Game Theory

Module 2: Zero-Sum Games

Minimax Theorem, Saddle Point and Mixed Strategies

English

Wolfgang Boehme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 October 2026

Complete introduction with derivation of the payoff matrix,
step-by-step analysis and two worked examples

The documentation on this website was developed with the support of the AI Claude (Anthropic).

Table of Contents

1 What Is a Zero-Sum Game? 2

2 Complete Example 1: Penalty Kick 2
- 2.1 The Game Situation . . . 2
- 2.2 Deriving the Payoff Matrix . . . 2
- 2.3 The Payoff Matrix . . . 3
- 2.4 Step 1: Computing Maximin and Minimax . . . 4
- 2.5 Step 2: Checking for a Saddle Point . . . 4
- 2.6 Step 3: Computing Mixed Strategies . . . 5
- 2.7 Ergebnis . . . 6

3 Example 2: Saddle Point – Rock-Paper-Scissors 6
- 3.1 The Payoff Matrix . . . 6
- 3.2 Maximin and Minimax . . . 6
- 3.3 Mixed Strategy . . . 7

4 Theory: Minimax Theorem 7

5 Tool Description: Game Theory Module 2 7
- 5.1 Input . . . 7
- 5.2 Output – 5 Steps . . . 7

6 Summary 8

1 What Is a Zero-Sum Game?

In einem **Nullsummenspiel** ist der Gewinn eines Spielers genau gleich dem Verlust des anderen. Was einer gewinnt, verliert der andere – die Summe der Auszahlungen ist immer null.

Definition: Zero-Sum Game

Ein Zwei-Personen-Spiel heißt **Nullsummenspiel**, wenn für alle Strategiekombinationen gilt:

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_2 = -u_1$$

Man gibt daher nur die Auszahlung von **Spieler 1** an. Spieler 1 *maximiert*, Spieler 2 *minimiert* diese Auszahlung.

Typical Zero-Sum Games

- Sports: penalty kick (striker vs. goalkeeper), tennis serve
- Military: attack vs. defence
- Poker, chess, rock-paper-scissors
- Negotiations with a fixed total surplus

2 Complete Example 1: Penalty Kick

2.1 The Game Situation

Scenario: Striker vs. Goalkeeper

Ein Angreifer tritt einen Elfmeter. Beide Spieler entscheiden **gleichzeitig** – der Angreifer schießt, der Torwart springt im selben Moment.

Strategies:

- **Striker**: Shoot **Left** or Shoot **Right**
- **Goalkeeper**: Dive **Left**, **Stay Centre** or Dive **Right**

Auszahlung: positiver Wert = Vorteil für Angreifer, negativer Wert = Vorteil für Torwart.

2.2 Deriving the Payoff Matrix

Wir schätzen die Torwahrscheinlichkeit (in %) je nach Kombination und wandeln sie in Auszahlungswerte um:

Combination	What happens?	Value
Left – Left	Torwart springt richtig. Schwierig für Angreifer, aber er ist auf der richtigen Seite – 40% Torchance.	+3
Left – Centre	Torwart bleibt. Schuss geht an ihm vorbei, aber er kann reagieren. Moderate Chance – 20% Torchance für Angreifer.	−1
Left – Right	Torwart springt falsch (weg vom Ball). Angreifer trifft fast sicher – 75% Torchance.	+2
Right – Left	Goalkeeper dives wrong. Striker has 80% scoring chance.	−2
Right – Centre	Goalkeeper stays. Shot passes by – 70% scoring chance.	+4
Right – Right	Goalkeeper dives correctly – 55% scoring chance for striker.	+1

Warum negative Werte? Wert −2 bei (Rechts, Links) bedeutet: Torwart springt falsch – aber das ist gut für den *Torwart* (er hat den Angreifer überlistet). Da wir aus Sicht des Angreifers messen: negativer Wert = schlechtes Ergebnis für Angreifer.
In einem Nullsummenspiel steht −2 für den Angreifer gleichzeitig +2 für den Torwart.

