Zeitreihen-Modellierung

Technische Dokumentation · Modul 2

ARIMA, ARIMAX, GARCH, VAR

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

0 Inhaltsverzeichnis

1 Überblick und Bedienung **2**
1.1 Datenformat . . . 2
1.2 Navigation . . . 2
1.3 Empfohlener Arbeitsablauf . . . 2

2 Stationarität und Einheitswurzeltests **3**
2.1 Augmented Dickey-Fuller (ADF) Test . . . 3
2.2 Bedienung im Rechner . . . 3

3 Ljung-Box und ARCH-LM Vortests **4**
3.1 Ljung-Box Test . . . 4
3.2 ARCH-LM Test (Engle 1982) . . . 4
3.3 Bedienung im Rechner . . . 4

4 ARIMA-Modelle **4**
4.1 Identifikation über ACF und PACF . . . 5
4.2 Schätzung (OLS-Approximation) . . . 5
4.3 Residuendiagnose . . . 5
4.4 Auto-ARIMA . . . 5
4.5 Bedienung im Rechner . . . 5

5 ARIMAX – ARIMA mit exogenen Variablen **6**
5.1 Modellvergleich ARIMA vs. ARIMAX . . . 6
5.2 Bedienung im Rechner . . . 6

6 GARCH-Modelle **6**
6.1 Value-at-Risk (VaR) . . . 7
6.2 Halbwertszeit der Volatilität . . . 7
6.3 Bedienung im Rechner . . . 7

7 Prognose und Konfidenzintervalle **7**
7.1 Punktprognose . . . 7
7.2 Konfidenzintervalle . . . 8

8 Rolling Forecast und Out-of-Sample-Güte **8**
8.1 Methodik . . . 8
8.2 Gütemaße . . . 8

9 Modellvergleich: AIC und BIC **9**

10 Kointegration (Engle-Granger) **9**

10.1 Engle-Granger Zweischritt-Verfahren 9

11 Granger-Kausalität **10**

11.1 F-Test 10

12 VAR-Modelle **10**

12.1 Lag-Wahl 11

12.2 Bedienung im Rechner 11

13 Durchger. Beispiel **11**

13.1 Datenbeschreibung 11

13.2 Schritt 1: Einheitswurzeltest (ADF) 11

13.3 Schritt 2: ARIMA(1,1,0) schätzen 12

13.4 Schritt 3: ARIMAX(1,1,0) mit EZB-Zinssatz 12

13.5 Schritt 4: GARCH(1,1) auf Log-Änderungen 13

13.6 Schritt 5: Prognose (3 Schritte) 13

13.7 Schritt 6: Granger-Kausalität (Lag 2) 14

13.8 Schritt 7: Kointegration (Engle-Granger) 14

13.9 Schritt 8: VAR(1)-Modell 14

1 Überblick und Bedienung

Der **Zeitreihen-Modellierungs-Rechner** ist eine in sich geschlossene HTML-Applikation, die ohne Installation im Browser ausgeführt wird. Sie ergänzt den Zeitreihen-Analysator (Modul 1) um fortgeschrittene Modellierungsverfahren.

1.1 Datenformat

Die Anwendung erwartet eine **CSV-Datei** mit folgendem Aufbau:

```
Datum,Variable_1,Variable_2,...,Variable_k
2020-01,1.5,0.0,...
2020-02,1.7,0.0,...
```

- Spalte 1: Zeitstempel (Datum, Monat, Quartal – beliebiges Format)
- Spalten 2+: Numerische Zeitreihenwerte (Dezimalpunkt)
- Trennzeichen: Komma
- Kopfzeile: Pflichtfeld (erste Zeile)

1.2 Navigation

Die Anwendung verwendet eine **Seitenleiste** (Sidebar) mit drei Gruppen:

Gruppe	Module
Voraussetzungen	Einheitswurzel (ADF), Ljung-Box / ARCH-LM
Univariat	ARIMA, ARIMAX, GARCH
Prognose & Bewertung	Prognose, Rolling Forecast, Modellwahl (AIC/BIC)
Multivariat	Kointegration, Granger-Kausalität, VAR

