Четырёхмерный калькулятор затраты–выпуск

Сборник задач трёх уровней сложности
с решениями

Русский

Вольфганг Бёме
wolfgang.boehme@economic-modeling.de
www.economic-modeling.de

4 ноября 2026 г.

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Указания **2**

2 Уровень 1 — основы **3**

3 Уровень 2 — применение **4**

4 Уровень 3 — комплексные задачи **6**

A Решения **8**

Литература **9**

1. Указания

Задачи отнесены к пяти вкладкам калькулятора затраты–выпуск и охватывают четырёхмерную модель (вкладка 1), модели M1–M9 (вкладка 2), частичные таблицы затраты–выпуск (вкладка 3), матрицы выпуска и использования (вкладка 4), а также натурально-стоимостной баланс (вкладка 5). Решения приведены в приложении; они численно проверены по логике инструмента.

Проверка в калькуляторе:

- Вкладка 1: задать число товаров n и секторов m, *Создать таблицы*, ввести матрицу промежуточных потоков и конечный спрос (или загрузить их как CSV), *Рассчитать*. Комбинированные индексы упорядочены по секторам: G1-B1, G2-B1, …, Gn-B1, G1-B2, … (B = сектор).
- Цены вводятся по товару *и* сектору (p_{ik}, поля G1-B1, G2-B1, …); один и тот же товар может иметь в разных секторах разные цены.
- Вкладки 2 и 3 используют данные, рассчитанные на вкладке 1; вкладки 4 и 5 имеют собственный ввод (вкладка 5 может перенять данные из вкладки 1).
- Собственные результаты можно сохранить на вкладке 1 кнопкой *Сохранить текущий результат в датабоксе*.

2. Уровень 1 — основы

Задача

Задача 1.1 (вкладка 1 — валовой выпуск)

Товар производится в секторе со следующими промежуточными поставками четырём направлениям использования: $10,\ 5,\ 3,\ 2$. Конечный спрос равен $Y = 15$. Рассчитайте валовой выпуск X.

Задача

Задача 1.2 (вкладка 1 — коэффициент затрат)

Поставка $X_{ijkl} = 12$ служит производству направления использования с валовым выпуском $X_{jl} = 60$. Рассчитайте коэффициент затрат a_{ijkl}.

Задача

Задача 1.3 (вкладка 2 — соотнесение моделей)

Соотнесите модели M1, M5 и M9 с правильной комбинацией стороны затрат и стороны выпуска (оба признака / только товар / только сектор). Какие из этих моделей квадратные и, следовательно, однозначно разрешимы, и какова их размерность?

Задача

Задача 1.4 (вкладка 4 — матрица рыночных долей)

Сектор k производит товары 1, 2, 3 в количествах $50, 3, 2$. (Заданные) выпуски товаров равны $x = (60;\ 20;\ 10)$. Рассчитайте соответствующую строку матрицы рыночных долей D ($D_{ki} = V_{ki}/x_i$).

Задача

Задача 1.5 (вкладка 5 — остаточное производство, понятие)

Объясните своими словами, что представляет собой столбец остаточного производства в таблице А натурально-стоимостного баланса и зачем он нужен.

3. Уровень 2 — применение

Задача

Задача 2.1 (вкладка 1 — обратная матрица Леонтьева, 2×2)

Дана матрица коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}15 & 0{,}30 \end{pmatrix}$$

и конечный спрос $Y = (100;\ 80)^{\top}$. Рассчитайте обратную матрицу Леонтьева $L = (I - A)^{-1}$ и валовой выпуск $X = LY$.

Задача

Задача 2.2 (вкладка 2 — модель M4)

Дана матрица промежуточных потоков (2 товара, 2 сектора, комбинированный индекс G1-B1, G2-B1, G1-B2, G2-B2):

$$Z = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 12 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 15 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Сформируйте матрицу числителей модели M4 (ещё не делённую на X), т. е. просуммируйте по индексу сектора k на стороне затрат.

Задача

Задача 2.3 (вкладка 3 — модифицированный конечный спрос)

Строка $(i, k) \in N_1$ имеет исходный конечный спрос $Y = 50$ и дополнительно поставляет 6 и 4 единицы двум направлениям использования, относящимся к N_2. Рассчитайте Y^{*}.

Задача

Задача 2.4 (вкладка 4 — отраслевая технология)

Даны

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}40 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}85 \end{pmatrix}.$$

Рассчитайте матрицу коэффициентов товар $\times$ товар $A_{ii} = B\,D$ при предположении об отраслевой технологии.

Задача

Задача 2.5 (вкладка 5 — расчёт столбца остаточного производства)

Строка N_1 поставляет двум товарам группы N_2 в секторе $l = 1$ количества 4 и 7. Рассчитайте остаточное производство Ост.произв.$_{ik,1}$ для этого сектора.