2.3 The Payoff Matrix

Striker \ Goalkeeper	Dive Left	Stay Centre	Dive Right
Shoot Left	+3	−1	+2
Shoot Right	−2	+4	+1

How to read the matrix:

- Each number = payoff for the Striker
- Der Torwart erhält den *negativen* Wert (Nullsumme: +3 für Angreifer = −3 für Torwart)
- Striker chooses row and wants to *maximize*
- Goalkeeper chooses column and wants to *minimize*

2.4 Step 1: Computing Maximin and Minimax

Strikerś strategy – Maximin:

Der Angreifer überlegt: "Was ist das *Mindeste*, das ich erzielen kann, wenn ich diese Strategie wähle?" Er wählt die Strategie mit dem *höchsten* Minimum.

Angreifer	Links	Mitte	Rechts	Zeilen-Min
Shoot Left	$+3$	-1	$+2$	$\mathbf{-1}$
Shoot Right	-2	$+4$	$+1$	$\mathbf{-2}$

Maximin $= \max(-1,\ -2) = \mathbf{-1}$
$\Rightarrow$ Schuss Links garantiert dem Angreifer mindestens -1.

Goalkeeperś strategy – Minimax:

Der Torwart überlegt: "Was ist das *Maximum*, das der Angreifer erzielen kann, wenn ich diese Spalte wähle?" Er wählt die Spalte mit dem *kleinsten* Maximum.

	Dive Left	Stay Centre	Dive Right
Shoot Left	$+3$	-1	$+2$
Shoot Right	-2	$+4$	$+1$
Spalten-Max	$\mathbf{+3}$	$\mathbf{+4}$	$\mathbf{+2}$

Minimax $= \min(+3,\ +4,\ +2) = \mathbf{+2}$
$\Rightarrow$ Diving Right limits the maximum loss to $+2$.

2.5 Step 2: Checking for a Saddle Point

Definition: Saddle Point

A cell (i^*, j^*) is called a **saddle point** if:

$$a_{i^*j^*} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

Das heißt: Maximin = Minimax. Die Zelle ist gleichzeitig Zeilenminimum und Spaltenmaximum.

Im Elfmeter-Beispiel: Maximin $= -1$, Minimax $= +2$.
$-1 \neq +2 \Rightarrow$ **Kein Sattelpunkt!**

Das Spiel hat kein Gleichgewicht in reinen Strategien. Würde der Angreifer immer links schießen, würde der Torwart immer links springen. Würde der Torwart immer links springen, würde der Angreifer rechts schießen – und so weiter.

$\Rightarrow$ Beide müssen **gemischte Strategien** spielen.

2.6 Step 3: Computing Mixed Strategies

Optimal Mixed Strategy

Spieler 1 mischt mit Wahrscheinlichkeit p die erste Zeile und $(1-p)$ die zweite. Der optimale Wert von p macht Spieler 2 **indifferent** zwischen seinen Strategien – er kann durch keine Wahl mehr profitieren.

Da der Torwart drei Spalten hat, das Spiel aber 2×3 ist, reduzieren wir zunächst durch Dominanz.

Dominanzreduktion: Vergleiche Spalte "Links" mit "Rechts" aus Sicht des Torwarts (Torwart minimiert):

- Against Left: Left $= 3$, Right $= 2$. Goalkeeper prefers Right $(2 < 3)$.
- Against Right: Left $= -2$, Right $= 1$. Goalkeeper prefers Left $(-2 < 1)$.