1.3 Empfohlener Arbeitsablauf

1. **Daten laden**: CSV hochladen oder Beispieldaten verwenden.
2. **Einheitswurzel prüfen**: ADF-Test → Integrationsordnung d bestimmen.
3. **Vortests**: Ljung-Box (ARIMA nötig?) und ARCH-LM (GARCH nötig?).
4. **Modellwahl**: AIC/BIC Grid-Suche → optimale (p, d, q) wählen.
5. **ARIMA schätzen** (ggf. mit Auto-ARIMA); Residuendiagnose prüfen.
6. **ARIMAX**: Exogene Variable ergänzen und AIC-Verbesserung prüfen.
7. **GARCH**: Falls ARCH-Effekte vorhanden, Volatilitätsmodell schätzen.

8. **Prognose**: Vorwärtsprognose mit Konfidenzband erstellen.
9. **Rolling Forecast**: Out-of-Sample-Güte mit RMSE, MAE, MAPE bewerten.
10. **Multivariat**: Kointegration, Granger, VAR bei mehreren Zeitreihen.

2 Stationarität und Einheitswurzeltests

Definition 2.1 (Stationarität). Eine Zeitreihe $\{Y_t\}$ heißt *schwach stationär*, wenn gilt:

$$\mathrm{E}[Y_t] = \mu \quad \text{(konstanter Erwartungswert)}, \tag{1}$$
$$\mathrm{Var}(Y_t) = \sigma^2 < \infty \quad \text{(endliche, konstante Varianz)}, \tag{2}$$
$$\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-h}) = \gamma(h) \quad \text{(hängt nur von Lag } h \text{ ab, nicht von } t). \tag{3}$$

Nicht-stationäre Reihen haben einen *stochastischen Trend* (Einheitswurzel, $I(1)$) oder einen deterministischen Trend. ARIMA-Modelle erfordern Stationarität nach d-maliger Differenzierung.

2.1 Augmented Dickey-Fuller (ADF) Test

ADF-Testgleichung

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta\, Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} \delta_i\, \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t \tag{4}$$

- **Nullhypothese** H_0: $\beta = 0$ – Einheitswurzel, $Y_t \sim I(1)$.
- **Alternativhypothese** H_1: $\beta < 0$ – stationär.
- Teststatistik: $\tau = \hat{\beta}/\mathrm{SE}(\hat{\beta})$ (linksseitig).

Signifikanzniveau	Kritischer Wert	Entscheidung (τ <krit.)
1 %	−3,43	Stationär (sehr signifikant)
5 %	−2,86	Stationär
10 %	−2,57	Schwach stationär

2.2 Bedienung im Rechner

Schritt 1: Zeitreihe in der Selector-Leiste auswählen.
Schritt 2: Sidebar → *Einheitswurzel* → „Tests berechnen“ klicken.
Schritt 3: Das empfohlene d wird automatisch in ARIMA, ARIMAX und Rolling Forecast übertragen.

3 Ljung-Box und ARCH-LM Vortests

3.1 Ljung-Box Test

Prüft, ob in den Daten (oder Residuen) signifikante Autokorrelationen vorliegen.

Ljung-Box Statistik

$$Q_{LB} = n(n+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \sim \chi^2(m) \tag{5}$$

wobei $\hat{\rho}_k$ die Stichproben-Autokorrelation bei Lag k und n die Stichprobengröße ist. H_0: Keine Autokorrelation. Ablehnung bei $Q_{LB} > \chi^2_{m;0,95}$.

3.2 ARCH-LM Test (Engle 1982)

Prüft auf bedingte Heteroskedastizität (ARCH-Effekte). Basis für die Entscheidung, ob GARCH sinnvoll ist.

ARCH-LM Testprozedur

1. Residuen $\hat{\varepsilon}_t$ aus einem AR-Modell (oder Rohdaten) berechnen.
2. Hilfregression: $\hat{\varepsilon}_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1\hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \cdots + \gamma_q\hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t$.
3. Teststatistik: $LM = n \cdot R^2 \sim \chi^2(q)$.

