Options Risk Calculator

Technische Formelreferenz

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen: Diskontierung und Basiswerte **2**
1.1 Stetiger Diskontierfaktor . . . 2
1.2 Spot-Preis je Basiswert . . . 2
1.2.1 Zero-Coupon-Bond . . . 2

2 Preismodell 1: Black-Scholes (BS) **2**
2.1 Annahmen . . . 2
2.2 Hilfsgroessen d_1 und d_2 . . . 2
2.3 Optionspreise . . . 3
2.4 Greeks (Black-Scholes) . . . 3

3 Preismodell 2: Binomialbaum (CRR) **3**
3.1 Parametrisierung (Cox-Ross-Rubinstein) . . . 3
3.2 Rueckwaertsinduktion . . . 3
3.3 Greeks (Naeherung aus erstem/zweitem Baumschritt) . . . 4

4 Optionstypen und Payoffs **4**
4.1 Vanilla Call und Put . . . 4
4.2 Bull Call Spread ($K_1 < K_2$) . . . 4
4.3 Bear Put Spread ($K_1 < K_2$) . . . 4
4.4 Butterfly Spread ($K_1 < K_2 < K_3$, typischerweise $K_2 = \frac{K_1+K_3}{2}$) . . . 4

5 Risikomasse: VaR und Break-even **5**
5.1 Monte-Carlo-Simulation . . . 5
5.2 Value at Risk . . . 5
5.3 Break-even . . . 5

6 Durchgerechnetes Beispiel: FX-Option (EUR/USD), Call **5**
6.1 Eingabeparameter . . . 5
6.2 Schritt 1: Hilfsgroessen . . . 5
6.3 Schritt 2: Black-Scholes Preis . . . 6
6.4 Schritt 3: Greeks (Black-Scholes) . . . 6
6.5 Schritt 4: Binomialbaum (CRR, $N = 100$) . . . 6
6.6 Schritt 5: VaR (Monte Carlo, $N = 20\,000$) . . . 7
6.7 Schritt 6: P&L-Szenarien . . . 7

7 Output-Referenz **7**

Grundlagen: Diskontierung und Basiswerte

Stetiger Diskontierfaktor

Der Calculator verwendet durchgehend *Continuous Compounding*. Der risikolose Diskontierfaktor fuer Laufzeit T (in Jahren) und Zinssatz r:

$$B(0,T) = e^{-rT}$$

Dies ist konsistent mit Black-Scholes und dem CRR-Binomialbaum. Der Zinssatz r wird als stetig angesetzt – nicht als jaehrlich-diskret.

Spot-Preis je Basiswert

Basiswert	Spot S	Besonderheit
Aktie	Aktienkurs	—
Index	Indexstand	ohne Dividendenrendite
Devisen (FX)	Wechselkurs	Standard-BS (kein Fremdwaehrungszins)
Rohstoff	Kassapreis	—
Zero-Coupon-Bond	$S = N \cdot e^{-yT}$	N = Nennwert, y = Yield (stetig)

Zero-Coupon-Bond

Der faire Preis eines ZCB mit Nennwert N, Yield y (stetig) und Restlaufzeit T:

$$S_{\text{ZCB}} = N \cdot e^{-yT}$$

Dieser Wert wird als Spot-Preis S in Black-Scholes eingesetzt. σ bezeichnet die Preisvolatilitaet des Bonds.

Preismodell 1: Black-Scholes (BS)

Annahmen

- Geometrische Brownsche Bewegung: $dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dW_t$
- Konstante Volatilitaet σ und Zinssatz r
- Keine Dividenden (Standardformulierung)
- Europaeische Option (Ausuebung nur bei Faelligkeit)
- Keine Transaktionskosten; Leerverkaufe erlaubt

Hilfsgroessen d_1 und d_2

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$\Phi(\cdot)$ bezeichnet die kumulative Standardnormalverteilung, $\phi(\cdot)$ die Standardnormaldichte.

Optionspreise

$$C = S\,\Phi(d_1) - K\,e^{-rT}\,\Phi(d_2) \tag{1}$$

$$P = K\,e^{-rT}\,\Phi(-d_2) - S\,\Phi(-d_1) \tag{2}$$

Put-Call-Paritaet: $C - P = S - K\,e^{-rT}$.

Greeks (Black-Scholes)

Greek	Symbol	Call	Put
Delta	Δ	$\Phi(d_1)$	$\Phi(d_1) - 1$
Gamma	Γ	$\dfrac{\phi(d_1)}{S\,\sigma\sqrt{T}}$	
Theta	Θ	$-\dfrac{S\phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}\Phi(d_2)$	$-\dfrac{S\phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}\Phi(-d_2)$
Vega	ν	$S\,\phi(d_1)\,\sqrt{T}$	
Rho	ρ	$KTe^{-rT}\Phi(d_2)$	$-KTe^{-rT}\Phi(-d_2)$

Hinweis: Theta wird per Kalendertag ausgegeben (Division durch 365). Vega und Rho beziehen sich auf eine Aenderung von $+1\%$ absolut in σ bzw. r.

