Aufgabensammlung

Bond Bewertungs- und Risikorechner

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Diskontierung **3**
1.1 Aufgabe 1.1: Einfache Diskontierung (Leicht) . . . 3
1.2 Aufgabe 1.2: Interpolation der Zinskurve (Mittel) . . . 3
1.3 Aufgabe 1.3: Mehrfache Diskontierung (Mittel) . . . 3

2 Fixed Rate Bonds **4**
2.1 Aufgabe 2.1: Basis-Bewertung (Leicht) . . . 4
2.2 Aufgabe 2.2: Halbjährliche Zahlungen (Mittel) . . . 4
2.3 Aufgabe 2.3: Stückzinsen (Mittel) . . . 5
2.4 Aufgabe 2.4: Sensitivität gegenüber Zinsänderungen (Schwer) . . . 5

3 Floating Rate Bonds **5**
3.1 Aufgabe 3.1: Forward Rate Berechnung (Mittel) . . . 5
3.2 Aufgabe 3.2: Floating Rate Bond Bewertung (Schwer) . . . 6
3.3 Aufgabe 3.3: Spread-Analyse (Mittel) . . . 6

4 Zero-Coupon Bonds **7**
4.1 Aufgabe 4.1: Basis-Bewertung (Leicht) . . . 7
4.2 Aufgabe 4.2: Yield-Berechnung (Mittel) . . . 7
4.3 Aufgabe 4.3: Vergleich mit Kupon-Bond (Schwer) . . . 7

5 Risikokennzahlen **8**
5.1 Aufgabe 5.1: Macaulay Duration (Mittel) . . . 8
5.2 Aufgabe 5.2: Modified Duration und Preisänderung (Schwer) . . . 8
5.3 Aufgabe 5.3: DV01 Portfolio (Schwer) . . . 8
5.4 Aufgabe 5.4: Konvexität (Schwer) . . . 9

6 Parametrischer Value at Risk **9**
6.1 Aufgabe 6.1: Basis VaR-Berechnung (Leicht) . . . 9
6.2 Aufgabe 6.2: VaR-Skalierung (Mittel) . . . 9
6.3 Aufgabe 6.3: VaR-Vergleich (Mittel) . . . 10
6.4 Aufgabe 6.4: VaR Portfolio (Schwer) . . . 10

7 Empirischer Portfolio-VaR **11**
7.1 Aufgabe 7.1: Returns-Berechnung (Leicht) . . . 11
7.2 Aufgabe 7.2: Kovarianz-Berechnung (Mittel) . . . 11
7.3 Aufgabe 7.3: DV01-Vektor (Mittel) . . . 11
7.4 Aufgabe 7.4: Portfolio-VaR mit Var-Cov-Matrix (Schwer) . . . 12
7.5 Aufgabe 7.5: Empirische vs. Parametrische Methode (Schwer) . . . 12

8 Integrierte Fallstudien **13**
8.1 Aufgabe 8.1: Anleihen-Portfolio (Sehr Schwer) . . . 13
8.2 Aufgabe 8.2: Risikomanagement-Entscheidung (Sehr Schwer) . . . 14

9 Lösungen **15**

Hinweise zur Bearbeitung

Diese Aufgabensammlung dient zur Vertiefung der Kenntnisse in der Bond-Bewertung und im Risikomanagement. Die Aufgaben sind nach Schwierigkeitsgrad und Themengebiet gegliedert:

- **Leicht:** Grundlegende Berechnungen mit gegebenen Formeln
- **Mittel:** Mehrstufige Berechnungen und Interpretationen
- **Schwer:** Komplexe Problemstellungen und Portfolio-Analysen

Empfohlene Hilfsmittel:

- Taschenrechner oder Excel/Python
- Formelsammlung aus der Dokumentation
- Bond-Rechner v3 zur Überprüfung

Hinweis: Alle Berechnungen verwenden kontinuierliche Diskontierung ($e^{-r \cdot t}$) sofern nicht anders angegeben.

1 Grundlagen der Diskontierung

1.1 Aufgabe 1.1: Einfache Diskontierung (Leicht)

Ein Bond zahlt in genau 3 Jahren einen Betrag von 1,000 EUR. Der Diskontierungszinssatz aus der Zinskurve beträgt konstant 4% p.a.