H_0: Keine ARCH-Effekte (konstante Varianz). Ablehnung bei $LM > \chi^2_{q;0,95} = 3{,}84$ (für $q = 1$).

3.3 Bedienung im Rechner

Sidebar → *Ljung-Box / ARCH-LM* → Eingabe wählen (Original, Differenz, Log-Renditen) → „Tests berechnen“.
Ergebnis: Automatische Empfehlung ob ARIMA und/oder GARCH sinnvoll ist.

4 ARIMA-Modelle

Definition 4.1 (ARIMA(p,d,q))**.** Eine Zeitreihe Y_t folgt einem ARIMA(p,d,q)-Prozess, wenn $W_t = \Delta^d Y_t$ einem stationären ARMA(p,q)-Prozess gehorcht:

$$\boxed{W_t = c + \sum_{i=1}^{p}\phi_i\, W_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q}\theta_j\,\varepsilon_{t-j}} \tag{6}$$

mit $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$.

Parameter	Name	Bedeutung
p	AR-Ordnung	Anzahl autoregressiver Lags
d	Integrationsordnung	Anzahl der Differenzierungen bis zur Stationarität
q	MA-Ordnung	Anzahl der gleitenden Durchschnittsterme
ϕ_i	AR-Koeffizienten	Gewichte der verzögerten Werte
θ_j	MA-Koeffizienten	Gewichte der verzögerten Fehlerterme
σ^2	Fehlervarianz	Varianz des Weißen Rauschens

4.1 Identifikation über ACF und PACF

Modell	ACF	PACF
AR(p)	Exponentiell abfallend	Abschnitt nach Lag p
MA(q)	Abschnitt nach Lag q	Exponentiell abfallend
ARMA(p, q)	Exponentiell abfallend	Exponentiell abfallend

4.2 Schätzung (OLS-Approximation)

Der Rechner schätzt den AR-Teil via OLS auf der differenzierten Reihe. Der MA-Teil wird in einer nachgelagerten Hilfsregression auf den Residuen approximiert:

$$W_t \approx c + \phi_1 W_{t-1} + \cdots + \phi_p W_{t-p} + \theta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} + \cdots + \theta_q \hat{\varepsilon}_{t-q} \tag{7}$$

4.3 Residuendiagnose

- **ACF der Residuen**: Alle Balken sollten im 95%-Konfidenzband $\pm 1{,}96/\sqrt{n}$ liegen.
- **Ljung-Box auf Residuen**: $Q_{LB} < \chi^2_{m;0,95}$ (keine verbleibende Autokorrelation).
- **Normalverteilung**: Histogramm annähernd glockenförmig; Schiefe ≈ 0, Kurtosis ≈ 0.

4.4 Auto-ARIMA

Der Rechner führt eine Grid-Suche über $p \in \{0, \ldots, 3\}$, $q \in \{0, \ldots, 3\}$ durch und wählt das Modell mit dem kleinsten AIC:

$$\mathrm{AIC} = -2\,\hat{\ell} + 2k, \quad k = p + q + d + 1 \tag{8}$$

4.5 Bedienung im Rechner

1. Sidebar → *ARIMA* → p, d, q einstellen (oder „Auto-ARIMA“ klicken).
2. „Schätzen“ → Gleichungsdarstellung, Gütemaße, Fit-Chart und Residuendiagnose erscheinen.
3. Residuen-ACF prüfen: Rote Balken außerhalb des Bands ⇒ p oder q erhöhen.

5 ARIMAX – ARIMA mit exogenen Variablen

Definition 5.1 (ARIMAX(p, d, q))**.** Erweiterung des ARIMA-Modells um einen Regressionsterm $\beta\, X_t$:

$$\boxed{\Delta^d Y_t = c + \sum_{i=1}^{p} \phi_i\, \Delta^d Y_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \theta_j\, \varepsilon_{t-j} + \beta\, \Delta^d X_t + \varepsilon_t} \tag{9}$$

- X_t: Exogene (erklärende) Variable – wird ebenfalls d-mal differenziert.
- β: Gibt den Einfluss einer Einheitsänderung in $\Delta^d X_t$ auf $\Delta^d Y_t$ an.
- **Anwendungen**: Inflation mit Zinssatz, BIP mit Staatsausgaben, Absatz mit Werbebudget.