Задача

Задача 2.6 (вкладка 1 — стоимостная оценка по товару и сектору)

Коэффициент затрат поставки товара i из сектора k на использование (j, l) равен $a_{ijkl} = 0{,}20$. Цены: $p_{ik} = 2$ для поставляемого товара (из сектора k) и $p_{jl} = 1{,}6$ для получающего товара (в секторе l). Рассчитайте стоимостной коэффициент $a^{p}_{ijkl} = a_{ijkl}\, p_{ik} / p_{jl}$. Как изменится результат, если тот же товар i поставляется из другого сектора k' по цене $p_{ik'} = 1{,}6$?

4. Уровень 3 — комплексные задачи

Задача

Задача 3.1 (вкладка 1 — полная модель)

Даны для $n = 3$ товаров и $m = 2$ секторов (комбинированный индекс G1-B1, G2-B1, G3-B1, G1-B2, G2-B2, G3-B2):

$$Z = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 5 & 8 & 4 & 3 \\ 8 & 20 & 6 & 4 & 9 & 2 \\ 4 & 3 & 12 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 25 & 10 & 4 \\ 3 & 8 & 4 & 7 & 28 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 5 & 18 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 70 \\ 80 \\ 95 \\ 105 \end{pmatrix}.$$

Рассчитайте валовой выпуск X, коэффициент затрат a_{1111}, а также (любыми средствами, например с помощью калькулятора) обратную матрицу Леонтьева L. Проверьте $X = LY$.

Задача

Задача 3.2 (вкладка 3 — частичная таблица со стоимостной оценкой)

Используйте данные задачи 3.1. Сформируйте частичную таблицу для $N_1 = \{G1, G3\}$ ($N_2 = \{G2\}$) и рассчитайте Y^* для всех четырёх строк N_1. Затем оцените Y^* в ценах по товару и сектору

G1-B1	G2-B1	G3-B1	G1-B2	G2-B2	G3-B2
1	1	2	1	1	2,5

(товар G3 дороже, причём в секторе 2 дороже, чем в секторе 1).

Задача

Задача 3.3 (вкладка 4 — сравнение предположений о технологии)

Даны матрица выпуска V (сектор $\times$ товар) и матрица использования U (товар $\times$ сектор):

$$V = \begin{pmatrix} 60 & 5 & 3 \\ 4 & 70 & 6 \\ 2 & 4 & 55 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 4 \\ 5 & 25 & 8 \\ 3 & 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Сначала определите согласованный конечный спрос $y = x - U\mathbf{1}$ (где x — суммы столбцов V). Рассчитайте матрицу коэффициентов товар $\times$ товар A_{ii} как при предположении об отраслевой, так и при предположении о продуктовой технологии и в обоих случаях проверьте обратный расчёт $X = (I - A_{ii})^{-1} y$ по x.

Задача

Задача 3.4 (вкладка 5 — полный натурально-стоимостной баланс)

Снова используйте данные задачи 3.1, на этот раз при $N_1 = \{G1, G2\}$, $N_2 = \{G3\}$. Сформируйте таблицу A (все четыре строки N_1 полностью, со столбцами остаточного производства по секторам) и таблицу B (те же строки, агрегированные по секторам, для товара G1 и товара G2). Проверьте, что значения X в таблице B равны сумме двух соответствующих секторных значений из задачи 3.1. Рассчитайте также строку сектора 1 в столбце G1-B1 (Сектор$_k[j,l] = \sum_i p_{ik} X_{ijkl}$, сумма по *всем* товарам) при $p_{ik} = 1$ и при ценах из задачи 3.2.

A. Решения

Уровень 1

Решение

1.1: $X = 10 + 5 + 3 + 2 + 15 = 35$.

1.2: $a_{ijkl} = 12/60 = 0{,}20$.

1.3: M1: оба признака на обеих сторонах ($i, k \to j, l$). M5: только товар на обеих сторонах ($i \to j$). M9: только сектор на обеих сторонах ($k \to l$). Все три квадратные и однозначно разрешимы: M1 имеет размер $(nm) \times (nm)$, M5 — $n \times n$, M9 — $m \times m$. Остальные шесть моделей прямоугольные.

1.4: $D = (50/60;\ 3/20;\ 2/10) = (0{,}8333;\ 0{,}15;\ 0{,}20)$.

1.5: Столбец остаточного производства суммирует все поставки товаров N_1 товарам N_2 (которые не показаны детально) раздельно по получающему сектору. Он нужен, чтобы таблица A, несмотря на исключение N_2, оставалась балансово полной: сумма строки (внутри N_1) + остаточное производство + Y даёт точно исходный валовой выпуск X.

Уровень 2

Решение

2.1:

$$L = \begin{pmatrix} 1{,}2844 & 0{,}1835 \\ 0{,}2752 & 1{,}4679 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 143{,}12 \\ 144{,}95 \end{pmatrix}.$$

2.2: Матрица числителей (сумма по k; строки G1, G2, столбцы G1-B1, G2-B1, G1-B2, G2-B2):

$$\begin{pmatrix} 12 & 7 & 21 & 8 \\ 4 & 14 & 5 & 25 \end{pmatrix}.$$

2.3: $Y^{*} = 50 + 6 + 4 = 60$.