Gefragt:

a) Berechnen Sie den Diskontfaktor für 3 Jahre.

b) Berechnen Sie den Present Value dieser Zahlung.

c) Wie hoch wäre der Present Value bei einem Diskontierungszinssatz von 5%?

1.2 Aufgabe 1.2: Interpolation der Zinskurve (Mittel)

Gegeben ist folgende Zinskurve (Diskontierungszinssätze):

- 1 Jahr: 2.5%
- 3 Jahre: 3.5%

Gefragt:

a) Berechnen Sie den Diskontierungszinssatz für 2 Jahre mittels linearer Interpolation.

b) Berechnen Sie den Diskontfaktor für 2 Jahre.

c) Ein Cashflow von 500 EUR fällt in 2 Jahren an. Wie hoch ist sein Present Value?

1.3 Aufgabe 1.3: Mehrfache Diskontierung (Mittel)

Ein Investment zahlt:

- 100 EUR in 1 Jahr
- 150 EUR in 2 Jahren
- 200 EUR in 3 Jahren

Die Zinskurve (Diskontierungszinssätze) ist flach bei 3% p.a.

Gefragt:

a) Berechnen Sie den Present Value aller drei Zahlungen.

b) Wie ändert sich der Gesamt-PV, wenn alle Diskontierungszinssätze um 1% steigen?

c) Berechnen Sie die prozentuale Änderung des PV.

2 Fixed Rate Bonds

2.1 Aufgabe 2.1: Basis-Bewertung (Leicht)

Ein Fixed Rate Bond hat folgende Parameter:

- Nominalbetrag: 1,000,000 EUR
- Kupon: 4% p.a.
- Laufzeit: 3 Jahre
- Zahlungsfrequenz: jährlich
- Diskontierungszinssatz (Zinskurve): konstant 3.5%

Gefragt:

a) Wie hoch ist die jährliche Kuponzahlung?

b) Berechnen Sie den Present Value aller Kuponzahlungen.

c) Berechnen Sie den Present Value der Rückzahlung.

d) Wie hoch ist der Gesamt-Present-Value des Bonds?

e) Berechnen Sie die Clean Price in Prozent.

2.2 Aufgabe 2.2: Halbjährliche Zahlungen (Mittel)

Ein Corporate Bond hat folgende Eigenschaften:

- Nominalbetrag: 500,000 EUR
- Kupon: 5.5% p.a.
- Laufzeit: 4 Jahre
- Zahlungsfrequenz: halbjährlich
- Zinskurve: 0.5Y: 4%, 1Y: 4.2%, 2Y: 4.5%, 3Y: 4.7%, 4Y: 5%

Gefragt:

a) Wie viele Kuponzahlungen gibt es insgesamt?

b) Wie hoch ist jede einzelne Kuponzahlung?

c) Berechnen Sie den Zinssatz für 0.5 Jahre, 1.5 Jahre und 2.5 Jahre mittels linearer Interpolation.

d) Berechnen Sie die ersten drei diskontierten Kuponzahlungen.

e) Schätzen Sie den Gesamt-Present-Value (ohne vollständige Berechnung aller Terme).

2.3 Aufgabe 2.3: Stückzinsen (Mittel)

Ein Bond mit halbjährlichen Zahlungen hat:

- Kupon: 6% p.a.
- Nominalbetrag: 1,000,000 EUR
- Letzte Kuponzahlung war vor 45 Tagen

Gefragt:

a) Wie viele Tage hat eine Kuponperiode?

b) Berechnen Sie die Accrued Interest (Stückzinsen).

c) Wenn die Clean Price 102% beträgt, wie hoch ist die Dirty Price?

2.4 Aufgabe 2.4: Sensitivität gegenüber Zinsänderungen (Schwer)

Ein 5-jähriger Bond mit 4% Kupon (jährlich) und Nominalwert 1,000,000 EUR wird bei einem konstanten Diskontierungszinssatz von 4% bewertet.

Gefragt:

a) Berechnen Sie den Present Value bei r = 4%.

b) Berechnen Sie den Present Value bei r = 4.01% (Erhöhung um 1bp).

c) Berechnen Sie den Present Value bei r = 3.99% (Senkung um 1bp).

d) Berechnen Sie DV01 (Dollar Value of 01).

e) Berechnen Sie die Konvexität des Bonds.

f) Schätzen Sie die Preisänderung bei einer Zinserhöhung um 50bp mittels DV01.

