Aufgabensammlung

Portfolio VaR Rechner 2

Zinssensitive Produkte in vier Währungsräumen

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Alle numerischen Aufgaben können mit dem Rechner `rechner2.html` und dem Datensatz `market_data_251days.csv` überprüft werden.

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

0 Inhaltsverzeichnis

1 Block A: Diskontierungsfaktoren und Log-Returns 2

2 Block B: Bewertung der Instrumente 3

3 Block C: Kovarianzmatrix und Risikofaktoren 5

4 Block D: VaR-Berechnung und Subadditivität 7

5 Block E: Rechner-Experimente 9

Formelblatt 11

1 Block A: Diskontierungsfaktoren und Log-Returns

Aufgabe 1 *E — Diskontierungsfaktor*

Gegeben sei der EUR Zero Rate für Laufzeit $t = 5$ Jahre:

$$r^{\text{EUR}}(5) = 3{,}50\,\%.$$

(a) Berechnen Sie den Diskontierungsfaktor $\text{DF}(5)$ ohne Credit Spread.

(b) Ein EUR-Bond hat Rating A. Der Credit Spread für 5 Jahre beträgt $s^{\text{A}}(5) = 0{,}80\,\%$. Berechnen Sie den spread-adjustierten Diskontierungsfaktor $\text{DF}^{\text{A}}(5)$.

(c) Wie viel Prozent tiefer liegt $\text{DF}^{\text{A}}(5)$ gegenüber $\text{DF}(5)$? Was bedeutet das ökonomisch?

Aufgabe 2 *E — Log-Return des Diskontierungsfaktors*

An zwei aufeinanderfolgenden Handelstagen werden folgende EUR Zero Rates für $t = 2$ Jahre beobachtet:

$$r^{\text{EUR}}_{\text{Mo}}(2) = 3{,}20\,\%, \qquad r^{\text{EUR}}_{\text{Di}}(2) = 3{,}35\,\%.$$

(a) Berechnen Sie $\text{DF}_{\text{Mo}}(2)$ und $\text{DF}_{\text{Di}}(2)$.

(b) Berechnen Sie den Log-Return $\ell = \ln(\text{DF}_{\text{Di}}(2)/\text{DF}_{\text{Mo}}(2))$.

(c) Zeigen Sie rechnerisch, dass gilt: $\ell \approx -t \cdot \Delta r = -2 \cdot 0{,}0015$. Wann ist diese Näherung exakt?

(d) Welches Vorzeichen hat ℓ, wenn Zinsen steigen? Was bedeutet das für einen Bond-Käufer?

Aufgabe 3 *M — Lineare Interpolation der Zinskurve*

Die EUR Zero Kurve hat folgende Stützstellen:

Tenor	1J	2J	5J	10J
Rate (%)	3,20	3,40	3,70	4,00

(a) Berechnen Sie durch lineare Interpolation die Zero Rates für $t = 3$ Jahre und $t = 4$ Jahre.

(b) Berechnen Sie DF(3) und DF(4) mit den interpolierten Raten.

(c) Ein Bond zahlt einen Kupon von 10.000 EUR bei $t = 3{,}5$ Jahren. Welche Rate verwenden Sie für die Diskontierung? Berechnen Sie den Barwert dieses einzelnen Cashflows.

(d) Was passiert bei $t = 0{,}5$ Jahren? Der Rechner verwendet konstante Extrapolation — begründen Sie, warum das eine vernünftige Vereinfachung ist.

2 Block B: Bewertung der Instrumente

Aufgabe 4 — *E — Bond-Bewertung*

Bewerten Sie folgenden EUR-Bond (ohne Credit Spread):

Nominal	100.000 EUR
Kupon	4,00 % p. a., jährlich
Laufzeit	3 Jahre

EUR Zero Rates: $r(1) = 3{,}20\,\%$, $r(2) = 3{,}40\,\%$, $r(3) = 3{,}55\,\%$.

(a) Listen Sie alle Cashflows mit Zahlungszeitpunkten auf.