2.4:

$$A_{ii} = B\,D = \begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}10 \\ 0{,}085 & 0{,}3425 \end{pmatrix}.$$

2.5: Ост.произв.$_{ik,1} = 4 + 7 = 11$.

2.6: $a^{p}_{ijkl} = 0{,}20 \cdot 2/1{,}6 = 0{,}25$. При поставке из сектора k' с $p_{ik'} = 1{,}6$: $a^{p}_{ijk'l} = a_{ijk'l} \cdot 1{,}6/1{,}6 = a_{ijk'l}$ — стоимостной коэффициент тогда равен натуральному. Таким образом, один и тот же товар оценивается по-разному в зависимости от поставляющего сектора.

Уровень 3

Решение

3.1: Валовой выпуск (сумма строки Z плюс Y):

$$X = (145;\ 159;\ 103;\ 132;\ 151;\ 143)^{\top}.$$

$a_{1111} = 15/145 = 0{,}1034$. Спектральный радиус $\rho(A) = 0{,}336$. Обратная матри-

ца Леонтьева:

$$L = \begin{pmatrix} 1{,}1295 & 0{,}0906 & 0{,}0751 & 0{,}0940 & 0{,}0556 & 0{,}0384 \\ 0{,}0795 & 1{,}1601 & 0{,}0885 & 0{,}0582 & 0{,}0971 & 0{,}0320 \\ 0{,}0411 & 0{,}0340 & 1{,}1441 & 0{,}0313 & 0{,}0557 & 0{,}0693 \\ 0{,}0660 & 0{,}0585 & 0{,}0432 & 1{,}2503 & 0{,}1119 & 0{,}0503 \\ 0{,}0412 & 0{,}0815 & 0{,}0690 & 0{,}0910 & 1{,}2480 & 0{,}0690 \\ 0{,}0261 & 0{,}0417 & 0{,}0837 & 0{,}0412 & 0{,}0576 & 1{,}1541 \end{pmatrix}.$$

Обратный расчёт $X = LY$ точно совпадает с приведённым выше X.
3.2: Строки $N_1 = \{G1, G3\}$: G1-B1, G3-B1, G1-B2, G3-B2. Поставки в N_2 — это столбцы G2-B1 и G2-B2, например G1-B1: $100 + 10 + 4 = 114$.

$$Y^* = (114;\ 78;\ 95;\ 114)^\top.$$

В стоимостном выражении (каждая строка (i,k) умножается на p_{ik}: 1; 2; 1; 2,5):

$$Y^*_{\text{стоим.}} = (114;\ 156;\ 95;\ 285)^\top.$$

3.3: Согласованный конечный спрос: $x = (66;\ 79;\ 64)$, $g = (68;\ 80;\ 61)$, $y = x - U\mathbf{1} = (41;\ 41;\ 37)$.

$$A_{ii}^{\text{отрасл.}} = \begin{pmatrix} 0{,}2071 & 0{,}0837 & 0{,}0737 \\ 0{,}0898 & 0{,}2882 & 0{,}1454 \\ 0{,}0531 & 0{,}0637 & 0{,}2885 \end{pmatrix}, \qquad A_{ii}^{\text{продукт.}} = \begin{pmatrix} 0{,}2415 & 0{,}0669 & 0{,}0591 \\ 0{,}0487 & 0{,}3442 & 0{,}1187 \\ 0{,}0299 & 0{,}0245 & 0{,}3608 \end{pmatrix}.$$

Оба обратных расчёта $(I - A_{ii})^{-1} y$ дают точно $x = (66;\ 79;\ 64)$.
3.4: Таблица A (строки G1-B1, G2-B1, G1-B2, G2-B2; столбцы Z G1-B1, G2-B1, G1-B2, G2-B2):

Строка	Z (4 столбца)	Ост. B1	Ост. B2	Y	X
G1-B1	$15, 10, 8, 4$	5	3	100	145
G2-B1	$8, 20, 4, 9$	6	2	110	159
G1-B2	$6, 5, 25, 10$	2	4	80	132
G2-B2	$3, 8, 7, 28$	4	6	95	151

Таблица B (агрегированная по секторам):

Товар	Z (4 столбца)	Ост. B1	Ост. B2	X
G1	$21, 15, 33, 14$	7	7	$277\ (= 145 + 132)$
G2	$11, 28, 11, 37$	10	8	$310\ (= 159 + 151)$

Значения X в таблице B точно равны сумме соответствующих секторных значений из задачи 3.1.
Строка сектора 1, столбец G1-B1 (поставки из G1-B1, G2-B1, G3-B1): при $p_{ik} = 1$: $15 + 8 + 4 = 27$; при ценах из задачи 3.2: $1 \cdot 15 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 = 31$.

Литература

P. Fleissner, W. Böhme, H.-U. Brautzsch, J. Höhne, J. Siassi, K. Stark: *Input-Output-Analyse. Eine Einführung in Theorie und Anwendungen* [Анализ затраты–выпуск. Введение в теорию и приложения]. Springer-Verlag, Wien, New York

1993.