Game Theory

Module 4: Cooperative Game Theory

Shapley Value, Core, Nash Bargaining and Nucleolus

English

Wolfgang Boehme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 October 2026

Complete introduction with theory, three fully worked examples and description of the interactive tool

The documentation on this website was developed with the support of the AI Claude (Anthropic).

Table of Contents

1 What Is Cooperative Game Theory? 2

2 Key Concepts 2

3 The Shapley Value 3
- 3.1 Basic Idea . . . 3
- 3.2 Equivalent Permutation Formula . . . 4
- 3.3 The Four Shapley Axioms . . . 4

4 The Core 4

5 Nash Bargaining Solution 5

6 Complete Example 1: Production Coalition 6
- 6.1 Checking Superadditivity . . . 6
- 6.2 Computing the Shapley Value . . . 6
- 6.3 Checking Core Conditions . . . 7

7 Example 2: Voting Weights and Shapley Power Index 7
- 7.1 Winning Coalitions . . . 8
- 7.2 Shapley Power Index . . . 8

8 Example 3: Cost Sharing – Nash Bargaining 9
- 8.1 Shapley Value of Savings . . . 9
- 8.2 Nash Bargaining Solution . . . 9

9 Tool Description: Game Theory Module 4 9
- 9.1 Input . . . 9
- 9.2 Output – 5 Steps . . . 10

10 Summary 10

1 What Is Cooperative Game Theory?

In den Modulen 1–3 haben wir **nicht-kooperative** Spiele analysiert: Spieler handeln unabhängig, es gibt keine bindenden Vereinbarungen. Die **kooperative Spieltheorie** fragt stattdessen:

- Which **coalitions** (groups of players) will form?
- How is the jointly achieved value **fairly allocated**?
- Welche Aufteilungen sind **stabil** – d. h. hat keine Gruppe einen Anreiz, die Vereinbarung zu verlassen?

Typical Applications

- **Unternehmenskooperationen:** Welche Firmen bilden ein Konsortium? Wie werden Synergien aufgeteilt?
- **Politische Koalitionen:** Wie viel Macht hat eine Partei in einer Regierungskoalition tatsächlich?
- **Kostenaufteilung:** Wie teilen Städte die Kosten eines gemeinsamen Infrastrukturprojekts?
- **Patente und Lizenzen:** Wie wird der Gewinn aus einer gemeinsamen Erfindung aufgeteilt?
- **Insolvenzrecht:** Wie wird das Vermögen eines bankrotten Unternehmens gerecht auf die Gläubiger verteilt?

2 Key Concepts

Definition: Cooperative Game in Characteristic Function Form

A **cooperative game** (N, v) consists of:

- a set of players $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
- einer **charakteristischen Funktion** $v : 2^N \to \mathbb{R}$, die jeder Koalition $S \subseteq N$ ihren Wert $v(S)$ zuordnet

Conventions:

$$v(\emptyset) = 0, \qquad v(\{i\}) \geq 0 \quad \text{(Alleingang)}$$

$v(S)$ ist der Wert (Gewinn, Nutzen), den die Koalition S sicher erreichen kann, *unabhängig* von den Aktionen der Spieler außerhalb S.

Definition: Superadditivity and Essentiality

A game (N, v) is called:

- **superadditive** if for all disjoint $S, T \subseteq N$:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$$

  Cooperation is always at least as good as non-cooperation.

- **essential** if:

$$v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\})$$

  Cooperation creates genuine added value.

- **convex** if for all $S \subseteq T$ and $i \notin T$:

$$v(T \cup \{i\}) - v(T) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S)$$

  Marginal contributions increase with coalition size.

Definition: Imputation (Feasible Allocation)

Ein Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt **Imputation**, wenn:

- **Efficiency:** $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ (total value is distributed)
- **Individualrationalität:** $x_i \geq v(\{i\})$ (jeder erhält mindestens seinen Alleingangswert)

3 The Shapley Value

3.1 Basic Idea

Der **Shapley-Wert** (Lloyd S. Shapley, 1953) ist die eindeutige faire Aufteilung, die vier grundlegende Axiome erfüllt. Die Idee: Jeder Spieler erhält seinen *durchschnittlichen Marginalbeitrag* über alle möglichen Reihenfolgen, in denen er der Koalition beitritt.

Definition: Shapley Value

The **Shapley value** of player i is:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(n - |S| - 1)!}{n!} \big[v(S \cup \{i\}) - v(S)\big]$$

Der Term $[v(S \cup \{i\}) - v(S)]$ ist der **Marginalbeitrag** von Spieler i, wenn er einer Koalition S beitritt. Das Gewicht $\frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau die Spieler in S vor i ankommen (bei gleichverteilter Reihenfolge).

