Game Theory

Module 1: Fundamentals

Strategic Games, Dominance and Nash Equilibrium

English

Wolfgang Boehme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 October 2026

Complete introduction with a fully worked practical example and tool description

The documentation on this website was developed with the support of the AI Claude (Anthropic).

Table of Contents

1 What Is Game Theory? 2

2 Key Concepts 2

2.1 The Payoff Matrix – Step by Step 2

3 Complete Example: Price War between Two Firms 3

3.1 Initial Situation 3
3.2 Deriving All Nine Cells 3
3.3 The Simplified Payoff Matrix 5
3.4 Step 1: Determining Best Responses 5
3.5 Step 2: Strict Dominance 6
3.6 Step 3: Iterated Elimination (IEDS) 7
3.7 Step 4: Nash Equilibrium 7
3.8 The Dilemma: What Would Be Collectively Better? 8
3.9 Second Example: Coordination Game (Technology Standard) 8

4 Tool Description: Game Theory Module 1 9

4.1 Entering Your Own Matrix 9
4.2 CSV Import 9
4.3 Output and Intermediate Steps 9

5 Summary 10

1 What Is Game Theory?

Spieltheorie analysiert Situationen, in denen mehrere **rationale Akteure** (Spieler) Entscheidungen treffen, die sich gegenseitig beeinflussen. Anders als bei klassischen Optimierungsproblemen hängt das Ergebnis nicht nur von der eigenen Entscheidung ab, sondern auch von den Entscheidungen der anderen.

Typical Applications

- **Economics:** Pricing, market entry, auctions, negotiations
- **Politics:** Arms races, international agreements
- **Biology:** Evolutionary strategies in the animal world
- **Computer Science:** Protocol design, AI agents, networks

2 Key Concepts

Definition: Strategic Game (Normal Form)

A strategic game in normal form consists of:

- a set of **players** $\{1, 2, \ldots, n\}$
- for each player i a set of **strategies** S_i
- for each player i a **payoff function** $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$

All players choose their strategy **simultaneously and independently**.

2.1 The Payoff Matrix – Step by Step

Bei einem Zwei-Personen-Spiel stellt man alle Auszahlungen in einer **Matrix** dar:

- **Rows** = strategies of **Player 1**
- **Columns** = strategies of **Player 2**
- Jede Zelle zeigt (**Gewinn S1**, **Gewinn S2**) für diese Strategiekombination

Example: How to Read a Cell

P1 \ P2	Low price	High price
Low price	(2, 2)	(6, 1)
High price	(1, 6)	(4, 4)

How to read cell (Low price, High price) = (6, 1)?

- **Player 1** chooses **Low price** → earns **6** million Euro profit

- **Player 2** chooses **High price** → earns only **1** million Euro profit
- Spieler 1 hat durch seinen Niedrigpreis Marktanteile gewonnen; Spieler 2 verliert Kunden an Spieler 1.

3 Complete Example: Price War between Two Firms

3.1 Initial Situation

Scenario: Firms Alpha and Beta

Zwei Firmen verkaufen dasselbe Produkt. Jede Firma setzt unabhängig von der anderen einen von drei Preisen: **High price (120 €)**, **Medium price (90 €)** oder **Low price (60 €)**.

Market mechanism:

- Wer **günstiger** ist, gewinnt den größeren Marktanteil (ca. 70% des Marktes).
- At **equal prices** both firms split the market (50% each).
- Market volume: 100 units total.
- Unit cost: 50 € per unit.

Profit calculation (example):
Firm Alpha sets High price (120 €), Firm Beta sets Low price (60 €):

- Beta is cheaper → Beta wins 70 units, Alpha only 30.
- Alpha: $30 \times (120 - 50) = 30 \times 70 = 2100$ €
- Beta: $70 \times (60 - 50) = 70 \times 10 = 700$ €

Trotz Niedrigpreis hat Beta weniger Gewinn – Niedrigpreis allein reicht nicht!

3.2 Deriving All Nine Cells

Formula: Profit = quantity sold × (price − unit cost)

Market split:

- One cheaper: cheaper firm gets 70 units, more expensive gets 30.
- Equal price: both get 50 units each.

