Statistik - 5. Verhältniszahlen / Indexzahlen - Wirtschaftsstatistik

Dr. Wolfgang Böhme

Januar 2012

Gliederung

- 1. Einführung
- 2. Deskriptive univariate Verteilungsanalyse
- 3. Deskriptive Korrelations- und Regressionsanalyse
- 4. Deskriptive Zeitreihenanalyse
- **5. Verhältniszahlen / Indexzahlen**
- 6. Einführung in ausgewählte multivariate Analysemethoden

- Statistiksoftware: SPSS

Verhältniszahlen / Indexzahlen - Gliederung

- **5.1 Wachstumszahlen**
- 5.2 Das harmonische Mittel
- 5.3 Preis- Mengen- und Wertindizes

Wachstumszahlen - Gliederung

- **5.1.1 einfache Wachstumszahlen**
- 5.1.2 geometrisches Mittel

einfache Wachstumszahlen

Ausgangspunkt: Gegeben sei die Zeitreihe $\{y_t,\ t = 1, 2, ..., n\}$.

$$\begin{aligned}
\textit{absoluterZuwachs} &- \Delta y_t = y_t - y_{t-1} \\
\textit{Wachstumsquote} &- q_t = \frac{y_t}{y_{t-1}} \\
\textit{Wachstumsrate} &- r_t = q_t - 1 = \frac{y_t}{y_{t-1}} - 1 = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} = \frac{\Delta y_t}{y_{t-1}} \\
\textit{approximativ} &- r_t \approx ln(y_t) - ln(y_{t-1}) = ln(\frac{y_t}{y_{t-1}})
\end{aligned}$$

Wachstumszahlen - Gliederung

- 5.1.1 einfache Wachstumszahlen
- **5.1.2 geometrisches Mittel**

Geometrisches Mittel

Definition : X sei ein mindestens verhältnisskaliertes Merkmal mit **nur positiven** Beobachtungen $\{x_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$. Die n-te Wurzel des Produktes ller Beobachtungen x_i heißt **geometrisches Mittel** - $\overline{x}_G$:

$$\overline{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Bemerkungen:

1. Logarithmus des geometrischen Mittels:

$$\begin{aligned} log(\overline{x}_G) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} log(x_i) \\ ln(\overline{x}_G) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ln(x_i) \end{aligned}$$

2. Durchschnittswert für nichtlineare Wachstumsprozesse
3. Berchnung von durchschnittlichen (mittleren) Wachstumsraten und -quoten

Durchschnittliche Wachstumszahlen

Ausgangspunkt: Gegeben sei die Zeitreihe $\{y_t,\ t = 1, 2, ..., n\}$.

1. **durchschnittlicher absoluter Zuwachs** - Δy

$$\Delta y = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\Delta y_t = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}(y_t - y_{t-1}) = \frac{y_n - y_1}{n-1}$$

2. **durchschnittliche Wachstumsquote** - q

$$q = \sqrt[n-1]{\prod_{t=2}^{n} q_t} = \sqrt[n-1]{\prod_{t=2}^{n}(1 + r_t)} = \sqrt[n-1]{\prod_{t=2}^{n}\frac{y_t}{y_{t-1}}} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}$$

3. **durchschnittliche Wachstumsrate** - r

$$r = q - 1 = (\left(\sqrt[n-1]{\prod_{t=2}^{n} q_t}\right) - 1 = \left(\sqrt[n-1]{\prod_{t=2}^{n}(1 + r_t)}\right) - 1 = \left(\sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}\right) - 1$$

Verhältniszahlen / Indexzahlen - Gliederung

- 5.2 Wachstumszahlen
- **5.2 Das harmonische Mittel**
- 5.3 Preis- Mengen- und Wertindizes

Das harmonische Mittel

Definition : X sei ein kardinales Merkmal mit **von Null verschiedenen** Beobachtungen $\{x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Das reziproke arithmetische Mittel aus den reziproken Einzelwerten $(\frac{1}{x_i})$ heißt **harmonisches Mittel** $\overline{x}_H$:

$$\overline{x}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

Das gewichtete reziproke arithmetische Mittel aus den reziproken von einander unterschiedlichen Merkmalswerten $(\frac{1}{\xi_i})$ heißt **gewogenes harmonisches Mittel** $\overline{x}_H$:

$$\overline{x}_H = \frac{\sum_{j=1}^{m} g_j}{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\xi_j} \cdot g_j}$$

g_j — *zu den Merkmalswerten ξ_j gehoerenden Gewichte*

mit $\sum_{j=1}^{m} g_j = 1$

Das gewogene arithmetische Mittel

Definition : X sei ein kardinales Merkmal mit **von Null verschiedenen** Beobachtungen $\{x_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$. Jede der Beobachtungen tritt mit einem Anteil von g_i auf.

