** добавить $x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor$
- **Правое поддерево:** добавить $x_j \geq \lceil x_j^* \rceil$

Каждое целочисленное решение удовлетворяет ровно одному из двух условий.

3.2. Полный алгоритм

Алгоритм: метод ветвей и границ (максимизация)

1. **Initialisierung:** Setze $z^* = -\infty$ (beste bekannte ganzzahlige Lösung), $\mathbf{x}^* = \emptyset$. Füge das ursprüngliche LP als Knoten 0 zur Warteschlange hinzu.
2. **Выбор узла:** выбрать узел из очереди (напр. наилучший первым или в глубину).
3. **Решить LP:** решить LP-релаксацию узла.
4. **Разбор случаев:**
   (a) **LP недопустима:** отбросить узел. *Отсечён (недопустим).*
   (b) **LP-граница** $\leq z^*$**:** отбросить узел. *Отсечён (граница).*
   (c) **LP-решение целое и граница** $> z^*$**:** обновить z^* и $\mathbf{x}^*$. *Новое лучшее решение.*
   (d) **LP-решение дробное:** выбрать дробную переменную x_j, создать два дочерних узла. *Ветвление.*
5. Falls Warteschlange leer: $\mathbf{x}^*$ ist optimal. Stopp. Sonst: Gehe zu Schritt 2.

3.3. Стратегии выбора узла и переменной

Выбор узла:

- **Лучший первым:** выбрать узел с наибольшей верхней оценкой. Führt schnell zur Optimallösung, benötigt aber viel Speicher.
- **В глубину:** следовать за самым глубоким узлом. Speichersparend, findet schnell zulässige Lösungen.
- **Лучший первым + возврат:** комбинация обеих стратегий.

Выбор переменной (правила ветвления):

- **Наиболее дробная:** выбрать переменную, ближайшую к $0{,}5$.
- **Наименее дробная:** выбрать переменную с наименьшей дробной частью.
- **Псевдостоимостное ветвление:** оценить улучшение по предыдущим итерациям.

4. Полный пример

4.1. Постановка задачи

Пример: планирование производства с целыми количествами

Предприятие производит два продукта P_1 и P_2.

$$\max\ z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\le 21 \qquad \text{(мощность оборудования)} \\ x_1 + 2x_2 &\le 7 \qquad \text{(складская ёмкость)} \\ x_1, x_2 &\ge 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

4.2. Узел 0: LP-релаксация

Сначала решим LP-релаксацию (без условий целочисленности).

Начальная таблица (переменные отклонения s_1, s_2):

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	b
s_1	6	4	1	0	21
s_2	1	2	0	1	7
z	-5	-4	0	0	0

Итерация 1: Ведущий столбец x_1 ($\bar{c}_1 = -5$). Отношения: $21/6 = 3{,}5$, $7/1 = 7$. Ведущая строка: s_1. Ведущий элемент: 6.

Таблица после итерации 1:

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	1	$2/3$	$1/6$	0	$7/2$
s_2	0	$4/3$	$-1/6$	1	$7/2$
z	0	$-2/3$	$5/6$	0	$35/2$

Итерация 2: Ведущий столбец x_2. Отношения: $(7/2)/(2/3) = 5{,}25$, $(7/2)/(4/3) = 2{,}625$. Ведущая строка: s_2. Ведущий элемент: $4/3$.

Оптимальная таблица (узел 0):

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	1	0	$1/4$	$-1/2$	$7/4$
x_2	0	1	$-1/8$	$3/4$	$21/8$
z	0	0	$3/4$	$1/2$	$\mathbf{21{,}5}$

LP-решение: $x_1^* = 7/4 = 1{,}75$, $x_2^* = 21/8 = 2{,}625$, $z_{LP}^* = 21{,}5$

Обе переменные **дробные** $\Rightarrow$ требуется метод ветвей и границ.

Ветвление по x_1 (наиболее дробная: $1{,}75 - 1 = 0{,}75 > 2{,}625 - 2 = 0{,}625$):

Knoten 1: $x_1 \leq 1$ Knoten 2: $x_1 \geq 2$

4.3. Узел 1: $x_1 \leq 1$

Дополнительное ограничение: $x_1 \leq 1$, т.е. $x_1 + s_3 = 1$.

LP-решение узла 1: при $x_1 \leq 1$ симплекс даёт: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $z = 17$. Обе переменные целые!

Новое лучшее решение: $z^* = 17$, $x_1^* = 1$, $x_2^* = 3$.

