Динамическая модель затраты–выпуск

Три динамические модели Леонтьева, разбиение и устойчивость

Русский

Вольфганг Бёме

wolfgang.boehme@economic-modeling.de
www.economic-modeling.de

4 ноября 2026 г.

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Введение **2**

2 Данные и датабокс **2**
2.1 Загрузка набора данных 2
2.2 Примеры наборов данных 2
2.3 Откуда берётся $\mathbf{B}^I$ 3

3 Заданный спрос **3**
3.1 C или C + V + E 3
3.2 Временна́я траектория 4
3.3 Предложение из Y 4

4 Модель 1: заданная траектория инвестиций **4**

5 Модель 2: рекурсивная модель без разбиения **4**

6 Модель 3: разбиение **4**
6.1 Секторы 4
6.2 Матрицы $\mathbf{B}^I$, $\mathbf{B}^d$ и $\mathbf{T}$ 5
6.3 Рекурсия 5
6.4 Начальные значения 5

7 Устойчивость **5**
7.1 Свойство модели 5
7.2 Влияние коэффициентов капиталоёмкости 6
7.3 Рекомендации 6

8 Расчётный пример **6**
8.1 Исходные данные 6
8.2 Матрицы 6
8.3 Моделирование (постоянное потребление) 6

9 Работа с инструментом **7**

10 Проверки **7**

11 Экспорт **7**

12 Итоги **8**

1. Введение

Динамическая модель Леонтьева расширяет статическую модель затраты–выпуск временны́м измерением: инвестиции увеличивают основной капитал, а основной капитал определяет будущее производство. Инструмент содержит три варианта:

Модель	**Подход**	**Требует**
Модель 1	статическая модель с заданной траекторией инвестиций: $\mathbf{x}(t{+}1) = \mathbf{L}\,[\mathbf{y} + \mathbf{B}\,\Delta\mathbf{k}(t)]$	**A**, **y**, **B** ($n \times n$)
Модель 2	рекурсивная модель без разбиения: $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{B}^{-1}[(\mathbf{E} + \mathbf{B} - \mathbf{A})\mathbf{x}_t - \mathbf{c}_t]$	**A**, **B** ($n \times n$), $\mathbf{x}_0$, **c**
Модель 3	рекурсивная модель с разбиением на секторы инвестиционных и потребительских товаров	**A**, r, $\mathbf{B}^I$ ($r \times r$), $\mathbf{x}_0$, **c**

Здесь $\mathbf{L} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ — обратная матрица Леонтьева, **E** — единичная матрица. Все модели требуют статической модели; её результат $\mathbf{x}_0 = \mathbf{Ly}$ служит обычным начальным значением.

2. Данные и датабокс

2.1. Загрузка набора данных

На вкладке *Модель Леонтьева – ввод* предварительно выбран способ ввода «Датабокс». Кнопка **«Загрузить данные из датабокса»** открывает список; наборы данных для динамической модели находятся вверху, остальные свёрнуты ниже. После выбора

1. рассчитывается статическая модель (**L**, $\mathbf{x}_0$),
2. значения переносятся во все три модели: **B**, r, $\mathbf{B}^I$, $\mathbf{x}_0$, **c**, $\mathbf{i}_0$,
3. на экране показываются матрица **A**, векторы по секторам, $\mathbf{B}^I$, **B** и для каждой модели — что перенесено и чего не хватает.

В каждой модели кнопка **«Взять значения из загруженного набора данных»** восстанавливает значения после собственных изменений. Ручной ввод и загрузка CSV остаются возможными.