(b) Berechnen Sie für jeden Cashflow den Barwert.

(c) Bestimmen Sie den Gesamtbarwert $\mathrm{PV}_{\mathrm{Bond}}$.

(d) Wie verändert sich $\mathrm{PV}_{\mathrm{Bond}}$, wenn alle Zero Rates um 50 bp steigen? Berechnen Sie die Veränderung und geben Sie die Duration (DV01) in EUR/bp an.

(e) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit dem Rechner.

Aufgabe 5 — *M — USD-Bond mit Credit Spread*

Ein USD-Bond mit Rating BBB soll in EUR bewertet werden.

Nominal	200.000 USD
Kupon	5,50 % p. a., halbjährlich
Laufzeit	5 Jahre
EUR/USD Spot	1,11

USD Zero Rates: $r^{\mathrm{USD}}(0{,}5) = 4{,}80\,\%$, $r^{\mathrm{USD}}(1) = 4{,}90\,\%$, $r^{\mathrm{USD}}(2) = 5{,}00\,\%$, $r^{\mathrm{USD}}(5) = 5{,}20\,\%$.
BBB Credit Spread: $s(1) = 1{,}20\,\%$, $s(5) = 1{,}80\,\%$.

(a) Wie viele Cashflows hat dieser Bond?

(b) Für welchen der 29 Risikofaktoren im Rechner ist dieser Bond sensitiv? Begründen Sie die Auswahl.

(c) Berechnen Sie den Barwert des ersten Kuponzahlungs-Cashflows (bei $t = 0{,}5$ Jahren) in EUR.

(d) Warum wird der Credit Spread auf die USD Zero Rate *addiert* und nicht separat behandelt? Welchen Vorteil bietet das für die Kovarianzmatrix?

Aufgabe 6 — *M — Festzinsswap*

Analysieren Sie einen EUR-Zahler-Swap:

Nominal	500.000 EUR
Fixed Rate	3,00 % p. a., jährlich
Laufzeit	5 Jahre

Aktuelle EUR Zero Rates: $r(1) = 3{,}20\,\%$, $r(2) = 3{,}40\,\%$, $r(3) = 3{,}55\,\%$, $r(5) = 3{,}70\,\%$.

(a) Der Rechner approximiert den Barwert des Float-Legs durch $\mathrm{PV}_{\text{float}} = N \cdot (1 - \mathrm{DF}(T))$. Erklären Sie, warum diese Formel gilt. (*Hinweis: Replikationsargument*)

(b) Berechnen Sie $\mathrm{PV}_{\text{float}}$.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{PV}_{\text{fixed}}$ (Barwert des festen Legs).

(d) Berechnen Sie $\mathrm{PV}_{\text{Swap}} = \mathrm{PV}_{\text{float}} - \mathrm{PV}_{\text{fixed}}$. Ist der Swap im Geld oder aus dem Geld? Begründen Sie anhand der Marktzinsen.

(e) Was wäre $\mathrm{PV}_{\text{Swap}}$, wenn der Swap *genau zum aktuellen Marktzins* abgeschlossen würde (At-the-money)?

Aufgabe 7 — *M — Cross-Currency-Swap*

Ein EUR/USD-CCS wird abgeschlossen:

Leg 1 (zahlen)	EUR, 1.000.000 EUR, 3,00 % p. a.
Leg 2 (empfangen)	USD, Rate 4,50 % p. a.
Laufzeit	3 Jahre, jährlich
EUR/USD Spot	1,11

(a) Wie hoch ist das USD-Nominal? Warum wird es so gewählt?

(b) Gegenüber welchen Risikofaktoren ist dieser CCS sensitiv? Nennen Sie alle relevanten Faktoren aus der 29er-Faktorliste.

(c) Der Rechner mappt Leg 1 auf EUR-Risikofaktoren und Leg 2 auf USD-Risikofaktoren. Warum kann die Off-Diagonal-Kovarianz $\Sigma_{\text{EUR,USD}}$ den VaR dieses CCS erheblich beeinflussen?