3.2 Equivalent Permutation Formula

Theorem: Permutation Representation

Sei $\Pi(N)$ die Menge aller $n!$ Permutationen (Reihenfolgen) der Spieler. Für eine Permutation σ sei $P_i^\sigma = \{j : \sigma(j) < \sigma(i)\}$ die Menge der Spieler, die in Reihenfolge σ vor i kommen. Dann gilt:

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Pi(N)} \left[v(P_i^\sigma \cup \{i\}) - v(P_i^\sigma) \right]$$

Algorithmus: Liste alle $n!$ Reihenfolgen auf; berechne für jede den Marginalbeitrag von i; bilde den Durchschnitt.

3.3 The Four Shapley Axioms

Theorem: Uniqueness of the Shapley Value

Der Shapley-Wert ist die **einzige** Aufteilungsregel, die gleichzeitig folgende Axiome erfüllt:

1. **Efficiency:** $\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$
   The entire value is allocated.
2. **Symmetrie:** Wenn $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ für alle $S \not\ni i, j$, dann $\phi_i = \phi_j$.
   Players with identical contributions are treated equally.
3. **Dummy-Eigenschaft:** Wenn $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ für alle $S \not\ni i$, dann $\phi_i = 0$.
   A player with no contribution receives nothing.
4. **Additivität:** $\phi_i(v + w) = \phi_i(v) + \phi_i(w)$ für alle Spiele v, w.

4 The Core

Definition: Core

Der **Core** (Kern) eines kooperativen Spiels ist die Menge aller Imputationen x, gegen die keine Koalition S "blockieren" kann:

$$\mathcal{C}(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i \in N} x_i = v(N) \;\text{ und }\; \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\ \forall S \subseteq N \right\}$$

An allocation x lies in the Core if:

- **Efficiency:** The total value is fully distributed.
- **Koalitionsrationalität:** Jede Teilgruppe S erhält mindestens das, was sie allein erreichen könnte. Sonst hätte S einen Anreiz, die große Koalition zu verlassen.

Wann ist der Core leer? Bei manchen Spielen gibt es keine stabile Aufteilung (Core leer). Dann hat immer irgendjemand einen Anreiz abzuweichen. Bei **konvexen Spielen** ist der Core garantiert nicht leer (Satz von Shapley 1971), und der Shapley-Wert liegt immer im Core.

Theorem: Shapley Value in Core for Convex Games

If (N, v) is convex, then $\phi(v) \in \mathcal{C}(v)$.

5 Nash Bargaining Solution

For **two players** there is an elegant axiomatic solution.

Definition: Nash Bargaining Problem

A **Nash bargaining problem** (F, d) consists of:

- $F \subseteq \mathbb{R}^2$: set of feasible payoff pairs
- $d = (d_1, d_2)$: **Statusquo** (Disagreement-Punkt) – was die Spieler bekommen, wenn keine Einigung erzielt wird

Nash Bargaining Solution – Simple Case

When the Pareto frontier is linear (fixed total V):

$$x_1 + x_2 = V, \quad x_i \geq d_i$$

the Nash solution maximises the **Nash product**:

$$(x_1 - d_1)(x_2 - d_2) \to \max$$

Die Lösung ist:

$$x_1^* = \frac{V + d_1 - d_2}{2}, \qquad x_2^* = \frac{V + d_2 - d_1}{2}$$

Interpretation: Der Surplus $V - d_1 - d_2$ wird **zu gleichen Teilen** zwischen den Spielern aufgeteilt.

Nash Axioms (1950)

Die Nash-Verhandlungslösung ist die einzige Lösung, die **Effizienz**, **Symmetrie**, **Skalierungsinvarianz** und **Unabhängigkeit irrelevanter Alternativen (IIA)** erfüllt.

6 Complete Example 1: Production Coalition

Scenario: Three Firms

Drei Firmen A, B, C können allein oder in Koalitionen produzieren. Koalitionen ermöglichen Arbeitsteilung und Skaleneffekte. Die charakteristische Funktion (Gewinn in Tsd. €):

$$v(\{A\}) = 10,\ v(\{B\}) = 15,\ v(\{C\}) = 8$$

$$v(\{A,B\}) = 40,\ v(\{A,C\}) = 30,\ v(\{B,C\}) = 35,\ v(\{A,B,C\}) = 60$$

6.1 Checking Superadditivity

Koalition	$v(S \cup T)$	$v(S) + v(T)$	Superadditive?
$\{A,B\}$ vs $\{A\} + \{B\}$	40	25	$40 \geq 25$ ✓
$\{A,C\}$ vs $\{A\} + \{C\}$	30	18	$30 \geq 18$ ✓
$\{B,C\}$ vs $\{B\} + \{C\}$	35	23	$35 \geq 23$ ✓
$\{A,B,C\}$ vs $\{A,B\} + \{C\}$	60	48	$60 \geq 48$ ✓

Das Spiel ist superadditiv und wesentlich: $v(\{A,B,C\}) = 60 > 10 + 15 + 8 = 33$. Kooperation schafft einen Surplus von 27.