2.2. Примеры наборов данных

Набор данных	**Кон. спрос**	r	$\mathbf{B}^I$	**B**
Динамика 3×3 равновесие	$\mathbf{y} = \mathbf{c}$	1	1×1	да
Динамика 3×3 рост	$\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{i}$	1	1×1	да
Динамика 4×4, 6×6, 8×8 равновесие	$\mathbf{y} = \mathbf{c}$	2, 3, 4	$r \times r$	–
Динамика 10×10 рост	$\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{i}$	1	$B_I = 5{,}5$	да
Пример 3×3 – 10×10 (ZIP)	$\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{i}$	1 или 2	$B_I = 5{,}5$	$B_I\,\mathbf{E}$
Германия 2022 (Destatis)	$\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{i} + \mathbf{v} + \mathbf{e}$	выбирается	блок **B**	иллюстр.
Германия 2022, инвест. товары первыми	переупоряд.	3	блок **B**	иллюстр.
то же, **B** масштабирована	переупоряд.	3	блок **B**	увеличена

Динамические примеры фиктивны и взяты из тестовых данных; их начальное значение $\mathbf{x}_0 = \mathbf{Ly}$. Наборы данных без полной матрицы $\mathbf{B}$ (от 4×4 до 8×8) предназначены для модели 3.

Данные Destatis: они лишь ограниченно подходят для динамических моделей. Матрица капитала иллюстративна и имеет малые коэффициенты (диагональ около 0,4–0,75); поэтому моделирование через несколько периодов становится отрицательным. Модель 3 рассматривает секторы 1–r как секторы инвестиционных товаров — в порядке Destatis это сельское хозяйство, сырьё и т. д. Инструмент показывает соответствующее указание.

Германия 2022, инвестиционные товары первыми: для модели 3 наборы данных 20×20 и 15×15 дополнительно доступны в переупорядоченном виде: впереди стоят три сектора с наибольшим валовым накоплением основного капитала (20×20: строительство, научные исследования и разработки, машиностроение и транспортные средства, вместе 69 %; 15×15: группы 7, 11 и 5, вместе 81 %), задано $r = 3$. Это делает выбор r экономически осмысленным. По одному варианту имеют увеличенную матрицу капитала (коэффициент около 1,7, средняя сумма столбца 3). **Эти коэффициенты иллюстративны и не отражают реальную ситуацию с данными.** Они лишь показывают, что большие коэффициенты капиталоёмкости удлиняют траекторию; моделирование всё равно обрывается через несколько периодов (модель 2: 3–5, модель 3: 4–7 периодов).

2.3. Откуда берётся $\mathbf{B}^I$

Для модели 3 инструмент формирует $\mathbf{B}^I$ ($r \times r$) в следующем порядке:

1. собственная матрица $\mathbf{B}^I$ набора данных,
2. левый верхний блок $r \times r$ матрицы капитала $\mathbf{B}$,
3. $B_I \cdot \mathbf{E}$ со скалярным коэффициентом капиталоёмкости B_I.

Если набор данных не содержит r, его выбирает пользователь; $\mathbf{B}^I$ формируется сразу. Выбранное пользователем r сохраняется при переносе значений.

3. Заданный спрос

3.1. C или C + V + E

Моделям 2 и 3 нужен *заданный* (экзогенный) спрос $\mathbf{c}_t$. Всё, что не задано, модель рассматривает как инвестиционный спрос. Варианты:

- $\mathbf{c} = \mathbf{C} + \mathbf{V} + \mathbf{E}$ (потребление, изменение запасов, экспорт) — правильно для открытых экономик, таких как данные Destatis; там задано по умолчанию,
- $\mathbf{c} = \mathbf{C}$ (только потребление).

Для замкнутых примеров ($\mathbf{V} = \mathbf{E} = \mathbf{0}$) оба варианта совпадают.

3.2. Временна́я траектория

Вариант	Формула	Примечание
Постоянный	$\mathbf{c}_t = \mathbf{c}_0$	проверка равновесия
Линейный	$\mathbf{c}_t = \mathbf{c}_0 + \Delta \cdot t$	Δ за период, например 2
Экспоненциальный	$\mathbf{c}_t = \mathbf{c}_0(1+g)^t$	g в %, быстрее неустойчив
CSV	собственные значения	

3.3. Предложение из Y

Если набор данных не содержит **C**, кнопка «Предложение из Y» задаёт $\mathbf{c}_0 = 0{,}85\,\mathbf{y}$. В модели 3 одновременно задаётся $\mathbf{i}_0 = \mathbf{y} - \mathbf{c}_0$, так что $\mathbf{y} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{i}_0$ сохраняется. Для примеров из датабокса предложение не нужно.

