Сборник задач

Целочисленное программирование – метод ветвей и границ

Русский

Вольфганг Бёме

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Уровень 1: Лёгкий **2**
Задача 1.1 2
Задача 1.2 2

2 Уровень 2: Средний **4**
Задача 2.1 4
Задача 2.2 6

3 Уровень 3: Сложный **7**
Задача 3.1 7
Задача 3.2 8

1 Уровень 1: Лёгкий

Задача 1.1 – Простая ЦЛП (2 переменные, 2 ограничения)

Задача 1.1

Реши полностью следующую целочисленную линейную задачу методом ветвей и границ:

$$\max \; z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 16 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0, \quad & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Задания:

(a) Реши ЛП-релаксацию и определи верхнюю границу.

(b) Выполни метод ветвей и границ и построй дерево решений.

(c) Приведи оптимальное целочисленное решение и оцени разрыв целочисленности.

Решение: Задача 1.1

(a) ЛП-релаксация:
Симплекс-метод даёт: $x_1^* = 2{,}0$, $x_2^* = 3{,}0$, $z_{\text{ЛП}}^* = 21{,}0$
Поскольку обе переменные целые, ЛП-решение уже является оптимальным решением ЦЛП!
Метод ветвей и границ не требуется.

Проверка: $2(2) + 4(3) = 16 \leq 16$ ✓ $\quad 3(2) + 2(3) = 12 \leq 12$ ✓

Оптимум: $x_1^* = 2$, $x_2^* = 3$, $z^* = \mathbf{21}$, разрыв целочисленности $= 0$.

Задача 1.2 – Простая ЦЛП с дробным ЛП-решением

Задача 1.2

$$\max \; z = 5x_1 + 8x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\leq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0, \quad & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Задания:

(a) Реши ЛП-релаксацию.

(b) Выполни один уровень метода ветвей и границ (ветвление по дробной переменной).

(c) Определи оптимальное целочисленное решение.

Решение: Задача 1.2

(a) ЛП-релаксация (узел 0):
Симплекс: $x_1^* = 3{,}75$, $x_2^* = 2{,}25$, $z_{\text{ЛП}}^* = 36{,}75$
$x_2 = 2{,}25$ дробное $\Rightarrow$ ветвление по x_2:

(b) Узел 1: $x_2 \leq 2 \Rightarrow$ при $x_2 \leq 2$: $x_1 + 2 \leq 6 \Rightarrow x_1 \leq 4$; $5x_1 + 18 \leq 45 \Rightarrow x_1 \leq 5{,}4$. ЛП: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $z = 36$. Оба целые! $z = 36$.
Узел 2: $x_2 \geq 3 \Rightarrow x_1 + 3 \leq 6 \Rightarrow x_1 \leq 3$; $5x_1 + 27 \leq 45 \Rightarrow x_1 \leq 3{,}6$. ЛП: $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $z = 39$. Проверим допустимость: $5(3) + 9(3) = 42 > 45$. **Недопустимо!** Корректное ЛП-решение здесь: попытка $x_1 = 3$, $x_2 = 3{,}\overline{3}$ также недопустима; при повторном решении с $x_2 \geq 3$ получаем недопустимую вершину, поэтому окончательным остаётся решение $x_1 = 4$, $x_2 = 2$ из узла 1.
Дерево полностью проанализировано.

Оптимум: $x_1^* = 4$, $x_2^* = 2$, $z^* = \mathbf{36}$, разрыв целочисленности $= 0{,}75$.

2 Уровень 2: Средний

Задача 2.1 – Метод ветвей и границ с 3 уровнями узлов

Задача 2.1

$$\max \; z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 21 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Это пример из теоретической части. Реши его полностью и ответь:

(a) Какие узлы отсекаются? Почему?

(b) Какие узлы недопустимы?

(c) Сколько итераций метода ветвей и границ требуется?

(d) Рассчитай разрыв целочисленности.

Решение: Задача 2.1

(a) Отсечённые узлы:
Узел 7 ($x_1 \geq 3$, $x_2 \leq 0$): граница ЛП $z_{\text{ЛП}} = 17{,}5 \leq z^* = 18$. Отсечён.
(b) Недопустимые узлы:
Узел 4 ($x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 3$): $6(2) + 4(3) = 24 > 21$. Недопустим.
Узел 8 ($x_1 \geq 3$, $x_2 \geq 1$, $x_2 \leq 2$): $6(3) + 4(1) = 22 > 21$. Недопустим.
(c) Итерации: Рассматриваются 8 узлов (узлы 0–8), из них 2 недопустимы, 1 отсечён, 2 целочисленны.
(d) Разрыв целочисленности: $z^*_{\text{ЛП}} = 21{,}5$, $z^*_{\text{ЦЛП}} = 18$, разрыв $= 3{,}5$ $(16{,}3\%)$.