Combination	Calculation	Result
Alpha High (120€) Beta High (120€)	Equal price → 50 units each Alpha: $50 \times (120-50) = 50 \times 70 = 3500$€ Beta: $50 \times (120-50) = 3500$€	$\approx (4, 4)$
Alpha High (120€) Beta Medium (90€)	Beta cheaper → Beta 70, Alpha 30 Alpha: $30 \times (120-50) = 30 \times 70 = 2100$€ Beta: $70 \times (90-50) = 70 \times 40 = 2800$€	$\approx (2, 3)$ (gerundet: (2,3))
Alpha High (120€) Beta Low (60€)	Beta cheaper → Beta 70, Alpha 30 Alpha: $30 \times (120-50) = 2100$€ Beta: $70 \times (60-50) = 70 \times 10 = 700$€	$\approx (2, 1)$
Alpha Medium (90€) Beta High (120€)	Alpha cheaper → Alpha 70, Beta 30 Alpha: $70 \times (90-50) = 70 \times 40 = 2800$€ Beta: $30 \times (120-50) = 2100$€	$\approx (3, 2)$
Alpha Medium (90€) Beta Medium (90€)	Equal price → 50 units each Alpha: $50 \times (90-50) = 50 \times 40 = 2000$€ Beta: $50 \times 40 = 2000$€	$\approx (2, 2)$ (in Matrix: (3,3))
Alpha Medium (90€) Beta Low (60€)	Beta cheaper → Beta 70, Alpha 30 Alpha: $30 \times (90-50) = 30 \times 40 = 1200$€ Beta: $70 \times (60-50) = 700$€	$\approx (1, 1)$
Alpha Low (60€) Beta High (120€)	Alpha cheaper → Alpha 70, Beta 30 Alpha: $70 \times (60-50) = 70 \times 10 = 700$€ Beta: $30 \times (120-50) = 2100$€	$\approx (1, 2)$
Alpha Low (60€) Beta Medium (90€)	Alpha cheaper → Alpha 70, Beta 30 Alpha: $70 \times (60-50) = 700$€ Beta: $30 \times (90-50) = 1200$€	$\approx (1, 1)$
Alpha Low (60€) Beta Low (60€)	Equal price → 50 units each Alpha: $50 \times (60-50) = 50 \times 10 = 500$€ 4 Beta: $50 \times 10 = 500$€	$\approx (1, 1)$

Scaling to 1–6: Die realen Gewinne (500€ bis 3500€) wurden auf die Skala 1–6 normiert, damit die Matrix übersichtlich bleibt. Verhältnis: 500€ ≈ 1, 1000€ ≈ 2, 1500€ ≈ 3 usw. Die *relativen* Verhältnisse – wer mehr verdient – bleiben erhalten. Das ist in der Spieltheorie üblich: Nur die Rangfolge der Auszahlungen zählt für die Analyse.

3.3 The Simplified Payoff Matrix

Payoffs scaled to 1–6 (higher = better):

Alpha \ Beta	**High price** (120 €)	**Medium price** (90 €)	**Low price** (60 €)
High price (120 €)	(4, 4)	(2, 5)	(1, 6)
Medium price (90 €)	(5, 2)	(3, 3)	(1, 4)
Low price (60 €)	(6, 1)	(4, 1)	(2, 2)

Cell (Alpha Medium, Beta High) = (5, 2) – explanation:

- Alpha at 90 € is cheaper than Beta at 120 €.
- Alpha wins 70 units, Beta only 30 units.
- Alpha: $70 \times (90-50) = 2800$€ → scaled: **5** (nahe Maximum)
- Beta: $30 \times (120-50) = 2100$€ → scaled: **2** (niedrig)
- **Fazit:** Wer günstiger ist, gewinnt Volumen – aber der höhere Deckungsbeitrag des Teuereren mildert den Verlust.

3.4 Step 1: Determining Best Responses

Die **beste Antwort** einer Firma ist die Strategie, die den eigenen Gewinn maximiert – gegeben was die andere Firma tut.

Best responses of Firm Alpha (rows, highlighted blue):

Alpha \ Beta	High	Medium	Low
High	**4**	**2**	**1**
Medium	**5**	**3**	**1**
Niedrigpreis	**6** ←	**4** ←	**2** ←

Ergebnis: Egal was Beta macht – Alpha's Gewinn ist immer am höchsten bei **Niedrigpreis**. Niedrigpreis ist eine *dominant* beste Antwort.

Best responses of Firm Beta (columns, highlighted purple):

Alpha \ Beta	High	Medium	Low
High	4	5	6 ↑
Medium	2	3	4 ↑
Low	1	1	2 ↑

Ergebnis: Auch Beta verdient mit Niedrigpreis immer am meisten. Niedrigpreis ist für beide Firmen eine **strikt dominante Strategie**.

3.5 Step 2: Strict Dominance

Definition: Strictly Dominant Strategy

Strategie s_i **dominiert strikt** Strategie s_i', wenn gilt:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}) \quad \text{für alle } s_{-i}$$

Das heißt: s_i liefert *immer* einen höheren Gewinn als s_i', unabhängig davon was die anderen Spieler tun.

Wir prüfen: Ist **Niedrigpreis** für Alpha immer besser als Mittelpreis – egal was Beta tut?