5.1 Modellvergleich ARIMA vs. ARIMAX

Der Rechner berechnet automatisch die AIC-Verbesserung:

$$\Delta\text{AIC} = \text{AIC}_{\text{ARIMA}} - \text{AIC}_{\text{ARIMAX}} \tag{10}$$

$\Delta\text{AIC} > 2$: Exogene Variable trägt signifikant zur Erklärungskraft bei.

5.2 Bedienung im Rechner

1. Sidebar → *ARIMAX* → p, d, q und exogene Variable X auswählen.
2. „Schätzen“ → Gleichung mit β-Koeffizient, ΔAIC-Vergleich und 4 Charts erscheinen.
Hinweis: Y und X müssen dieselbe Länge haben; kürzere Reihe wird automatisch gekappt.

6 GARCH-Modelle

Finanzrenditen weisen oft *Volatilitätsclustering* auf: Phasen hoher Volatilität folgen auf hohe, Phasen ruhiger Volatilität auf ruhige. Dies verletzt die Annahme konstanter Varianz.

Definition 6.1 (GARCH(p, q))**.**

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t\, z_t, \quad z_t \sim \text{WN}(0, 1) \tag{11}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\, \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j\, \sigma_{t-j}^2 \tag{12}$$

wobei $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$.

Parameter	Name	Bedeutung
ω	Konstante	Langfristiges Varianz-Niveau
α_i	ARCH-Koeffizient	Kurzfristige Reaktion auf Schocks (ε^2)
β_j	GARCH-Koeffizient	Persistenz der Volatilität
$\alpha + \beta$	Persistenz	Nahe 1: sehr langlebige Volatilitätsclustering

6.1 Value-at-Risk (VaR)

$$\mathrm{VaR}_{95\%,t} = -1{,}645\,\hat{\sigma}_t \tag{13}$$

Interpretation: Mit 95 % Wahrscheinlichkeit liegt der Verlust in Periode t unter $\mathrm{VaR}_{95\%}$.

6.2 Halbwertszeit der Volatilität

$$t_{1/2} = \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(\alpha + \beta)} \tag{14}$$

6.3 Bedienung im Rechner

1. Sidebar → *GARCH* → p, q und Eingabetyp (Log-Renditen empfohlen für Finanzdaten).
2. „Schätzen“ → Varianzgleichung, bedingte Volatilität, VaR und Persistenz erscheinen.
Tipp: Erst ARCH-LM-Vortest durchführen, um sicherzustellen, dass GARCH überhaupt nötig ist.

7 Prognose und Konfidenzintervalle

Auf Basis des geschätzten ARIMA-Modells werden h-Schritte-Prognosen berechnet.

7.1 Punktprognose

Rekursive Vorwärtsprognose auf der differenzierten Reihe:

$$\hat{W}_{T+h|T} = \hat{c} + \hat{\phi}_1\,\hat{W}_{T+h-1|T} + \cdots + \hat{\phi}_p\,\hat{W}_{T+h-p|T} \tag{15}$$

(Für $h > 1$ werden Prognosen durch weitere Prognosen ersetzt, Fehlerterme $= 0$.)

Die Rücktransformation (Kumulieren der Differenzen) liefert die Prognose auf Originalskalenniveau:

$$\hat{Y}_{T+h} = Y_T + \sum_{s=1}^{h} \hat{W}_{T+s|T} \tag{16}$$

7.2 Konfidenzintervalle

Der h-Schritte-Prognosefehler wächst mit h:

$$\mathrm{SE}_h = \hat{\sigma}\sqrt{h} \tag{17}$$

Das Konfidenzband zum Niveau $(1-\alpha)$:

$$\hat{Y}_{T+h} \pm z_{1-\alpha/2}\,\mathrm{SE}_h \tag{18}$$

Verfügbare Niveaus: 80 % ($z = 1{,}282$), 90 % ($z = 1{,}645$), 95 % ($z = 1{,}960$).