4. Модель 1: заданная траектория инвестиций

$$\mathbf{x}(t+1) = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\,[\mathbf{y} + \mathbf{B}\,\Delta\mathbf{k}(t)] \tag{1}$$

B ($n \times n$) — матрица коэффициентов капиталоёмкости, $\Delta\mathbf{k}(t)$ — заданный вектор инвестиций. Сценарии инвестиций: постоянные, растущие (темп в %), снижающиеся (темп в %) или задаваемые пользователем по периодам. Модель показывает, какого дополнительного производства требует заданное накопление капитала; она устойчива, пока существует **L**.

B берётся из датабокса; без полной матрицы $\mathbf{B} = B_I\,\mathbf{E}$.

5. Модель 2: рекурсивная модель без разбиения

Производство покрывает промежуточные затраты, инвестиции и заданный спрос:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}(\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_t) + \mathbf{c}_t \tag{2}$$

Решение относительно $\mathbf{x}_{t+1}$:

$$\boxed{\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{B}^{-1}\,[(\mathbf{E} + \mathbf{B} - \mathbf{A})\,\mathbf{x}_t - \mathbf{c}_t] = \mathbf{x}_t + \mathbf{B}^{-1}[(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x}_t - \mathbf{c}_t]} \tag{3}$$

Излишек $(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x}_t - \mathbf{c}_t$ представляет собой инвестиции; через $\mathbf{B}^{-1}$ он увеличивает производство в следующем периоде. Матрица **B** должна быть обратимой.

6. Модель 3: разбиение

6.1. Секторы

При n секторах секторы 1–r производят инвестиционные товары ($1 \le r < n$), секторы $r{+}1$–n — потребительские товары. Секторы должны быть упорядочены именно так. Разбиение **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{11} & \mathbf{A}^{12} \\ \mathbf{A}^{21} & \mathbf{A}^{22} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{11} : r \times r, \quad \mathbf{A}^{22} : (n-r) \times (n-r).$$

6.2. Матрицы $\mathbf{B}^I$, $\mathbf{B}^d$ и $\mathbf{T}$

$\mathbf{B}^I$ $(r \times r)$ содержит коэффициенты капиталоёмкости секторов инвестиционных товаров: b^I_{ij} = капитальный товар i, необходимый сектору j на дополнительную единицу выпуска. Из неё инструмент формирует

$$\mathbf{B}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^I & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^{21} & -(\mathbf{E}^{22} - \mathbf{A}^{22}) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Нижние $n - r$ строк — это строки $-(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ секторов потребительских товаров. Матрица перехода:

$$\mathbf{T} = \mathbf{E} + (\mathbf{B}^d)^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{A}). \tag{5}$$

$\mathbf{B}^I$ и $\mathbf{B}^d$ должны быть обратимыми.

6.3. Рекурсия

$$\boxed{\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{T}\,\mathbf{x}_t - (\mathbf{B}^d)^{-1}\,\mathbf{c}_t} \tag{6}$$

что эквивалентно $\mathbf{B}^d(\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_t) = (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x}_t - \mathbf{c}_t$:

- **Секторы инвестиционных товаров:** излишек инвестиционных товаров через $\mathbf{B}^I$ определяет прирост мощностей.
- **Секторы потребительских товаров:** их чистое производство в $t+1$ точно покрывает заданный спрос, $[(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x}_{t+1}]^{II} = \mathbf{c}_t^{II}$.

6.4. Начальные значения

$\mathbf{x}_0 = \mathbf{L}\mathbf{y}$ из статической модели, спрос $\mathbf{c}_0$ и инвестиции $\mathbf{i}_0$ при $\mathbf{y} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{i}_0$. Инструмент проверяет это условие (допуск 1 %) и при отклонении запрашивает подтверждение. $\mathbf{i}_0$ служит только для проверки; рекурсия использует $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{c}_t$.