Preismodell 2: Binomialbaum (CRR)

Parametrisierung (Cox-Ross-Rubinstein)

Fuer N Schritte, Zeitschritt $\Delta t = T/N$:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \qquad d = \frac{1}{u}, \qquad p = \frac{e^{r\,\Delta t} - d}{u - d}$$

p ist die risikoneutrale Aufwaertswahrscheinlichkeit. Im Calculator gilt $N = 100$.

Rueckwaertsinduktion

Endknotenpreis mit i Abwaertsbewegungen: $S_{N,i} = S \cdot u^{N-i} \cdot d^{i}$. Endwert der Option:

$$V_{N,i} = \max(S_{N,i} - K,\ 0) \text{ (Call)}, \qquad V_{N,i} = \max(K - S_{N,i},\ 0) \text{ (Put)}$$

$$V_{j,i} = e^{-r\,\Delta t}\big[p \cdot V_{j+1,i} + (1-p) \cdot V_{j+1,i+1}\big]$$

Optionspreis: $V_{0,0}$.

Greeks (Naeherung aus erstem/zweitem Baumschritt)

$$\Delta \approx \frac{V_{1,0} - V_{1,1}}{S(u-d)}, \qquad \Gamma \approx \frac{V_{2,0} - 2V_{2,1} + V_{2,2}}{\left[\frac{1}{2}(Su^2 - Sd^2)\right]^2 / S}$$

Theta, Vega, Rho werden durch Black-Scholes-Approximation am Randknoten berechnet.

Optionstypen und Payoffs

Alle Spreads werden als Kombination von Vanilla-Optionen bewertet. Preis und Greeks sind additiv.

Vanilla Call und Put

Typ	Payoff bei Faelligkeit	Preis
Call	$\max(S_T - K,\ 0)$	$C(S, K, T, r, \sigma)$ gem. (1)
Put	$\max(K - S_T,\ 0)$	$P(S, K, T, r, \sigma)$ gem. (2)

Bull Call Spread ($K_1 < K_2$)

$$\text{Payoff} = \max(S_T - K_1, 0) - \max(S_T - K_2, 0)$$
$$\text{Preis} = C(S, K_1) - C(S, K_2)$$

Max. Gewinn: $K_2 - K_1 -$ Praemie. Max. Verlust: Praemie.

Bear Put Spread ($K_1 < K_2$)

$$\text{Payoff} = \max(K_2 - S_T, 0) - \max(K_1 - S_T, 0)$$
$$\text{Preis} = P(S, K_2) - P(S, K_1)$$

Butterfly Spread ($K_1 < K_2 < K_3$, typischerweise $K_2 = \frac{K_1+K_3}{2}$)

$$\text{Payoff} = \max(S_T - K_1, 0) - 2\,\max(S_T - K_2, 0) + \max(S_T - K_3, 0)$$
$$\text{Preis} = C(S, K_1) - 2\,C(S, K_2) + C(S, K_3)$$

Max. Gewinn bei $S_T = K_2$: $(K_2 - K_1) -$ Praemie.

Risikomasse: VaR und Break-even

Monte-Carlo-Simulation

Der Calculator simuliert $N = 20\,000$ Pfade:

$$S_T^{(k)} = S \cdot \exp\Big[\big(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\big)T + \sigma\sqrt{T}\,Z^{(k)}\Big], \quad Z^{(k)} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

P&L je Pfad: $\pi^{(k)} = \text{Payoff}(S_T^{(k)}) - \text{Praemie}$.

Value at Risk

Nach Sortierung $\pi^{(1)} \le \cdots \le \pi^{(N)}$:

$$\text{VaR}_{95\%} = -\pi^{(\lfloor 0.05\,N \rfloor)}, \qquad \text{VaR}_{99\%} = -\pi^{(\lfloor 0.01\,N \rfloor)}$$

Positiver VaR-Wert entspricht einem Verlust.

Break-even

Optionstyp	Break-even
Call (Vanilla)	$K_1 + \text{Praemie}$
Put (Vanilla)	$K_1 - \text{Praemie}$
Bull Call Spread	$K_1 + \text{Praemie}$
Bear Put Spread	$K_2 - \text{Praemie}$
Butterfly	K_2 (Naeherung)

Durchgerechnetes Beispiel: FX-Option (EUR/USD), Call

Eingabeparameter

Parameter	Symbol	Wert
Basiswert	—	EUR/USD
Optionstyp	—	Europaeischer Call
Spot	S	1.0800
Strike	K	1.0800 (at-the-money)
Volatilitaet	σ	8,00%
Zinssatz (stetig)	r	3,00%
Laufzeit	T	90 Tage = 90/365 = 0,24658 Jahre