8 Rolling Forecast und Out-of-Sample-Güte

8.1 Methodik

Beim Rolling-Window-Verfahren wird das Modell an jedem Zeitpunkt t neu auf einem gleitenden Fenster der Größe w geschätzt und ein Schritt voraus prognostiziert:

$$\hat{Y}_{t+1} = f\big(Y_{t-w+1}, \ldots, Y_t\big) \tag{19}$$

Dies vermeidet *Look-Ahead-Bias* und liefert eine realistische Einschätzung der Prognosequalität.

8.2 Gütemaße

Prognosegütemaße

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{T_{\text{test}}}\sum_{t}\big(Y_t - \hat{Y}_t\big)^2} \tag{20}$$

$$\mathrm{MAE} = \frac{1}{T_{\text{test}}}\sum_{t}\big|Y_t - \hat{Y}_t\big| \tag{21}$$

$$\mathrm{MAPE} = \frac{100}{T_{\text{test}}}\sum_{t}\left|\frac{Y_t - \hat{Y}_t}{Y_t}\right| \% \tag{22}$$

$$\mathrm{Bias} = \frac{1}{T_{\text{test}}}\sum_{t}\big(\hat{Y}_t - Y_t\big) \tag{23}$$

- **RMSE**: Bestraft große Einzelfehler stärker (durch Quadrierung).
- **MAE**: Robuster gegenüber Ausreißern; leichter interpretierbar.
- **MAPE**: Relativer Fehler in Prozent; skalenunabhängig.
- **Bias** > 0: Systematische Überschätzung; **Bias** < 0: Unterschätzung.

9 Modellvergleich: AIC und BIC

Informationskriterien

$$\text{AIC} = -2\,\hat{\ell} + 2k \tag{24}$$

$$\text{BIC} = -2\,\hat{\ell} + k\,\ln(n) \tag{25}$$

wobei $\hat{\ell}$ die maximale Log-Likelihood, k die Anzahl der freien Parameter und n die Stichprobengröße ist.

- **Optimal**: Modell mit dem *niedrigsten* AIC oder BIC.
- **BIC vs. AIC**: BIC bestraft Parameteranzahl stärker ($\ln n > 2$ für $n > 7$) und wählt sparsamere Modelle.
- **Faustregel**: $\Delta\text{AIC} > 2$ gilt als signifikante Verbesserung.

10 Kointegration (Engle-Granger)

Definition 10.1 (Kointegration). Zwei $I(1)$-Zeitreihen Y_t und X_t sind *kointegriert*, wenn eine Linearkombination $u_t = Y_t - \alpha - \beta X_t$ stationär ($I(0)$) ist.

10.1 Engle-Granger Zweischritt-Verfahren

Engle-Granger Testprozedur

Schritt 1: OLS-Regression

$$Y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\,X_t + \hat{u}_t \tag{26}$$

Schritt 2: ADF-Test auf die Residuen $\hat{u}_t$ (ohne Konstante):

$$\Delta\hat{u}_t = \gamma\,\hat{u}_{t-1} + \sum_{k=1}^{m} \delta_k\,\Delta\hat{u}_{t-k} + \varepsilon_t \tag{27}$$

Teststatistik: $\tau_{EG} = \hat{\gamma}/\text{SE}(\hat{\gamma})$

Signifikanzniveau	Kritischer Wert (MacKinnon 1991, $n \geq 100$)
1 %	−3,90
5 %	−3,34
10 %	−3,04

Wirtschaftliche Interpretation: Kointegrierte Reihen kehren nach Abweichungen zum gemeinsamen Gleichgewicht zurück. Dies ist die Grundlage für:

- **VECM** (Fehlerkorrekturmodell)
- **Pairs Trading** (statistische Arbitrage)

11 Granger-Kausalität

Definition 11.1 (Granger-Kausalität). X_t *Granger-verursacht* Y_t, wenn vergangene Werte von X die Prognose von Y (über die Information aus eigenen Lags hinaus) signifikant verbessern.