- **Равновесие** ($\mathbf{y} = \mathbf{c}$, $\mathbf{i}_0 = \mathbf{0}$): при постоянном $\mathbf{c}$ теоретически $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0$ остаётся постоянным.
- **Рост** ($\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{i}$, $\mathbf{i} > \mathbf{0}$): инвестиционный излишек обеспечивает рост выпуска.

7. Устойчивость

7.1. Свойство модели

При расчёте вперёд динамическая модель Леонтьева, как правило, неустойчива: $\mathbf{T}$ имеет по меньшей мере одно собственное значение с модулем больше 1. Отклонения от равновесной траектории — включая ошибки округления в начальном значении — растут со спектральным радиусом $\rho(\mathbf{T}) = \max_i |\lambda_i(\mathbf{T})|$, пока какой-либо сектор не получит отрицательный выпуск. Тогда моделирование останавливается и сообщает период и секторы. Поэтому число рассчитанных периодов зависит от данных.

7.2. Влияние коэффициентов капиталоёмкости

Большие коэффициенты капиталоёмкости делают модель *более устойчивой*: излишек распределяется на бóльшую потребность в капитале и слабее увеличивает производство. Пример 3×3, $r = 1$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{L}\mathbf{y}$ при $\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{i}$:

$\mathbf{B}^I$	$\rho(\mathbf{T})$	$x_1(3)$	Поведение
0,1	8,7	26 612	взрывной рост
0,5	2,54	908	сильный рост
5,5	1,14	276	умеренный рост

7.3. Рекомендации

- Не выбирать слишком малые коэффициенты капиталоёмкости; значения около 1–6 на диагонали заметно отдаляют обрыв.
- Постоянный или линейный спрос вместо экспоненциального.
- Брать начальное значение из статической модели без округления.
- Для открытых данных использовать $\mathbf{c} = \mathbf{C} + \mathbf{V} + \mathbf{E}$.

8. Расчётный пример

8.1. Исходные данные

Набор данных *Динамика 3×3 рост*, $r = 1$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}25 & 0{,}10 & 0{,}15 \\ 0{,}10 & 0{,}15 & 0{,}20 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^I = [0{,}5], \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 120 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_0 = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 130 \\ 170 \\ 135 \end{bmatrix}$$

Статическая модель: $\mathbf{x}_0 = \mathbf{L}\mathbf{y} = [254{,}36;\ 302{,}42;\ 257{,}25]^\top$.

8.2. Матрицы

$$\mathbf{B}^d = \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & -0{,}90 & 0{,}15 \\ 0{,}10 & 0{,}15 & -0{,}80 \end{bmatrix}, \qquad (\mathbf{B}^d)^{-1} \approx \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0{,}6165 & -1{,}1470 & -0{,}2151 \\ 0{,}3656 & -0{,}2151 & -1{,}2903 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} \approx \begin{bmatrix} 2{,}7000 & -0{,}4000 & -0{,}2000 \\ 0{,}8323 & -0{,}1233 & -0{,}0616 \\ 0{,}4935 & -0{,}0731 & -0{,}0366 \end{bmatrix}, \qquad \rho(\mathbf{T}) = 2{,}54$$

8.3. Моделирование (постоянное потребление)

Период	Сектор 1	Сектор 2	Сектор 3
0	254,36	302,42	257,25
1	314,36	294,75	244,56
2	481,97	346,41	275,20
3	907,71	477,65	353,02
4	1 989,16	811,00	550,71

Темп роста сектора инвестиционных товаров увеличивается от периода к периоду (коэффициент 1,24; 1,53; 1,88; 2,19) и приближается к $\rho(\mathbf{T}) = 2{,}54$.