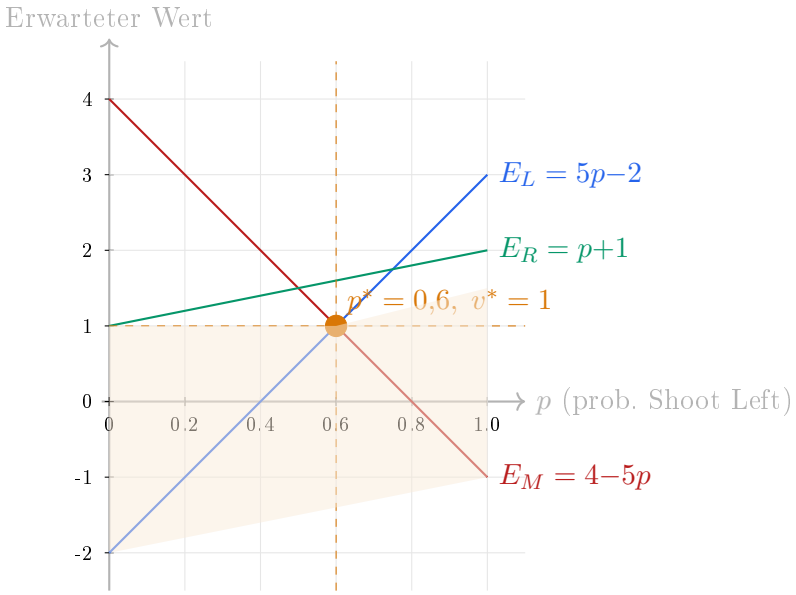
Keine klare Dominanz. Wir prüfen "Mitte" gegen die anderen:

- Centre vs Left: $-1 < 3$ and $4 > -2$ – Centre is not dominant.

No direct elimination possible. Graphical analysis for 2×3:
Expected payoff as a function of p (prob. of shooting Left):

$$\begin{aligned} \text{EV vs Dive Left:} \quad & E_L(p) = 3p + (-2)(1-p) = 5p - 2 \\ \text{EV vs Stay Centre:} \quad & E_M(p) = (-1)p + 4(1-p) = 4 - 5p \\ \text{EV vs Dive Right:} \quad & E_R(p) = 2p + 1 \cdot (1-p) = p + 1 \end{aligned}$$

The striker maximizes the minimum of these three lines.



Optimum: $E_L(p) = E_M(p)$:

$$5p - 2 = 4 - 5p \quad \Rightarrow \quad 10p = 6 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p^* = 0{,}6}$$

Kontrolle: $E_R(0{,}6) = 0{,}6 + 1 = 1{,}6 > 1$ – Sprung Rechts ist für den Torwart bei $p^* = 0{,}6$ die schlechteste Wahl, also irrelevant im Gleichgewicht. (Der Torwart mischt nur Links und Mitte.)

Optimal Goalkeeper Strategy:

Goalkeeper makes striker indifferent between Left (E_L) and Centre (E_M):

$$E_L: \quad 3q + (-2)(1-q) = 5q - 2 \quad \text{(mit Sprung Links mit Wahrsch. } q\text{)}$$

$$E_M: \quad (-1)q + 4(1-q) = 4 - 5q$$

Indifferenz $E_L = E_M$ aus Sicht des Angreifers gibt die Mischstrategie: aber das ist die gleiche Gleichung: $5q - 2 = 4 - 5q \Rightarrow q^* = 0{,}6$.

Also: Torwart springt mit Wahrsch. 0,6 links, bleibt mit 0,4 in der Mitte (und springt nie rechts).

2.7 Ergebnis

Optimal Mixed Strategies	
Striker:	Shoot Left with $p^* = 0{,}6$, Shoot Right with $1 - p^* = 0{,}4$
Goalkeeper:	Dive Left with $q^* = 0{,}6$, Centre with $1 - q^* = 0{,}4$, never Right
Game value:	$v^* = E_L(0{,}6) = 5 \cdot 0{,}6 - 2 = +1$

Bedeutung: Im Gleichgewicht erzielt der Angreifer im Erwartungswert +1 – ein leichter Vorteil. Keiner kann durch Abweichen von seiner gemischten Strategie profitieren.