Das gewichtete (gewogene) arithmetische Mittel aus den unterschiedlichen Merkmalswerten (x_i) heißt **gewogenes arithmetisches Mittel** $\overline{x}_H$:

$$\begin{aligned} \overline{x}_A &= \sum_{i=1}^{m} g_i \cdot x_i \\ g_i &- \textit{zu den Merkmalswerten } x_i \textit{ gehoerenden Gewichte} \\ \textit{mit} &\quad \sum_{i=1}^{m} g_i = 1 \end{aligned}$$

Das harmonische Mittel

Problemstellung:

Durchschnittsbildung von Verhältniszahlen mit Zusatzinformationen:

$$x = \frac{y}{z}$$

Zusatzinformation für

- Zähler y$\longrightarrow$ gewogenes harmonisches Mittel
- Nenner z$\longrightarrow$ gewogenes arithmetisches Mittel

Das harmonische Mittel - Beispiele

Geschwindigkeiten bei Zusatzinformation zur gefahren Zeit
Fährt man zwei Stunde mit 50 km/h und dann eine Stunde mit 100 km/h, so legt man insgesamt **200 km** in **3 Stunden** zurück; die Durchschnittsgeschwindigkeit berechnet sich als gewogenes arithmetische Mittel von 50 km/h und 100 km/h. Die Gewichte sind 2/3 und 1/3. Die Durchschnittsgeschwindigkeit berechnet sich folgendermaßen: 2/3 * 50 km/h + 1/3 * 100 km/h = 66 2/3 km/h.

Geschwindigkeiten bei Zusatzinformation zur gefahren Wegstrecke
Bezieht man sich hingegen nicht auf die benötigte Zeit, sondern auf die durchfahrene Strecke, so wird die Durchschnittsgeschwindigkeit durch das gewogene harmonische Mittel beschrieben: fährt man 100 km mit 50 km/h und dann 100 km mit 100 km/h, so legt man **200 km** in **3 Stunden** zurück, die Durchschnittsgeschwindigkeit ist 66 2/3 km/h, also das harmonische Mittel von 50 und 100.

Weitere Beispiele:

1. **Preise je Stück bei gegebener Umsatzinformation**
2. **Stückkosten bei gegebener Kosteninformation**

Verhältniszahlen / Indexzahlen - Gliederung

- 5.1 Wachstumszahlen
- 5.2 Das harmonische Mittel
- **5.3 Preis- Mengen- und Wertindizes**

Wachstumszahlen - Gliederung

- **5.3.1 Wertindizes**
- 5.3.2 Preis- und Mengenindex nach PAASCHE
- 5.3.3 Preis und Mengenindex nach LASPEYRES

Wertvolumen

Definition: Eine Menge $\Gamma = \{\gamma_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$ ausgewählter Güter und Leistungen γ_i heißt **Warenkorb**.

Definition: Für jedes Gut / Leistung γ_i eines Warenkorbes $\Gamma = \{\gamma_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$ werden Preis $P(\gamma_i) = p_i$ und Menge $Q(\gamma_i) = q_i$ statistisch erhoben und folgende Vektoren gebildet:

$$\begin{aligned} p^T &= (p_1, p_2, ..., p_n) \\ q^T &= (q_1, q_2, ..., q_n) \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt $p^T q$ heißt **Wertvolumen** des Warenkorbes Γ.

$$p^T q = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i = \sum_{i=1}^{n} w_i \ ,\ w_i \ \textit{Wert des Gutes } i$$

dynamische Messzahlen

Definition: Für jedes Gut / Leistung γ_i eines Warenkorbes $\Gamma = \{\gamma_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$ werden Preis $P(\gamma_i) = p_i$ und Menge $Q(\gamma_i) = q_i$ für einen Basiszeitpunkt t = 0 (p_{i0} bzw. q_{i0}) und für einen Berichtszeitraum t=1 (p_{i1} bzw. q_{i1})statistisch erhoben und folgende dynamische Verältniszahlen (Messzahlen) gebildet :

$$
\begin{aligned}
m_i^p &= \frac{p_{i1}}{p_{i0}} \Rightarrow \textit{Preismesszahl} \\
m_i^q &= \frac{q_{i1}}{q_{i0}} \Rightarrow \textit{Mengenmesszahl} \\
m_i^w &= \frac{p_{i1}\,q_{i1}}{p_{i0}\,q_{i0}} = \frac{w_{i1}}{w_{i1}} \Rightarrow \textit{Wertmesszahl}
\end{aligned}
$$