Wichtig

Granger-Kausalität bedeutet **prädiktive Nützlichkeit**, *nicht* echte Kausalität im philosophischen Sinne. Dritte Variablen können Scheinkausalität erzeugen.

11.1 F-Test

Granger F-Test nach Lag

$$\text{Restriktiertes Modell (AR):} \quad Y_t = c + \sum_{k=1}^{m} \phi_k Y_{t-k} + \varepsilon_t^r \tag{28}$$

$$\text{Unrestrikiertes Modell (VAR):} \quad Y_t = c + \sum_{k=1}^{m} \phi_k Y_{t-k} + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k X_{t-k} + \varepsilon_t^u \tag{29}$$

$$F = \frac{(\text{SSR}_r - \text{SSR}_u)/m}{\text{SSR}_u/(n-2m-1)} \sim F(m,\, n-2m-1) \tag{30}$$

H_0: $\gamma_1 = \cdots = \gamma_m = 0$ (keine Granger-Kausalität). Ablehnung bei $F > F_{krit}$.

12 VAR-Modelle

Definition 12.1 (VAR(p)-Modell). Ein Vektorautoregressives Modell der Ordnung p für einen k-dimensionalen Prozess $\mathbf{Y}_t = (Y_{1t}, \ldots, Y_{kt})'$:

$$\boxed{\mathbf{Y}_t = \mathbf{c} + \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{A}_p \mathbf{Y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t} \tag{31}$$

mit $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \text{WN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Jede Gleichung wird separat per OLS geschätzt (Effizienz bei identischen Regressoren). Das Modell enthält $k(1+kp)$ Parameter.

12.1 Lag-Wahl

Optimales Lag via AIC oder BIC:

$$\text{AIC}(p) = -2\hat{\ell} + 2k^2 p, \qquad \text{BIC}(p) = -2\hat{\ell} + k^2 p \ln(n) \tag{32}$$

12.2 Bedienung im Rechner

1. Sidebar → *VAR* → Variablen per Checkbox auswählen (min. 2).
2. Optional: „Optimales Lag (AIC/BIC)“ klicken → bestes p wird automatisch eingetragen.
3. „VAR schätzen“ → Koeffizientenmatrizen, Fit-Charts und Kreuzkorrelation erscheinen.

13 Durchgerechnetes Beispiel: Eurozone-Makrodaten

13.1 Datenbeschreibung

Wir verwenden die im Rechner enthaltenen Beispieldaten mit monatlicher Frequenz (2010–2024):

Variable	Mittelwert	Std.Abw.	Einheit
Inflation (Y)	3,08	1,71	% p.a.
EZB-Zinssatz (X)	1,04	1,52	%

Für die Rechenbeispiele werden 12 Beobachtungen (2020–2021) verwendet:

$$\mathbf{Y}_{\text{Infl}} = (1{,}5;\ 1{,}7;\ 2{,}0;\ 2{,}3;\ 2{,}8;\ 3{,}5;\ 4{,}2;\ 5{,}1;\ 5{,}8;\ 6{,}1;\ 5{,}5;\ 4{,}8)$$

$$\mathbf{X}_{\text{Zins}} = (0{,}0;\ 0{,}0;\ 0{,}0;\ 0{,}0;\ 0{,}0;\ 0{,}5;\ 1{,}5;\ 2{,}5;\ 3{,}5;\ 4{,}0;\ 4{,}0;\ 3{,}75)$$

13.2 Schritt 1: Einheitswurzeltest (ADF)

Beispiel: ADF-Test

Testgleichung: $\Delta Y_t = \alpha + \beta\, Y_{t-1} + \varepsilon_t$

OLS-Schätzung ergibt:

$$\hat{\beta} = -0{,}1194, \quad \text{SE}(\hat{\beta}) = 0{,}0915$$
$$\tau_{ADF} = \frac{-0{,}1194}{0{,}0915} = -1{,}305$$

Ergebnis: $\tau_{ADF} = -1{,}305 > -2{,}86$ (krit. 5 %) $\Rightarrow$ H_0 nicht abgelehnt.
Schluss: Die Inflationsreihe ist **nicht stationär** ($I(1)$) $\Rightarrow$ $d = 1$ empfohlen.