3 Example 2: Saddle Point – Rock-Paper-Scissors

3.1 The Payoff Matrix

A \ B	Scissors	Rock	Paper
Scissors	0	−1	+1
Rock	+1	0	−1
Paper	−1	+1	0

Herleitung: Schere gegen Schere = Gleichstand (0). Schere gegen Stein = Schere verliert (−1 für A). Schere gegen Papier = Schere gewinnt (+1). usw.

3.2 Maximin and Minimax

Row minima: Scissors = −1, Rock = −1, Paper = −1. Maximin = −1.

Column maxima: Scissors = 1, Rock = 1, Paper = 1. Minimax = 1.

$-1 \neq 1 \Rightarrow$ **No saddle point.**

3.3 Mixed Strategy

Aus Symmetrie: alle drei Strategien gleich wahrscheinlich, $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$.
Spielwert: $v^* = 0$ (faires Spiel – symmetrisches Nullsummenspiel).

4 Theory: Minimax Theorem

Minimax Theorem – von Neumann 1928

Jedes endliche Zwei-Personen-Nullsummenspiel hat einen **Spielwert** v^* in gemischten Strategien:

$$v^* = \max_p \min_q \sum_{i,j} p_i \cdot a_{ij} \cdot q_j = \min_q \max_p \sum_{i,j} p_i \cdot a_{ij} \cdot q_j$$

Beide Spieler haben optimale gemischte Strategien p^* und q^* mit $\sum p_i = \sum q_j = 1$, $p_i, q_j \geq 0$.

Intuition: Spieler 1 maximiert den garantierten Mindestgewinn (Maximin). Spieler 2 minimiert den maximalen Schaden (Minimax). Das Theorem besagt: Diese beiden Werte stimmen überein. Man muss nur *eine* Gleichung lösen.

5 Tool Description: Game Theory Module 2

Zero-Sum Game Tool

Das Tool berechnet Maximin, Minimax, Sattelpunkt und gemischte Strategien für Nullsummenspiele.

5.1 Input

In der Matrix steht nur die Auszahlung von Spieler 1 (Zeilenmaximierer). Der Kopfbereich erklärt:

- **Rows (↓)** = strategies of Player 1 (chooses row, maximizes)
- **Columns (→)** = strategies of Player 2 (chooses column, minimizes)
- Positive number = good for Player 1; negative number = good for Player 2

5.2 Output – 5 Steps

1. **Maximin und Minimax:** Zeilenminima und Spaltenmax mit Tabellen; welche Zeile/Spalte optimal?
2. **Sattelpunkt:** Ist Maximin = Minimax? Falls ja: reines GG. Falls nein: gemischte Strategien nötig.
3. **Dominance Reduction:** Elimination of dominated strategies.

4. **Gemischte Strategien:** Analytische Lösung für 2×2; grafischer Explorer mit Schieberegler.

5. **Spielwert und Interpretation:** Wer hat Vorteil? Minimax-Theorem.

Grafischer Explorer (nur 2×2): Ein Schieberegler zeigt, wie sich der erwartete Spielwert mit p ändert. Man sieht: am Optimum p^* schneiden sich die beiden EW-Linien – kein Spieler kann durch Abweichen profitieren.

6 Summary

Kernpunkte: Modul 2 – Nullsummenspiele

1. In einem **Nullsummenspiel** gewinnt einer genau das, was der andere verliert. Nur Auszahlung von S1 wird angegeben.
2. **P1 maximizes** (rows), **P2 minimizes** (columns).
3. **Maximin** (P1): highest row minimum – guaranteed minimum payoff.
4. **Minimax** (P2): smallest column maximum – limited loss.
5. **Saddle point:** Maximin = Minimax ⇒ pure equilibrium.
6. **No saddle point:** Mixed strategies required.
7. Optimale gemischte Strategie: macht den Gegner *indifferent* – er kann durch keine Strategiewahl mehr profitieren.
8. **Spielwert** v^*: garantierter EW im Gleichgewicht. Minimax-Theorem (von Neumann): $\max\min = \min\max = v^*$.