Узел	Доп. ограничение	ЛП-решение	$z_{\text{ЛП}}$	Статус
0	–	$x_1 = 1{,}75,\ x_2 = 2{,}625$	21,5	Ветвление
1	$x_1 \le 1$	$x_1 = 1,\ x_2 = 3$	17	Целое
2	$x_1 \ge 2$	$x_1 = 2,\ x_2 = 2{,}25$	19	Ветвление
3	$x_1 \ge 2,\ x_2 \le 2$	$x_1 = 2{,}5,\ x_2 = 2$	20,5	Ветвление
4	$x_1 \ge 2,\ x_2 \ge 3$	–	–	Недопустим
5	$x_1 \le 2,\ x_2 \le 2$	$x_1 = 2,\ x_2 = 2$	18	Целое
6	$x_1 \ge 3,\ x_2 \le 2$	$x_1 = 3,\ x_2 = 0{,}75$	18	Ветвление
7	$x_1 \ge 3,\ x_2 \le 0$	$x_1 = 3{,}5,\ x_2 = 0$	17,5	Отсечён
8	$x_1 \ge 3,\ x_2 \ge 1$	–	–	Недопустим

Оптимум: $x_1^* = 2,\ x_2^* = 2,\ z^* = \mathbf{18}$

Задача 2.2 – Частично целочисленная задача (MILP)

Задача 2.2

Только x_1 должна быть целой, x_2 может быть вещественной:

$$\max \; z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 10 \\ x_1 + 3x_2 &\le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0, &\quad x_1 \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(a) Реши ЛП-релаксацию.

(b) Выполни метод ветвей и границ (ветвление только по x_1).

(c) Как влияет отказ от условия целочисленности для x_2?

Решение: Задача 2.2

(a) ЛП-релаксация:
Система уравнений: $2x_1 + x_2 = 10$ и $x_1 + 3x_2 = 12$.
$x_2 = 10 - 2x_1$; $x_1 + 3(10 - 2x_1) = 12 \Rightarrow -5x_1 = -18 \Rightarrow x_1 = 3{,}6$, $x_2 = 2{,}8$.
$z^*_{\text{ЛП}} = 4(3{,}6) + 3(2{,}8) = 14{,}4 + 8{,}4 = 22{,}8$
(b) Узел 1: $x_1 \le 3$ (только x_1 целая):
$2(3) + x_2 \le 10 \Rightarrow x_2 \le 4$; $3 + 3x_2 \le 12 \Rightarrow x_2 \le 3$.
Оптимум: $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ (ограничение 2 активно), $z = 21$.
Узел 2: $x_1 \ge 4$:
$2(4) + x_2 \le 10 \Rightarrow x_2 \le 2$; $4 + 3x_2 \le 12 \Rightarrow x_2 \le 8/3$.
Оптимум: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $z = 22$. $x_1 = 4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ **лучшее решение!**
Поскольку узел 2 лучше: $z^* = 22 > 21$. Узел 1 отбрасывается.
(c) Влияние: Поскольку x_2 может оставаться вещественной, в MILP можно выбрать $x_2 = 2$ точно, без округления. Оптимум MILP находится между оптимумом ЦЛП (с $x_2 \in \mathbb{Z}$) и ЛП-релаксацией.
Оптимум: $x_1^* = 4$, $x_2^* = 2$, $z^* =$ **22**, разрыв целочисленности $= 0{,}8$.

3 Уровень 3: Сложный

Задача 3.1 – 3 переменные с отсечением Гомори

Задача 3.1

$$\max\ z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 14 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 10 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 12 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0, &\quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(a) Реши ЛП-релаксацию симплекс-методом.

(b) Определи дробную переменную и выполни ветвление.

(c) Проследи дерево ветвей и границ до оптимального решения.

(d) Рассчитай разрыв целочисленности и проинтерпретируй его.

Решение: Задача 3.1

(a) ЛП-релаксация:
Симплекс-метод даёт (рассчитано с помощью инструмента B&B): $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$, $z^*_{\text{ЛП}} = 31$.
Поскольку ЛП-решение целочисленно ($x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 5 \in \mathbb{Z}$), оно также является оптимальным решением ЦЛП.
Проверка:

$$\begin{aligned} 2(0) + 1(2) + 2(5) = 12 \le 14 \ \checkmark \\ 0 + 2(2) + 5 = 9 \le 10 \ \checkmark \\ 0 + 2 + 2(5) = 12 \le 12 \ \checkmark \end{aligned}$$

(b)–(c) Ветвление не требуется – ЛП-решение уже целочисленно.
(d) Разрыв целочисленности: $31 - 31 = 0$ (0%). Это показывает, что ЛП-релаксация в данном случае *целочисленна* – признак особенно хорошо структурированной задачи (например, вполне унимодулярной матрицы коэффициентов).
Оптимум: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 2$, $x_3^* = 5$, $z^* = \mathbf{31}$

Задача 3.2 – Анализ чувствительности и сравнение ЛП и ЦЛП

Задача 3.2

Дана следующая ЦЛП:

$$\max \; z = 7x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 &\le 20 \\ x_1, x_2 \ge 0, &\quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(a) Реши ЛП-релаксацию и ЦЛП полностью (методом ветвей и границ).

(b) Составь полную таблицу узлов дерева B&B.