6.2 Computing the Shapley Value

Es gibt $3! = 6$ Permutationen. Wir berechnen den Marginalbeitrag von Firma A in jeder Reihenfolge:

Ordering	Marginal A	Marginal B	Margi
A, B, C	$v(\{A\}) - v(\emptyset) = 10$	$v(\{A,B\}) - v(\{A\}) = 30$	$v(\{A,B,C\}) -$
A, C, B	10	$v(\{A,B,C\}) - v(\{A,C\}) = 30$	$v(\{A,C\}) -$
B, A, C	$v(\{A,B\}) - v(\{B\}) = 25$	15	$v(\{A,B,C\}) -$
B, C, A	$v(\{A,B,C\}) - v(\{B,C\}) = 25$	15	$v(\{B,C\}) -$
C, A, B	$v(\{A,C\}) - v(\{C\}) = 22$	$v(\{A,B,C\}) - v(\{A,C\}) = 30$	8
C, B, A	$v(\{A,B,C\}) - v(\{B,C\}) = 25$	$v(\{B,C\}) - v(\{C\}) = 27$	8
Summe	**117**	**147**	**9**
Shapley ($\div 6$)	**19,5**	**24,5**	**1**

Check: $19.5 + 24.5 + 16 = 60 = v(\{A,B,C\})$ ✓

6.3 Checking Core Conditions

Die Verteilung $(x_A, x_B, x_C) = (19{,}5,\ 24{,}5,\ 16)$ muss alle Koalitionsrationalitätsbedingungen erfüllen:

Condition	Shapley sum	$v(S)$	Satisfied?
$x_A \geq v(\{A\})$	19,5	10	✓
$x_B \geq v(\{B\})$	24,5	15	✓
$x_C \geq v(\{C\})$	16	8	✓
$x_A + x_B \geq v(\{A,B\})$	44	40	✓
$x_A + x_C \geq v(\{A,C\})$	35,5	30	✓
$x_B + x_C \geq v(\{B,C\})$	40,5	35	✓
$x_A + x_B + x_C = v(N)$	60	60	✓

Der Shapley-Wert $(19{,}5,\ 24{,}5,\ 16)$ **liegt im Core!** Die große Koalition $\{A,B,C\}$ ist stabil.

7 Example 2: Voting Weights and Shapley Power Index

Scenario: Four-Party Parliament

Vier Parteien haben folgende Sitzanteile (Stimmen für Mehrheitsentscheidungen benötigen $q = 51$ von 100 Stimmen):

$$w_1 = 40,\ w_2 = 30,\ w_3 = 20,\ w_4 = 10$$

Charakteristische Funktion: $v(S) = 1$ falls $\sum_{i \in S} w_i \geq 51$, sonst $v(S) = 0$.

7.1 Winning Coalitions

Coalition	Votes	$v(S)$	Winning?
$\{1,2\}$	70	1	Yes
$\{1,3\}$	60	1	Yes
$\{1,4\}$	50	0	No
$\{2,3\}$	50	0	No
$\{2,4\}$	40	0	No
$\{3,4\}$	30	0	No
$\{1,2,3\}$	90	1	Yes
$\{1,2,4\}$	80	1	Yes
$\{1,3,4\}$	70	1	Yes
$\{2,3,4\}$	60	1	Yes
$\{1,2,3,4\}$	100	1	Yes

7.2 Shapley Power Index

Für $n = 4$ gibt es $4! = 24$ Permutationen. Spieler i ist **pivotal**, wenn er die Koalition von verlierend auf gewinnend bringt. Shapley-Machtwert = Anteil der Permutationen, in denen i pivotal ist.

Party	Vote share	Shapley power index ϕ_i
Partei 1 (40%)	40%	$\phi_1 = \frac{10}{24} \approx \mathbf{41{,}7}\%$
Partei 2 (30%)	30%	$\phi_2 = \frac{6}{24} = \mathbf{25{,}0}\%$
Partei 3 (20%)	20%	$\phi_3 = \frac{6}{24} = \mathbf{25{,}0}\%$
Partei 4 (10%)	10%	$\phi_4 = \frac{2}{24} \approx \mathbf{8{,}3}\%$

Interpretation:

- Partei 1 hat *mehr* Macht als ihr Stimmanteil suggeriert (41,7% $>$ 40%), da sie in vielen Koalitionen pivotal ist.
- Partei 4 hat *weniger* reale Macht (8,3% $<$ 10%), da sie selten den entscheidenden Ausschlag gibt.
- Partei 2 und 3 haben denselben Machtwert (25%), obwohl 2 mehr Stimmen hat – beide sind gleich oft pivotal!