(d) Skizzieren Sie, in welcher Situation $\text{PV}_{\text{CCS}} > 0$ (aus Sicht des EUR-Zahlers).

Aufgabe 8 ***E — FX Forward***

Ein Unternehmen kauft GBP und verkauft EUR per Termin:

Nominal	300.000 GBP
Forward Rate	EUR/GBP = 0,870
Spot Rate	EUR/GBP = 0,878
Laufzeit	1 Jahr

GBP Zero Rate: $r^{\text{GBP}}(1) = 5{,}10\,\%$.

(a) Berechnen Sie PV_{FX} in EUR.

(b) Die Sensitivität des Rechners lautet $\delta^{\text{FX}} \approx N \cdot S_0 / S_{\text{CCY2/EUR}}$. Berechnen Sie δ^{FX} für dieses Geschäft.

(c) Auf welchen der drei FX-Faktoren (EUR/USD, EUR/GBP, EUR/CHF) wird dieses Forward gemappt?

(d) Erklären Sie intuitiv: Warum steigt PV_{FX}, wenn GBP gegenüber EUR aufwertet (EUR/GBP fällt)?

3 Block C: Kovarianzmatrix und Risikofaktoren

Aufgabe 9 ***E — Struktur der Kovarianzmatrix***

Der Rechner schätzt eine 29×29-Kovarianzmatrix aus 251 Log-Return-Beobachtungen.

(a) Wie viele unabhängige Parameter enthält eine symmetrische 29×29-Matrix? (*Hinweis: Diagonale + oberes Dreieck*)

(b) Das Verhältnis Beobachtungen/Parameter beträgt $251/29 \approx 8{,}7$. Warum ist ein höheres Verhältnis für eine stabile Schätzung besser? Was passiert wenn das Verhältnis < 1 ist?

(c) Nennen Sie drei Paare von Risikofaktoren, bei denen Sie eine *hohe* positive Korrelation erwarten, und begründen Sie.

(d) Nennen Sie ein Paar mit erwarteter *negativer* Korrelation und begründen Sie ökonomisch.

Aufgabe 10 — *M — Kovarianz und Korrelation*

Aus dem Rechner (Tab *Matrizen & Cashflows*) werden folgende Einträge der Kovarianzmatrix abgelesen (Werte $\times 10^{-8}$):

Faktoren i, j	$\Sigma_{ij} \times 10^8$
EUR_Zero_2Y / EUR_Zero_2Y (Varianz)	420
USD_Zero_2Y / USD_Zero_2Y (Varianz)	380
EUR_Zero_2Y / USD_Zero_2Y (Kovarianz)	290
EUR_Zero_2Y / EUR/USD (Kovarianz)	−35

(a) Berechnen Sie die Korrelation zwischen EUR_Zero_2Y und USD_Zero_2Y.

(b) Berechnen Sie die Korrelation zwischen EUR_Zero_2Y und EUR/USD. Was bedeutet das ökonomisch?

(c) Wie ändert sich der VaR eines EUR-Bonds, wenn die Korrelation zwischen EUR und USD Zinsen von $\rho = 0{,}7$ auf $\rho = 0{,}9$ steigt? Qualitative Antwort mit Begründung.

(d) Im Rechner werden Varianzen in Einheiten $\times 10^{-8}$ angezeigt. Was ist die Standardabweichung des Log-Returns für EUR_Zero_2Y in Prozent?

Aufgabe 11 — *S — Risikofaktor-Mapping*

Der Rechner ordnet jede Position dem *nächstgelegenen* Tenor in der Faktorliste zu.

(a) Ein Bond zahlt einen Kupon bei $t = 1{,}5$ Jahren. Auf welchen der fünf EUR-Tenors (0,25J, 1J, 2J, 5J, 10J) wird er gemappt?

(b) Zeigen Sie, dass durch dieses Mapping die Sensitivitäts-Matrix dünn besetzt ist (sparse): Ein Bond mit 4 Cashflows kann auf nur 3 verschiedene Faktoren mappen — warum?