13.3 Schritt 2: ARIMA(1,1,0) schätzen

Beispiel: ARIMA Schätzung

Differenzierte Reihe: $W_t = \Delta Y_t$

Designmatrix (erste Differenzen, Lag 1):

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & W_1 \\ 1 & W_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & W_{10} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_{11} \end{pmatrix}$$

OLS-Schätzung $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$:

$$\hat{c} = -0{,}0925, \quad \hat{\phi}_1 = 1{,}0063$$

Modellgleichung: $\Delta Y_t = -0{,}0925 + 1{,}0063\,\Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$

Gütemaße:

RMSE	R^2	AIC	BIC
0,3655	0,6025	14,25	15,16

13.4 Schritt 3: ARIMAX(1,1,0) mit EZB-Zinssatz

Beispiel: ARIMAX Schätzung

Erweiterte Designmatrix mit ΔX_t (Änderung des Zinssatzes):

$$\hat{c} = -0{,}0877, \quad \hat{\phi}_1 = 0{,}6322, \quad \hat{\beta}_Z = 0{,}3862$$

Modellgleichung:

$$\Delta Y_t = -0{,}0877 + 0{,}6322\,\Delta Y_{t-1} + 0{,}3862\,\Delta X_t + \varepsilon_t$$

Interpretation: Eine Erhöhung des Zinssatzes um 1 Prozentpunkt geht mit einem Anstieg der Inflation um 0,39 Prozentpunkte einher (cet. par., gleichzeitig).

R^2	AIC	ΔAIC vs. ARIMA
0,6388	16,63	$-2{,}38$

$\Delta\text{AIC} = 14{,}25 - 16{,}63 = -2{,}38 < 0$: In diesem kleinen Beispiel ($n = 12$) verbessert der Zinssatz das AIC nicht. Bei größeren Stichproben ($n \geq 60$) ist der Effekt typischerweise positiv.

13.5 Schritt 4: GARCH(1,1) auf Log-Änderungen

Beispiel: GARCH Schätzung

Log-Änderungen der Inflation: $r_t = \ln(Y_t/Y_{t-1})$
Initialisierung: $\hat{\sigma}_0^2 = \mathrm{Var}(r_t)$
Parametervorgabe (iterative Momentenschätzung):

$$\hat{\omega} = 0{,}001331, \quad \hat{\alpha} = 0{,}15, \quad \hat{\beta} = 0{,}75$$

Varianzgleichung:

$$\hat{\sigma}_t^2 = 0{,}001331 + 0{,}15\, r_{t-1}^2 + 0{,}75\, \hat{\sigma}_{t-1}^2$$

Kenngrößen:

$$\text{Persistenz: } \hat{\alpha} + \hat{\beta} = 0{,}90$$
$$\text{Halbwertszeit: } t_{1/2} = \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}90} \approx 6{,}6 \text{ Perioden}$$
$$\text{Aktuelle Volatilität: } \hat{\sigma}_{12} = 0{,}1296$$
$$\text{VaR}_{95\%} : -1{,}645 \times 0{,}1296 = -0{,}2131$$

13.6 Schritt 5: Prognose (3 Schritte)

Beispiel: ARIMA Prognose

Letzter Differenzwert: $W_{11} = Y_{11} - Y_{10} = 4{,}8 - 5{,}5 = -0{,}7$
Rekursive Berechnung:

$$\hat{W}_{13} = -0{,}0925 + 1{,}0063 \times (-0{,}7) = -0{,}7969$$
$$\hat{Y}_{13} = 4{,}8 + (-0{,}7969) = 4{,}003$$

Schritt	Prognose	UG (95 %)	OG (95 %)
$t+1$	4,0031	3,2867	4,7196
$t+2$	3,1088	2,0956	4,1220
$t+3$	2,1163	0,8754	3,3573

Das Konfidenzband weitet sich mit $\hat{\sigma}\sqrt{h} = 0{,}3655\sqrt{h}$ aus.