8 Example 3: Cost Sharing – Nash Bargaining

Scenario: Two Cities Build a Joint Water Pipeline

Städte A und B wollen gemeinsam eine Wasserleitung bauen. Allein würde A 80 Mio. €, B 60 Mio. € kosten. Gemeinsam kostet die Leitung nur 100 Mio. €.
Statusquo: Jede Stadt zahlt ihre Einzelkosten $d_A = 80$, $d_B = 60$ (wenn keine Einigung). Ersparnis durch Kooperation: 40 Mio. €.
Formulierung als Kostenaufteilungsspiel: Einsparungen: $v(\{A\}) = 0$, $v(\{B\}) = 0$, $v(\{A, B\}) = 80 + 60 - 100 = 40$.

8.1 Shapley Value of Savings

For $n = 2$ there are $2! = 2$ permutations:

Ordering	Marginal A	Marginal B
A, B	$v(\{A\}) = 0$	$v(\{A, B\}) - v(\{A\}) = 40$
B, A	$v(\{A, B\}) - v(\{B\}) = 40$	$v(\{B\}) = 0$
Shapley ($\div 2$)	$\phi_A = 20$	$\phi_B = 20$

Each city receives the same savings of 20m €.
Kostenbeitrag: A zahlt $80 - 20 = \mathbf{60}$ Mio. €, B zahlt $60 - 20 = \mathbf{40}$ Mio. €.

8.2 Nash Bargaining Solution

Statusquo: $d_A = 0$, $d_B = 0$ (keine Einsparung ohne Kooperation). Gesamteinsparung $V = 40$.

$$x_A^* = \frac{40 + 0 - 0}{2} = \mathbf{20}, \qquad x_B^* = \frac{40 + 0 - 0}{2} = \mathbf{20}$$

Bei symmetrischem Statusquo stimmen Shapley-Wert und Nash-Lösung überein: Beide Städte teilen die Einsparung gleich auf.

9 Tool Description: Game Theory Module 4

Cooperative Game Theory – Interactive Tool

Das Tool berechnet Shapley-Wert, Core-Bedingungen und Nash-Verhandlungslösung für kooperative Spiele mit 2 bis 5 Spielern.

9.1 Input

- **Number of players:** 2 to 5.
- **Player names:** freely editable (e.g. Firm A, City 1, Party X).

- **Koalitionswerte $v(S)$:** Für jede nicht-leere Koalition S den Wert eingeben – was die Koalition allein erreichen kann.
- **3 examples:** Production coalition, voting weights, cost sharing.

9.2 Output – 5 Steps

1. **Spieleigenschaften:** Superadditivität prüfen, Essentialität, Mehrwert durch Kooperation.
2. **Shapley-Wert:** Vollständige Permutationstabelle (für $n \leq 3$), Marginalbeiträge, finale Aufteilung mit Effizienzprüfung.
3. **Core-Analyse:** Alle Koalitionsrationalitätsbedingungen tabellarisch; liegt der Shapley-Wert im Core?
4. **Nash-Verhandlung (2 Spieler):** Nash-Produkt, Statusquo, optimale Aufteilung. Für $n \geq 3$: Shapley vs. proportionale Aufteilung.
5. **Interpretation:** Stärkster/schwächster Spieler, Axiome, Empfehlung für die Kooperation.

Bar chart: Shapley values displayed graphically for all players.

10 Summary

Kernpunkte: Modul 4 – Kooperative Spieltheorie

1. **Kooperatives Spiel:** (N, v) mit charakteristischer Funktion $v : 2^N \to \mathbb{R}$; $v(S)$ = Wert der Koalition S.
2. **Superadditivität:** $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ – Kooperation ist immer vorteilhaft.
3. **Shapley-Wert:** Jeder Spieler erhält seinen durchschnittlichen Marginalbeitrag über alle $n!$ Permutationen. Eindeutig durch 4 Axiome (Effizienz, Symmetrie, Dummy, Additivität).
4. **Core:** Menge aller stabilen Imputationen – keine Koalition kann durch Abspaltung gewinnen. Bei konvexen Spielen: Core immer nicht leer, Shapley-Wert im Core.
5. **Nash-Verhandlungslösung (2 Spieler):** Maximiert das Nash-Produkt $(x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$; teilt den Surplus gleich auf.
6. **Shapley-Machtwert:** Misst politische Macht in Abstimmungsspielen – kann vom nominalen Stimmanteil abweichen.
7. **Kostenaufteilungsspiele:** Charakteristische Funktion = Einsparungen; Shapley-Wert gibt faire, stabile Kostenteilung.