(c) **Rho-Mapping als Alternative:** Statt dem nächsten Tenor könnte man linear auf zwei Nachbar-Tenors interpolieren. Für $t = 1{,}5$J mit Sensitivität $\delta = 1000$ wäre das:

$$\delta_{1\text{J}} = 1000 \cdot \frac{2 - 1{,}5}{2 - 1} = 500, \quad \delta_{2\text{J}} = 1000 \cdot \frac{1{,}5 - 1}{2 - 1} = 500.$$

Welchen Vorteil hätte dieses Vorgehen? Welche Bedingung muss die Interpolation erfüllen, damit der Gesamtbarwert erhalten bleibt?

(d) Ein Bond mit Rating A hat einen Cashflow bei $t = 3$ Jahren. Der Rechner mappt auf CS_A_5Y (nächstgelegener CS-Tenor ist 5J). Beschreiben Sie, in welche Richtung dieser Fehler den VaR verzerrt.

4 Block D: VaR-Berechnung und Subadditivität

Aufgabe 12 — *E — VaR-Grundrechnung*

Ein Portfolio besteht aus zwei Positionen mit folgenden Kennzahlen:

	Position A	**Position B**
Sensitivität δ	50.000	-30.000
Zugeordneter Faktor	EUR_Zero_5Y	EUR_Zero_5Y
Varianz σ^2 ($\times 10^{-8}$)	550	550

(a) Berechnen Sie den aggregierten Gewichtungsvektor $w = \delta_A + \delta_B$.

(b) Berechnen Sie $\sigma_P^2 = w^2 \cdot \sigma^2$.

(c) Berechnen Sie $\text{VaR}_{99\%} = z_{0{,}99} \cdot \sigma_P$ mit $z_{0{,}99} = 2{,}326$.

(d) Warum ist der VaR kleiner als $|\text{VaR}_A| + |\text{VaR}_B|$, obwohl beide Positionen auf denselben Risikofaktor mappen? (*Stichwort: natürliches Hedging*)

Aufgabe 13 — *M — Zwei-Faktor-Portfolio*

Ein Portfolio hat Sensitivitäten gegenüber zwei Risikofaktoren:

$$w_1 = 80.000 \text{ (EUR_Zero_5Y)}, \qquad w_2 = 60.000 \text{ (USD_Zero_5Y)}.$$

Die relevanten Einträge der Kovarianzmatrix ($\times 10^{-8}$):

$$\Sigma_{11} = 550, \quad \Sigma_{22} = 480, \quad \Sigma_{12} = 350.$$

(a) Berechnen Sie $\sigma_P^2 = w_1^2\Sigma_{11} + 2w_1w_2\Sigma_{12} + w_2^2\Sigma_{22}$.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{VaR}_P = z_{0,99} \cdot \sigma_P$.

(c) Berechnen Sie VaR_1 und VaR_2 aus den Diagonal-Einträgen.

(d) Berechnen Sie den Diversifikationseffekt: $\Delta\mathrm{VaR} = (\mathrm{VaR}_1 + \mathrm{VaR}_2) - \mathrm{VaR}_P$.

(e) Wie groß wäre VaR_P, wenn $\rho_{12} = 0$? Und wenn $\rho_{12} = 1$? Interpretieren Sie die Extremfälle.

Aufgabe 14 — *M — Subadditivität beweisen*

Zeigen Sie algebraisch für den Fall *zweier* Faktoren mit Varianzen σ_1^2, σ_2^2 und Korrelation $\rho \in [-1, 1]$:

$$\mathrm{VaR}_P = z_\alpha\sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + 2\rho w_1w_2\sigma_1\sigma_2 + w_2^2\sigma_2^2} \;\le\; z_\alpha(|w_1|\sigma_1 + |w_2|\sigma_2) = \mathrm{VaR}_1 + \mathrm{VaR}_2.$$

(a) Zeigen Sie zunächst: Es genügt zu zeigen, dass $A^2 \le (B + C)^2$ mit $A = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + 2\rho w_1w_2\sigma_1\sigma_2 + w_2^2\sigma_2^2}$, $B = |w_1|\sigma_1$, $C = |w_2|\sigma_2$.