Wertindex

Definition: Für jedes Gut / Leistung γ_i eines Warenkorbes $\Gamma = \{\gamma_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$ werden Preis $P(\gamma_i) = p_i$ und Menge $Q(\gamma_i) = q_i$ für einen Basiszeitpunkt t = 0 (p_{i0} bzw. q_{i0}) und für einen Berichtszeitraum t=1 (p_{i1} bzw. q_{i1})statistisch erhoben. Die Verhältniszahl I^W heißt **dynamischer Wertindex** des Warenkorbes $\Gamma = \{\gamma_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$:

$$I^W = \frac{p_1^T \cdot q_1}{p_0^T \cdot q_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} w_{i0}} = \frac{W_1}{W_0}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \Delta^W &= W_1 - W_0 \ \Rightarrow\ \textit{Zuwachs} \\ r^W &= I^W - 1 \ \Rightarrow\ \textit{Zuwachsrate} \end{aligned}$$

Beispiel

Warenmenge und Preise von drei Gütern in zwei Jahren (t = 0,1)

(1) Menge in Stück:

Gut	t_0	t_1
A	6	8
B	12	10
C	6	7

(2) Preise in Euro / Stück:

Gut	t_0	t_1
A	2	3
B	6	8
C	5	6

Wachstumszahlen - Gliederung

- 5.3.1 Wertindizes
- **5.3.2 Preis- und Mengenindex nach PAASCHE**
- 5.3.3 Preis und Mengenindex nach LASPEYRES

Preis- und Mengenindex nach PAASCHE

Definition: Für jedes Gut / Leistung γ_i eines Warenkorbes $\Gamma = \{\gamma_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$ werden Preis $P(\gamma_i) = p_i$ und Menge $Q(\gamma_i) = q_i$ für einen Basiszeitpunkt t = 0 (p_{i0} bzw. q_{i0}) und für einen Berichtszeitraum t=1 (p_{i1} bzw. q_{i1})statistisch erhoben.

Die Verhältniszahl $I^{p,PAA}$ heißt **Preisindex nach PAASCHE** :

$$I^{p,PAA} = \frac{p_1^T \cdot q_1}{p_0^T \cdot q_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}}$$

Die Verhältniszahl $I^{q,PAA}$ heißt **Mengenindex nach PAASCHE** :

$$I^{q,PAA} = \frac{p_1^T \cdot q_1}{p_1^T \cdot q_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}}$$

Beispiel

Warenmenge und Preise von drei Gütern in zwei Jahren (t = 0,1)

(1) Menge in Stück:

Gut	t_0	t_1
A	6	8
B	12	10
C	6	7

(2) Preise in Euro / Stück:

Gut	t_0	t_1
A	2	3
B	6	8
C	5	6

Wachstumszahlen - Gliederung

- 5.3.1 Wertindizes
- 5.3.2 Preis- und Mengenindex nach PAASCHE
- **5.3.3 Preis und Mengenindex nach LASPEYRES**

Preis- und Mengenindex nach LASPEYRES

Definition: Für jedes Gut / Leistung γ_i eines Warenkorbes $\Gamma = \{\gamma_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$ werden Preis $P(\gamma_i) = p_i$ und Menge $Q(\gamma_i) = q_i$ für einen Basiszeitpunkt t = 0 (p_{i0} bzw. q_{i0}) und für einen Berichtszeitraum t=1 (p_{i1} bzw. q_{i1})statistisch erhoben.

Die Verhältniszahl $I^{p,LAS}$ heißt **Preisindex nach LASPEYRES** :

$$I^{p,LAS} = \frac{p_1^T \cdot q_0}{p_0^T \cdot q_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}$$

Die Verhältniszahl $I^{q,LAS}$ heißt **Mengenindex nach LASPEYRES** :

$$I^{q,LAS} = \frac{p_0^T \cdot q_1}{p_0^T \cdot q_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}$$

Preis- und Mengenindex nach LASPEYRES

Zusammenhang von Preisindex nach LASPEYRES und arithmetischem Mittel:

$$I^{p,LAS} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i^p a_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i0}} = \sum_{i=1}^{n} m_i^p a_{i0}$$

Zusammenhang von Mengenindex nach LASPEYRES und arithmetischem Mittel:

$$I^{q,LAS} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i^p a_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i0}} = \sum_{i=1}^{n} m_i^q a_{i0}$$

Bemerkung: a_{i0} - Gewichte, mit $\sum_{i=1}^{n} a_{i1} = 1$

Beispiel

Warenmenge und Preise von drei Gütern in zwei Jahren (t = 0,1)

(1) Menge in Stück:

Gut	t_0	t_1
A	6	8
B	12	10
C	6	7

(2) Preise in Euro / Stück:

Gut	t_0	t_1
A	2	3
B	6	8
C	5	6

Indexsysteme

Zusammenhang von Preisindex /Mengenindex nach PAASCHE / LASPEYRES und Wertindex:

$$I^W = I^{p,PAA} \cdot I^{q,LAS} = I^{q,PAA} \cdot I^{p,LAS}$$