	Gewinn Alpha bei Strategie ...			
Betaś choice	Low price	Medium price	High price	Low price better?
Beta chooses High	6	5	4	$6 > 5 > 4$ ✓
Beta chooses Medium	4	3	2	$4 > 3 > 2$ ✓
Beta chooses Low	2	1	1	$2 > 1 = 1$ ✓

Lesehilfe zur Tabelle: Jede Zeile entspricht einer möglichen Wahl von Beta. Die Spalten zeigen, was Alpha bei *seiner* jeweiligen Strategie verdient. Niedrigpreis (linke Spalte) liefert *in jeder Zeile* den höchsten Wert ⇒ Niedrigpreis dominiert strikt sowohl Mittelpreis als auch Hochpreis.

Beispiel Zeile 1: Beta chooses High.

- Alpha Low price (60€): Alpha is cheaper, wins 70 units → payoff = 6
- Alpha Medium price (90€): Alpha is cheaper, wins 70 units → payoff = 5
- Alpha High price (120€): tie, 50 units each → payoff = 4

Low price is best: $6 > 5 > 4$. ✓

Dieselbe Analyse gilt symmetrisch für Beta: Niedrigpreis ist ebenfalls strikt dominant. **Beide Firmen haben also eine dominante Strategie.**

3.6 Step 3: Iterated Elimination (IEDS)

Iterated Elimination of Dominated Strategies (IEDS)

Man streicht schrittweise alle dominierten Strategien. Nach jeder Runde können neue Strategien dominiert werden (weil ein Spieler weiß, was der andere *nicht* spielen wird).

Runde 1: Hochpreis ist für Alpha dominiert durch Mittelpreis ⇒ Zeile "Hochpreis" streichen.

Alpha \ Beta	High	Medium	Low
Hochpreis	**(4,4)**	**(2,5)**	**(1,6)**
Medium	(5,2)	(3,3)	(1,4)
Low	(6,1)	(4,1)	(2,2)

Runde 2: Nach Streichen von Alpha-Hochpreis ist für Beta Hochpreis dominiert ⇒ Spalte "Hochpreis" streichen.

Runde 3: Mittelpreis (Alpha) dominiert durch Niedrigpreis ⇒ Zeile "Mittelpreis" streichen.

Runde 4: Mittelpreis (Beta) dominiert durch Niedrigpreis ⇒ Spalte "Mittelpreis" streichen.

Result after IEDS:

Alpha \ Beta	Low price
Niedrigpreis	**(2, 2)**

Unique solution: **Both choose Low price.**

3.7 Step 4: Nash Equilibrium

Definition: Nash Equilibrium

Ein Strategieprofil $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ ist ein **Nash-Gleichgewicht**, wenn kein Spieler i durch einseitige Abweichung seinen Gewinn erhöhen kann:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \text{für alle } s_i \in S_i \text{ und alle } i$$

Check: (Low price, Low price) = (2, 2)

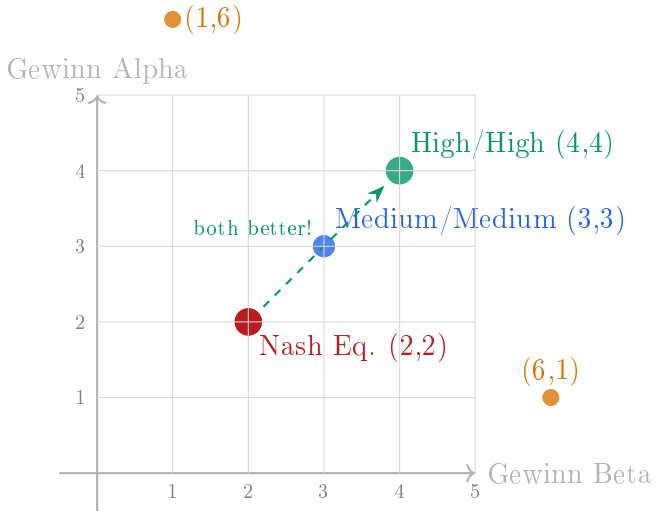
- Kann Alpha sich verbessern, wenn Beta Niedrigpreis spielt? Alpha's Alternativen: Mittelpreis → $1 < 2$. Hochpreis → $1 < 2$. Nein ✓
- Kann Beta sich verbessern, wenn Alpha Niedrigpreis spielt? Beta's Alternativen: Mittelpreis → $1 < 2$. Hochpreis → $1 < 2$. Nein ✓

⇒ **(Low price, Low price)** is the **unique Nash equilibrium**.