(b) Zeigen Sie: $A^2 = B^2 + 2\rho\,\mathrm{sgn}(w_1w_2)\,BC + C^2$.

(c) Folgern Sie mithilfe von $\rho \le 1$ und $\mathrm{sgn}(w_1w_2) \le 1$, dass $A^2 \le (B+C)^2$.

(d) Wann gilt Gleichheit? Wann ist $\mathrm{VaR}_P = \mathrm{VaR}_1 + \mathrm{VaR}_2$?

Hinweis

Die Ungleichung $\sqrt{X} \le Y$ für $X, Y \ge 0$ ist äquivalent zu $X \le Y^2$. Nutzen Sie $\rho \le 1$ im entscheidenden Schritt.

Aufgabe 15 — *S — Diagonal-Block-Methodik*

Der Rechner berechnet Einzel-VaRs aus *denselben* Diagonal-Blöcken der globalen Matrix. Warum ist das für die Subadditivität entscheidend?

(a) Angenommen, der Einzel-VaR von Bonds wird aus einer *separaten*, tab-spezifischen Kovarianzmatrix $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{B}}$ berechnet, und der Portfolio-VaR aus der globalen $\boldsymbol{\Sigma}$. Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel, bei dem dann gilt: $\mathrm{VaR}_P > \mathrm{VaR}_{\mathrm{Bonds}} + \mathrm{VaR}_{\mathrm{Swaps}}$. (*Hinweis: Wählen Sie* $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_B$ *so, dass* VaR_{Bonds} *sehr klein, aber der entsprechende Block in* $\boldsymbol{\Sigma}$ *viel größer ist.*)

(b) Erklären Sie in eigenen Worten, warum die Verwendung *derselben* Matrix für alle VaRs die Subadditivität sicherstellt.

(c) Welche regulatorische Bedeutung hat Subadditivität? Warum ist ein Risikomaß, das Subadditivität verletzt, für Banken problematisch?

5 Block E: Rechner-Experimente

Aufgabe 16 — *E — Erster Start*

Starten Sie den Rechner mit den Standardwerten und laden Sie `market_data_251days.csv`.

(a) Notieren Sie die aktuellen EUR, USD, GBP und CHF Zero Rates für 5 Jahre (aus der letzten CSV-Zeile).

(b) Berechnen Sie alle vier Produkt-Tabs (Bonds, Swaps, CCS, FX). Notieren Sie für jeden Tab: Gesamt-PV, Einzel-VaRs und Gesamt-VaR (mit Korrelation).

(c) Berechnen Sie den Portfolio-VaR im Tab *Portfolio VaR*. Ist der Portfolio-VaR kleiner als die Summe der Tab-VaRs? Berechnen Sie den Diversifikationseffekt in Prozent.

(d) Wechseln Sie zum Tab *Matrizen & Cashflows*. Wie viele Positionen hat das Gesamtportfolio?

Aufgabe 17 — *M — Sensitivitätsanalyse*

Untersuchen Sie den Einfluss verschiedener Parameter auf den VaR.

(a) Laufzeit: Setzen Sie alle Bonds auf 1 Jahr Laufzeit. Berechnen Sie den Bond-VaR. Wiederholen Sie mit 10 Jahren. Erkläre den Unterschied anhand der Formel $\ell \approx -t \cdot \Delta r$.

(b) Rating: Ändern Sie Bond 1 von Rating A auf *kein Spread*. Wie verändert sich der Einzel-VaR? Warum kann er sich verändern, obwohl sich der PV kaum ändert?

(c) Währung: Ändern Sie Swap 2 von USD auf CHF. Verändert sich der Diversifikationseffekt zwischen Swaps? Warum?

(d) Gegenläufige Position: Fügen Sie einen zweiten Bond mit identischen Parametern wie Bond 1, aber negativem Vorzeichen (Leerverkauf: negativer Kupon) hinzu. Was erwarten Sie für den Gesamt-VaR? Überprüfen Sie mit dem Rechner.