4.4. Узел 2: $x_1 \geq 2$

Дополнительное ограничение: $x_1 \geq 2$.

LP-решение узла 2: $x_1 = 2$, $x_2 = 2{,}25$, $z = 19$.

$x_2 = 2{,}25$ дробное $\Rightarrow$ ветвление по x_2:

Knoten 3: $x_2 \leq 2$ Knoten 4: $x_2 \geq 3$

4.5. Узел 3: $x_1 \geq 2$, $x_2 \leq 2$

LP-решение: $x_1 = 2{,}5$, $x_2 = 2$, $z = 20{,}5$

$x_1 = 2{,}5$ дробное $\Rightarrow$ ветвление по x_1:

Knoten 5: $x_1 \leq 2$ Knoten 6: $x_1 \geq 3$

4.6. Узел 4: $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 3$

LP-решение: $x_1 = 5/4$, $x_2 = 3$ – aber $x_1 \geq 2$ und $x_1 = 1{,}25 < 2 \Rightarrow$ **Unzulässig!**

Узел 4 отбрасывается.

4.7. Узел 5: $x_1 \leq 2$, $x_2 \leq 2$ (и $x_1 \geq 2$)

Damit $x_1 = 2$ (fixiert). **LP-решение:** $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $z = 18$.

Beide ganzzahlig! $z = 18 > 17 = z^* \Rightarrow$ **Новое лучшее решение:** $z^* = 18$.

4.8. Узел 6: $x_1 \geq 3$, $x_2 \leq 2$

LP-решение: $x_1 = 3$, $x_2 = 3/4$, $z = 18$.

$x_2 = 0{,}75$ дробное $\Rightarrow$ ветвление по x_2:

Knoten 7: $x_2 \leq 0$ Knoten 8: $x_2 \geq 1$

4.9. Узел 7: $x_1 \geq 3$, $x_2 = 0$

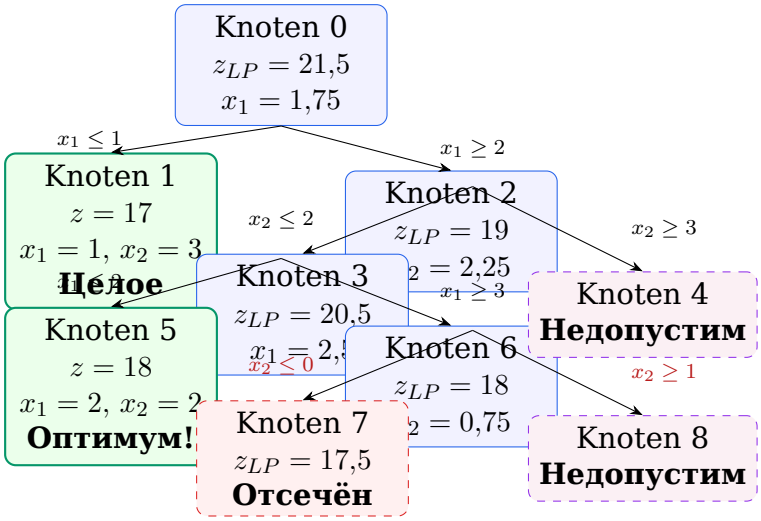
LP-решение: $x_1 = 3{,}5$, $x_2 = 0$, $z = 17{,}5$

$z = 17{,}5 \leq z^* = 18 \Rightarrow$ **Отсечён!**

4.10. Узел 8: $x_1 \geq 3$, $x_2 \geq 1$, $x_2 \leq 2$

Проверка: $6(3) + 4(1) = 22 > 21 \Rightarrow$ **Недопустим!**

4.11. Итог: дерево ветвей и границ



Цветовое обозначение:

- Синий: LP-решение, ещё дробное

- Зелёный: найдено целочисленное решение
- Красный пунктир: отсечён (граница $\leq z^*$)
- Фиолетовый пунктир: недопустим

4.12. Оптимальное решение

$$\boxed{x_1^* = 2, \quad x_2^* = 2, \quad z_{ILP}^* = 18}$$

Зазор целочисленности: $z_{LP}^* - z_{ILP}^* = 21{,}5 - 18 = 3{,}5$ (16,3%)

5. Корректность и сходимость

Теорема 2: Корректность метода ветвей и границ

Алгоритм ветвей и границ находит оптимальное целочисленное решение (или устанавливает недопустимость), если:

1. каждый узел корректно оценивается LP-решением,
2. ветвление исчерпывающе (каждое целое решение лежит ровно в одном поддереве),
3. дерево полностью обработано (или корректно отсечено).