Равновесие для сравнения (*Динамика 3×3 равновесие*, $\mathbf{y} = \mathbf{c}$): начальное значение

$$\mathbf{x}_0 = [205{,}54;\ 261{,}21;\ 224{,}67]^\top$$

остаётся постоянным во всех периодах. В бóльших примерах (от 4×4 до 8×8, $\rho(\mathbf{T}) \approx 7$–8) равновесие из-за ошибок округления становится отрицательным через 18–20 периодов, а при начальном значении, округлённом до двух знаков, — уже примерно через 7.

Модель 2 с тем же конечным спросом и матрицей капитала $\mathbf{B}$ набора данных (диагональ 36–44): $\mathbf{x}_1 = [255{,}14;\ 302{,}79;\ 257{,}53]^\top$, $\mathbf{x}_2 = [255{,}93;\ 303{,}15;\ 257{,}81]^\top$ — медленный устойчивый рост.

9. Работа с инструментом

1. **Ввод:** «Загрузить данные из датабокса» → выбрать набор данных. Статическая модель рассчитывается, значения переносятся.
2. **Модель 1:** выбрать сценарий инвестиций и число периодов → «Начать моделирование».
3. **Модель 2:** проверить заданный спрос (C или C + V + E) и временну́ю траекторию → «Запустить моделирование DynModell2».
4. **Модель 3:** проверить или выбрать r, проверить $\mathbf{B}^I$, спрос и $\mathbf{i}_0$; список статуса показывает, чего не хватает → «Запустить моделирование DynModell3».
5. **Результаты:** временные ряды в виде диаграммы и таблицы; остановка при отрицательном выпуске с указанием периода.
6. **Экспорт:** вкладка «Экспорт».

10. Проверки

- Статическая модель рассчитана; $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ обратима; предупреждение, если сумма столбца $\mathbf{A} \geq 1$.
- Модель 2: матрица капитала $\mathbf{B}$ ($n \times n$) имеется и обратима.
- Модель 3: $1 \leq r < n$; $\mathbf{B}^I$ имеет размер $r \times r$; $\det(\mathbf{B}^I) \neq 0$ и $\mathbf{B}^d$ обратима; $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{c}$ содержат по n значений; $\mathbf{y} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{i}_0$ (допуск 1 %, иначе запрос подтверждения).
- Не более 500 периодов; остановка при отрицательном выпуске.

11. Экспорт

- **Статическая модель:** обратная матрица Леонтьева, вектор выпуска.
- **Модель 1:** результаты моделирования, траектория инвестиций, матрица $\mathbf{B}$.
- **Модель 2:** выпуск $\mathbf{x}(t)$, спрос $\mathbf{c}(t)$, матрица $\mathbf{B}$, полный экспорт.

- **Модель 3:** $\mathbf{B}^I$, $\mathbf{B}^d$, $(\mathbf{B}^d)^{-1}$, $\mathbf{T}$, выпуск $\mathbf{x}(t)$, спрос $\mathbf{c}(t)$, конечный спрос $\mathbf{y}$, все данные моделирования.
- Диаграммы в формате PNG.

12. Итоги

- Три модели: заданная траектория инвестиций (1), рекурсия с полной матрицей капитала (2), рекурсия с разбиением (3).
- Данные берутся из датабокса и переносятся во все модели.
- При расчёте вперёд динамическая модель Леонтьева неустойчива; бóльшие коэффициенты капиталоёмкости и постоянный или линейный спрос удлиняют траекторию.
- Для открытых экономик к заданному спросу относится $\mathbf{C} + \mathbf{V} + \mathbf{E}$.

Литература

- Leontief, W. (1970): The Dynamic Inverse. In: Carter, A. P., Bródy, A. (eds.): *Contributions to Input-Output Analysis*, North-Holland.
- Miller, R. E., Blair, P. D. (2009): *Input-Output Analysis: Foundations and Extensions*, 2nd ed., Cambridge University Press.
- Ten Raa, T. (2005): *The Economics of Input-Output Analysis*, Cambridge University Press.