Aufgabe 18 — *S — Matrixanalyse*

Exportieren Sie die globale Kovarianzmatrix als CSV (*Matrizen & Cashflows* → *Matrix als CSV exportieren*).

(a) Öffnen Sie die CSV in Excel oder Python. Berechnen Sie die *Korrelationsmatrix* aus der Kovarianzmatrix:

$$\rho_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii} \cdot \Sigma_{jj}}}.$$

(b) Identifizieren Sie die drei Risikofaktor-Paare mit der *höchsten* positiven Korrelation. Sind das die Paare, die Sie in Aufgabe 9c erwartet haben?

(c) Gibt es Paare mit negativer Korrelation? Welche, und wie lassen sie sich ökonomisch erklären?

(d) Berechnen Sie manuell den VaR eines Portfolios mit nur einem EUR-Bond (Nominal 100.000 EUR, Rating A, 5J) und vergleichen Sie mit dem Rechner-Ergebnis. (*Hinweis: Exportieren Sie auch die Cashflows als CSV.*)

Hinweis

Python-Code zur Korrelationsmatrix:

```
import pandas as pd, numpy as np
cov = pd.read_csv("kovarianzmatrix_29x29.csv",
                  index_col=0, sep=";",
                  skiprows=1)
std = np.sqrt(np.diag(cov.values))
corr = cov.values / np.outer(std, std)
```

5 Formelblatt

Größe	**Formel**
Diskontierungsfaktor	$\mathrm{DF}(t) = e^{-(r(t)+s(t))\,t}$
Lineare Interpolation	$r(t) = r(t_k)\,\frac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}-t_k} + r(t_{k+1})\,\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}$
Log-Return DF	$\ell(d) = \ln\!\big(\mathrm{DF}_d/\mathrm{DF}_{d-1}\big) \approx -t\cdot\Delta r$
Näherung (kleine Δr)	$\ell \approx -t\cdot\big[\Delta r(t) + \Delta s(t)\big]$
Bond-Barwert	$\mathrm{PV} = \frac{1}{S}\sum_j \mathrm{CF}_j\cdot\mathrm{DF}(t_j)$
Swap Float-Leg	$\mathrm{PV}_{\text{float}} = N\cdot(1-\mathrm{DF}(T))$
Sensitivität	$\delta_j = \partial\mathrm{PV}/\partial\mathrm{DF}(t_j) = \mathrm{CF}_j/S$
Kovarianzschätzer	$\Sigma_{ij} = \frac{1}{T-2}\sum_{d=1}^{T-1}(\ell_i(d)-\bar{\ell}_i)(\ell_j(d)-\bar{\ell}_j)$
Portfolio-Varianz	$\sigma_P^2 = \mathbf{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{w}$
VaR (Normalverteilung)	$\mathrm{VaR}_\alpha = z_\alpha\cdot\sigma_P$
Quantile	$z_{0{,}95} = 1{,}645, \quad z_{0{,}99} = 2{,}326$
Korrelation	$\rho_{ij} = \Sigma_{ij}/\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}$
Zwei-Faktor-Varianz	$\sigma_P^2 = w_1^2\sigma_1^2 + 2\rho w_1 w_2\sigma_1\sigma_2 + w_2^2\sigma_2^2$
Subadditivität	$\mathrm{VaR}_P \le \sum_k \mathrm{VaR}_k$
Diversifikationseffekt	$\Delta\mathrm{VaR} = \sum_k \mathrm{VaR}_k - \mathrm{VaR}_P \ge 0$

Risikofaktoren (Auswahl)	**Block**
EUR/USD/GBP/CHF_Zero_3M/1Y/2Y/5Y/10Y	Indizes 0–19
EUR/USD, EUR/GBP, EUR/CHF	Indizes 20–22
CreditSpread_A_1Y/5Y/10Y	Indizes 23–25
CreditSpread_BBB_1Y/5Y/10Y	Indizes 26–28