Schritt 1: Hilfsgroessen

Diskontierfaktor:

$$e^{-rT} = e^{-0{,}03 \times 0{,}24658} = e^{-0{,}007397} = 0{,}99263$$

$$d_1 = \frac{\ln(1) + (0{,}03 + 0{,}0032) \times 0{,}24658}{0{,}08 \times 0{,}49657} = \frac{0{,}03320 \times 0{,}24658}{0{,}039726} = \frac{0{,}008187}{0{,}039726} = 0{,}2061$$

$$d_2 = 0{,}2061 - 0{,}08 \times 0{,}49657 = 0{,}2061 - 0{,}03973 = 0{,}1664$$

Normalverteilungswerte:

$$\Phi(0{,}2061) = 0{,}5817, \qquad \Phi(0{,}1664) = 0{,}5661$$

Schritt 2: Black-Scholes Preis

$$\begin{aligned} C_{\text{BS}} &= S\,\Phi(d_1) - K\,e^{-rT}\,\Phi(d_2) \\ &= 1{,}0800 \times 0{,}5817 - 1{,}0800 \times 0{,}99263 \times 0{,}5661 \\ &= 0{,}62824 - 0{,}60716 = \mathbf{0{,}02108} \end{aligned}$$

Preis: **0,0211 USD** pro 1 EUR Nennwert (ca. 211 USD fuer 10 000 EUR Lot).

Schritt 3: Greeks (Black-Scholes)

Normalverteilungsdichte: $\phi(0{,}2061) = 0{,}39130$

Greek	Berechnung	Ergebnis	Interpretation
Δ	$\Phi(0{,}2061)$	$+0{,}5817$	Preis $+0{,}582$ je $+1$ Spot
Γ	$\dfrac{0{,}39130}{1{,}08 \times 0{,}08 \times 0{,}49657}$	$+9{,}095$	Delta-Aenderung je $+1$
Θ	$-\dfrac{1{,}08 \times 0{,}39130 \times 0{,}08}{2 \times 0{,}49657} - 0{,}03 \times 1{,}08 \times 0{,}99263 \times 0{,}5661$	$-0{,}000456$	Verlust pro Tag
ν	$1{,}08 \times 0{,}39130 \times 0{,}49657$	$+0{,}2096$	Preis je $+1\%$ Vol
ρ	$\dfrac{1{,}08 \times 0{,}24658 \times 0{,}99263 \times 0{,}5661}{100}$	$+0{,}001490$	Preis je $+1\%$ Zins

Schritt 4: Binomialbaum (CRR, $N = 100$)

$$\Delta t = \frac{0{,}24658}{100} = 0{,}0024658, \qquad u = e^{0{,}08 \times \sqrt{0{,}0024658}} = e^{0{,}003973} = 1{,}003981$$

$$d = \frac{1}{1{,}003981} = 0{,}996035, \qquad p = \frac{e^{0{,}03 \times 0{,}0024658} - 0{,}996035}{1{,}003981 - 0{,}996035} = \frac{0{,}004039}{0{,}007946} = 0{,}50831$$

Rueckwaertsinduktion ueber 100 Schritte ergibt:

$$C_{\text{Bin}} \approx \mathbf{0{,}02107}$$

Abweichung zu BS: $< 0{,}005\%$ – erwartete Konvergenz des CRR-Baums bei $N = 100$.

Schritt 5: VaR (Monte Carlo, $N = 20\,000$)

Kennzahl	Ergebnis
$\text{VaR}_{95\%}$	0,0211 (Totalverlust der Praemie)
$\text{VaR}_{99\%}$	0,0211
Break-even	$1{,}0800 + 0{,}0211 = \mathbf{1{,}1011}$

Erklaerung: Eine ATM-Option verfaellt in ca. 42% der Pfade wertlos. Da der Verlust auf die Praemie begrenzt ist, entspricht der VaR dem Totalverlust.

Schritt 6: P&L-Szenarien

EUR/USD bei T	Δ Spot	Payoff	P&L netto	Return
0,7560	−30%	0,0000	−0,0211	−100,0%
0,8640	−20%	0,0000	−0,0211	−100,0%
0,9720	−10%	0,0000	−0,0211	−100,0%
1,0260	−5%	0,0000	−0,0211	−100,0%
1,0800	±0%	0,0000	−0,0211	−100,0%
1,1340	+5%	0,0540	+0,0329	+156,2%
1,1880	+10%	0,1080	+0,0869	+412,3%
1,2960	+20%	0,2160	+0,1949	+924,8%
1,4040	+30%	0,3240	+0,3029	+1437,0%

Output-Referenz

Output	Berechnung	Modell
Optionspreis	BS-Formel oder CRR-Baum	BS / Bin
e^{-rT} (Diskontierfaktor)	stetig, durchgehend	beide
Break-even	$K \pm$ Praemie	—
$\Delta, \Gamma, \Theta, \nu, \rho$	analytisch (BS) / numerisch (Bin)	beide
$\text{VaR}_{95\%/99\%}$	Monte Carlo, $N = 20\,000$	—
P&L-Szenarien	$\pm 5\%, 10\%, 20\%, 30\%$	—
CSV-Export	alle obigen Felder	—

Alle Formeln entsprechen der JavaScript-Implementierung in options-risk-calculator.html (v1.1). Abweichungen BS vs. Binomialbaum liegen bei $N = 100$ typischerweise unter 0,01%.