13.7 Schritt 6: Granger-Kausalität (Lag 2)

Beispiel: Granger-Test Zinssatz → Inflation

Restriktiertes Modell (AR(2) auf Inflation): $\text{SSR}_r = 0{,}4772$
Unrestriktiertes Modell (AR(2) + 2 Lags Zinssatz): $\text{SSR}_u = 0{,}1491$

$$F = \frac{(0{,}4772 - 0{,}1491)/2}{0{,}1491/(10 - 2 \cdot 2 - 1)} = \frac{0{,}1641}{0{,}0298} = 5{,}50$$

Kritischer Wert: $F_{2,5;0,05} \approx 5{,}79$
$F = 5{,}50 < 5{,}79$ (5 %) – knapp nicht signifikant auf 5 %-Niveau, signifikant auf 10 %.
Vorsicht: Bei $n = 12$ ist die Teststärke gering. Mit größerer Stichprobe wäre der Zinssatz typischerweise ein signifikanter Granger-Verursacher der Inflation.

13.8 Schritt 7: Kointegration (Engle-Granger)

Beispiel: Kointegration Inflation ∼ Zinssatz

Schritt 1: OLS-Regression $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$:

$$\hat{\alpha} = 2{,}3013, \quad \hat{\beta} = 0{,}8954, \quad R^2 = 0{,}8852$$

Gleichgewichtsbeziehung:

$$\hat{Y}_t = 2{,}30 + 0{,}90\, X_t$$

Schritt 2: ADF auf Residuen $\hat{u}_t$:

$$\tau_{EG} = -0{,}9504$$

Krit. Wert (5 %): $-3{,}34$.
$\tau_{EG} = -0{,}95 > -3{,}34 \Rightarrow H_0$ nicht abgelehnt $\Rightarrow$ **keine Kointegration** auf 5 %-Niveau.
Hinweis: Trotz hohem $R^2 = 0{,}885$ liegt eine *Scheinregression* vor – ein klassisches Beispiel dafür, warum der Kointegrationstest unverzichtbar ist.

13.9 Schritt 8: VAR(1)-Modell

Beispiel: VAR-Modell

Gleichungssystem ($k = 2$, $p = 1$):

$$\hat{Y}_{1t} = -0{,}882 + 1{,}636\, Y_{1,t-1} - 0{,}796\, Y_{2,t-1}$$
$$\hat{Y}_{2t} = -1{,}465 + 0{,}796\, Y_{1,t-1} + 0{,}228\, Y_{2,t-1}$$

wobei Y_1 = Inflation und Y_2 = Zinssatz.

Interpretation Gleichung 1 (Inflation):

$\hat{\phi}_{11} = 1{,}636$: Starke Persistenz der Inflation.
$\hat{\phi}_{12} = -0{,}796$: Ein höherer Zinssatz dämpft die Inflation in der Folgeperiode.

Interpretation Gleichung 2 (Zinssatz):
$\hat{\phi}_{21} = 0{,}796$: Steigende Inflation erhöht den Zinssatz (Taylor-Regel-Effekt).

13 Schnellreferenz: Alle Module

Modul	Wofür	Sidebar
Einheitswurzel	Stationarität prüfen, d bestimmen	Voraussetzungen
Ljung-Box/ARCH	ARIMA/GARCH nötig?	Voraussetzungen
ARIMA	Univariate Modellierung und Prognose	Univariat
ARIMAX	ARIMA + exogene Einflussgröße	Univariat
GARCH	Volatilitätsmodellierung, VaR	Univariat
Prognose	h-Schritte-Prognose + Konfidenzband	Prognose & Bew.
Rolling Forecast	Out-of-Sample RMSE/MAE/MAPE	Prognose & Bew.
Modellwahl	AIC/BIC Grid-Suche über ARIMA-Ord.	Prognose & Bew.
Kointegration	Langfristige Gleichgewichtsbeziehung	Multivariat
Granger	Prädiktive Kausalität X $\rightarrow$ Y	Multivariat
VAR	Simultane Modellierung k Reihen	Multivariat