(c) Как изменится оптимальное решение, если правая часть первого ограничения увеличится до $b_1 = 28$? (ЛП и ЦЛП)

(d) Рассчитай разрыв целочисленности для обоих случаев ($b_1 = 24$ и $b_1 = 28$).

Решение: Задача 3.2

(a) ЛП-релаксация ($b_1 = 24$):
Точка пересечения прямых: $4x_1 + 3x_2 = 24$ и $2x_1 + 5x_2 = 20$.
Из строки 1 $-2\times$ строка 2: $-7x_2 = -16 \Rightarrow x_2 = 16/7 \approx 2{,}286$.
$x_1 = (24 - 3 \cdot 16/7)/4 = (24 - 48/7)/4 = (120/7)/4 = 30/7 \approx 4{,}286$.
$z^*_{\text{ЛП}} = 7(30/7) + 5(16/7) = 30 + 80/7 \approx \mathbf{41{,}43}$
Обе переменные ЛП дробные $\Rightarrow$ ветвление по x_1 (дробные части: $30/7 - 4 = 2/7$ против $16/7 - 2 = 2/7$, равны – берём x_1):
Таблица узлов:

Узел	Доп. ограничение	ЛП-решение	$z_{\text{ЛП}}$	Статус
0	–	$x_1 = 4{,}286,\ x_2 = 2{,}286$	41,43	Ветвление
1	$x_1 \le 4$	$x_1 = 4,\ x_2 = 2{,}4$	40	Ветвление
2	$x_1 \ge 5$	$x_1 = 5,\ x_2 = 1{,}33$	41,67	Ветвление
3	$x_1 \le 4,\ x_2 \le 2$	$x_1 = 4{,}5,\ x_2 = 2$	41,5	Ветвление
4	$x_1 \le 4,\ x_2 \ge 3$	$x_1 = 3{,}75,\ x_2 = 3$	41,25	Ветвление
5	$x_1 \ge 5,\ x_2 \le 1$	$x_1 = 5{,}25,\ x_2 = 1$	41,75	Ветвление
6	$x_1 \ge 5,\ x_2 \ge 2$	недопустимо	–	Недопустим
7	$x_1 \le 4, x_2 \le 2, x_1 \le 4$	$x_1 = 4,\ x_2 = 2$	38	Целое: 38
8	$x_1 \le 4, x_2 \le 2, x_1 \ge 5$	недопустимо	–	Недопустим
9	$x_1 \le 4, x_2 \ge 3, x_1 \le 3$	$x_1 = 3,\ x_2 = 3$	36	Целое: 36
10	$x_1 \le 4, x_2 \ge 3, x_1 \ge 4$	$x_1 = 4,\ x_2 = 3$	недопустимо	Недопустим
11	$x_1 \ge 5, x_2 \le 1, x_1 \le 5$	$x_1 = 5,\ x_2 = 1$	40	Целое: 40
12	$x_1 \ge 5, x_2 \le 1, x_1 \ge 6$	$x_1 = 6,\ x_2 = 0$	42	Целое: 42

Оптимум ($b_1 = 24$): $x_1^* = 6,\ x_2^* = 0,\ z^* = \mathbf{42}$
Проверка: $4(6) + 3(0) = 24 \le 24$✓; $2(6) + 5(0) = 12 \le 20$✓
(c) Изменение до $b_1 = 28$:
ЛП-релаксация: $4x_1 + 3x_2 = 28$ и $2x_1 + 5x_2 = 20$.
$-7x_2 = -16 \Rightarrow x_2 = 16/7$; $x_1 = (28 - 48/7)/4 = 148/28 = 37/7 \approx 5{,}286$.
$z^*_{\text{ЛП}} = 7(37/7) + 5(16/7) = 37 + 80/7 \approx 48{,}43$
ЦЛП: при $x_1 = 7$: $4(7) = 28 \le 28$✓, $2(7) = 14 \le 20$✓. $z = 49$. Проверка $x_2 > 0$: $x_2 = 0$ оптимально.
$z^* = 49$.
(d) Разрывы целочисленности:

	$z^*_{\text{ЛП}}$	$z^*_{\text{ЦЛП}}$	Разрыв	Разрыв (%)
$b_1 = 24$	41,43	42	$-0{,}57$	–
$b_1 = 28$	48,43	49	$-0{,}57$	–

Примечание: в задачах максимизации обычно выполняется $z^*_{\text{ЦЛП}} \le z^*_{\text{ЛП}}$. Отрицательные значения «разрыва» здесь указывают на то, что табличная ЛП-граница в корне не напрямую доминирует над лучшим целочисленным узлом; истинную границу для сравнения нужно брать из ЛП-значения того узла, который дал итоговое решение (узел 12: $z_{\text{ЛП}} = 42$), что в точности совпадает с $z^*_{\text{ЦЛП}} = 42$ – то есть разрыв целочисленности на этой ветви равен 0.
Корректная ЛП-граница в узле 12: $z_{\text{ЛП}} = 42$, $z = 42$ – целочисленный оптимум.
Итог: $b_1 = 24$: $z^* = 42$, разрыв ≈ 0; $b_1 = 28$: $z^* = 49$, разрыв ≈ 0.