3.8 The Dilemma: What Would Be Collectively Better?

The Prisonerś Dilemma of the Price War

Das Nash-Gleichgewicht (Niedrigpreis, Niedrigpreis) = (2, 2) ist **Pareto-inferior**: Wenn beide Hochpreis spielen würden, erhielten beide den Gewinn (4, 4) – also doppelt so viel!
Warum tun sie es nicht? Weil jede Firma einzeln einen Anreiz hat, zum Niedrigpreis abzuweichen. Ohne bindende Absprache landen beide im schlechteren Gleichgewicht.
This is the fundamental principle of the *prisonerś dilemma*.



3.9 Second Example: Coordination Game (Technology Standard)

Scenario: Two Firms Choose a Technical Standard

Firma X und Firma Y entwickeln kompatible Produkte. Beide müssen einen von zwei Standards wählen: **Standard A** oder **Standard B**.

Auszahlungslogik:

- Beide wählen **gleichen Standard**: Produkte sind kompatibel, größerer Markt. Gewinn 3 (Standard A, marktführend) oder 2 (Standard B).
- Different standards: incompatibility, almost no sales. Payoff 0.

Firm X \ Firm Y	Standard A	Standard B
Standard A	(**3**, **3**)	(0, 0)
Standard B	(0, 0)	(**2**, **2**)

Analysis:

- (Standard A, Standard A) = (3,3): **Nash Eq.** – no one wants to deviate.

- (Standard B, Standard B) = (2,2): **Nash Eq.** – no one wants to deviate either.
- Zwei Nash-Gleichgewichte! ⇒ **Koordinationsproblem**: Ohne Absprache landen beide möglicherweise bei (0,0).

4 Tool Description: Game Theory Module 1

Game Theory Tool Module 1 – Fundamentals

Das Tool berechnet beste Antworten, dominante Strategien, IEDS und Nash-Gleichgewichte interaktiv für beliebige 2-Personen-Spiele.

4.1 Entering Your Own Matrix

1. **Größe wählen:** Anzahl Strategien für Spieler 1 (Zeilen) und Spieler 2 (Spalten) – je 2–6.
2. **Player names:** Editable in the top-left of the matrix header.
3. **Strategienamen:** Zeilen- und Spaltenbeschriftungen direkt editieren (z. B. „Hochpreis", „Mittelpreis", „Niedrigpreis").
4. **Auszahlungen:** In jeder Zelle zwei Zahlen eingeben: linke = Gewinn Spieler 1, rechte = Gewinn Spieler 2.
5. **Nullsummenspiel:** Wenn aktiviert, nur eine Zahl pro Zelle (Spieler 2 erhält den negativen Wert).

4.2 CSV Import

Format: erste Zeile = Kopfzeile mit Spaltennamen, dann eine Zeile pro Strategie von Spieler 1. Zellen als `a,b` (Auszahlung S1, S2):

P1\P2	High	Medium	Low
High	4,4	2,5	1,6
Medium	5,2	3,3	1,4
Low	6,1	4,1	2,2

4.3 Output and Intermediate Steps

The tool shows 5 numbered steps:

1. **Beste Antworten:** Für jede Strategie des Gegners die optimale Gegenstrategie – tabellarisch aufgelistet.
2. **Strikte Dominanz:** Welche Strategie dominiert welche? Mit vollständigem Beweis (alle Ungleichungen).

3. **IEDS:** Iterierte Eliminierung – Runde für Runde, mit verbleibender Matrix. Falls eindeutig: direkte Lösung.
4. **Nash-Gleichgewichte:** Alle reinen Nash-GG mit Prüfung (kein Spieler kann sich einseitig verbessern).
5. **Spielklassifikation:** Nullsumme? Koordinationsspiel? Gefangenendilemma? Mehrere Gleichgewichte?

Colour code in the result matrix:

- **Green** (outlined): Nash equilibrium
- **Blue** (light): Best response Player 1
- **Orange** (light): Best response Player 2
- *Hatched:* Strategy eliminated by IEDS

5 Summary

Key Points: Module 1

1. Die **Auszahlungsmatrix** zeigt für jede Strategiekombination den Gewinn beider Spieler.
2. Die **beste Antwort** ist die gewinnmaximierende Strategie gegeben die Strategie des Gegners.
3. Eine **strikt dominante Strategie** ist immer besser als die Alternative – unabhängig vom Gegner.
4. **IEDS** eliminiert schrittweise dominierte Strategien und kann zu einer eindeutigen Lösung führen.
5. Ein **Nash-Gleichgewicht** ist ein Strategieprofil, von dem kein Spieler einseitig abweichen möchte.
6. Nash-GG können **Pareto-inferior** sein (Gefangenendilemma: beide wären kollektiv besser dran).
7. Es kann **mehrere Nash-GG** geben (Koordinationsspiele: Absprache nötig).