Доказательство. Полной индукцией по глубине дерева МВГ. Каждое целое решение $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ лежит ровно в одном листе полного дерева. Так как $x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor$ и $x_j \geq \lceil x_j^* \rceil$ охватывают все целые значения и дизъюнктны, ни одно допустимое целое решение не упускается. Отсечение отбрасывает только узлы, чья LP-оценка не может превысить лучшее известное решение. □

Теорема 3: Конечность метода ветвей и границ

При ограниченном допустимом множестве и целых коэффициентах МВГ завершается за конечное число шагов.

Идея доказательства. Глубина дерева ограничена числом переменных ветвления. При ограниченном допустимом множестве целых точек конечное число. Отсечение резко сокращает число исследуемых узлов. □

6. Специальные структуры: двоичные программы

6.1. Задача о рюкзаке 0-1

Классическая **задача о рюкзаке 0-1** — важный частный случай:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b, \quad x_j \in \{0,1\}$$

Оценка через LP-релаксацию: упорядочить предметы по c_j/a_j (убыванию) и заполнять рюкзак последовательно — последний предмет берётся дробно (жадная оценка).

6.2. Плоскости разрезов

Важным дополнением к МВГ являются **плоскости разрезов**, сужающие допустимое множество LP-релаксации без исключения целочисленных решений.

Определение: разрез Гомори

Пусть строка i оптимальной таблицы: $x_{B_i} = \bar{b}_i - \sum_j \bar{a}_{ij} x_j$, $\bar{b}_i \notin \mathbb{Z}$. **Разрез Гомори**:

$$\sum_j \{\bar{a}_{ij}\} x_j \geq \{\bar{b}_i\}$$

где $\{v\} = v - \lfloor v \rfloor$ — дробная часть.

Разрезы Гомори гарантируют, что после конечного числа разрезов LP-релаксация даёт оптимальное целочисленное решение.

7. Ветви и границы + плоскости разрезов: метод ветвей и разрезов

Современные решатели ЦЛП объединяют МВГ с плоскостями разрезов в **алгоритм ветвей и разрезов**:

1. Решить LP-релаксацию в узле.
2. Добавить плоскости разрезов (Гомори, клики и др.).
3. Если LP-решение целое: обновить лучшее решение.
4. Если LP-граница слабая: отсечь.
5. Иначе: ветвление.

Метод ветвей и разрезов — основа всех современных решателей ЦЛП (CPLEX, Gurobi, SCIP).

8. Вычислительная сложность и практические замечания

8.1. NP-трудность

Целочисленные линейные программы в общем случае **NP-трудны**: алгоритм с полиномиальным временем неизвестен. В худшем случае число узлов МВГ растёт экспоненциально.

Тем не менее современные решатели (CPLEX, Gurobi) решают задачи с миллионами переменных за приемлемое время — благодаря:

- **Сильной LP-релаксации** за счёт многих плоскостей разрезов
- **Эвристикам** для быстрого нахождения хороших начальных решений
- **Предобработке:** упрощение задачи перед решением
- **Параллелизации** дерева МВГ

8.2. Практическое программное обеспечение

- **CPLEX, Gurobi:** коммерческие решатели, очень быстрые
- **SCIP, CBC (COIN-OR):** альтернативы с открытым кодом
- **Python:** `scipy.optimize.milp`, `PuLP`, `OR-Tools`
- **MATLAB:** `intlinprog`

9. Резюме

Ключевые положения: целочисленное программирование

1. **Условия целочисленности** возникают, когда переменные могут принимать только целые значения.
2. **LP-релаксация** даёт верхнюю оценку; простое округление не даёт оптимума.
3. **Метод ветвей и границ** решает ЦЛП систематическим ветвлением и отсечением.
4. **Граница:** LP-релаксация каждой подзадачи даёт верхнюю оценку.
5. **Ветвление:** по дробной переменной двумя новыми ограничениями.
6. **Отсечение:** узлы с оценкой $\leq z^*$ отбрасываются.
7. **Зазор целочисленности** $= z^*_{LP} - z^*_{ILP}$ измеряет сложность задачи.
8. **Плоскости разрезов** (Гомори) улучшают LP-оценку не исключая целых решений.
9. **Ветви и разрезы** объединяют МВГ с плоскостями разрезов — основа современных решателей.
10. ЦЛП в общем **NP-трудна**; современные решатели тем не менее эффективно решают крупные задачи.