3 Floating Rate Bonds

3.1 Aufgabe 3.1: Forward Rate Berechnung (Mittel)

Gegeben ist eine Zinskurve:

- 3 Monate (0.25Y): 2.0%
- 6 Monate (0.5Y): 2.2%

Gefragt:

a) Berechnen Sie den Diskontfaktor für 3 Monate.

b) Berechnen Sie den Diskontfaktor für 6 Monate.

c) Berechnen Sie die Forward Rate für die zweite Periode (von 3 bis 6 Monate).

d) Interpretieren Sie das Ergebnis: Ist die Forward Rate höher oder niedriger als der Spot Rate bei 6 Monaten?

3.2 Aufgabe 3.2: Floating Rate Bond Bewertung (Schwer)

Ein Floating Rate Bond hat folgende Parameter:

- Nominalbetrag: 2,000,000 EUR
- Spread: 100 Basispunkte (1%)
- Laufzeit: 2 Jahre
- Zahlungsfrequenz: vierteljährlich
- Zinskurve: 3M: 2.5%, 6M: 2.6%, 9M: 2.7%, 12M: 2.8%, 18M: 3.0%, 24M: 3.2%

Gefragt:

a) Wie viele Zahlungen gibt es insgesamt?

b) Berechnen Sie die Forward Rate für die erste Periode (0-3M).

c) Berechnen Sie die Forward Rate für die zweite Periode (3M-6M).

d) Berechnen Sie die Kuponzahlung für die erste Periode (Forward Rate + Spread).

e) Berechnen Sie die Kuponzahlung für die zweite Periode.

f) Berechnen Sie den Present Value der ersten beiden Kuponzahlungen.

g) Warum handelt dieser Bond vermutlich über oder unter Par?

3.3 Aufgabe 3.3: Spread-Analyse (Mittel)

Zwei Floating Rate Bonds mit identischen Parametern außer:

- Bond A: Spread = 50bp
- Bond B: Spread = 150bp

Beide Bonds haben einen Nominalwert von 1,000,000 EUR und eine Laufzeit von 3 Jahren mit halbjährlichen Zahlungen.

Gefragt:

a) Um wie viel EUR unterscheiden sich die Kuponzahlungen pro Periode?

b) Schätzen Sie den Unterschied im Present Value der beiden Bonds (qualitativ).

c) Welche Faktoren rechtfertigen einen höheren Spread?

4 Zero-Coupon Bonds

4.1 Aufgabe 4.1: Basis-Bewertung (Leicht)

Ein Zero-Coupon Bond hat:

- Nominalbetrag / Rückzahlung: 1,000,000 EUR
- Restlaufzeit: 5 Jahre
- Diskontierungszinssatz (Zinskurve): 3%

Gefragt:

a) Berechnen Sie den Present Value.

b) Berechnen Sie die Clean Price in Prozent.

c) Was ist die Dirty Price? Erklären Sie.

d) Wie hoch ist die Macaulay Duration?

e) Wie hoch ist die Modified Duration?

4.2 Aufgabe 4.2: Yield-Berechnung (Mittel)

Ein Zero-Coupon Bond mit 10 Jahren Restlaufzeit wird zu 74.08% des Nominalwerts gehandelt.

Gefragt:

a) Stellen Sie die Gleichung für den impliziten Diskontierungszinssatz (Yield) auf.

b) Lösen Sie die Gleichung: $0.7408 = e^{-r \cdot 10}$

c) Berechnen Sie den Yield (impliziten Diskontierungszinssatz).

d) Wie hoch wäre der Preis bei einem Diskontierungszinssatz von 4%?

4.3 Aufgabe 4.3: Vergleich mit Kupon-Bond (Schwer)

Gegeben sind zwei Bonds mit identischer Laufzeit von 5 Jahren und Nominalwert 1,000,000 EUR:

- Bond A: Zero-Coupon Bond
- Bond B: Fixed Rate Bond mit 5% Kupon (jährlich)

Beide werden mit dem gleichen Diskontierungszinssatz von 5% bewertet.

Gefragt:

a) Berechnen Sie den PV von Bond A.

b) Berechnen Sie den PV von Bond B.

c) Welcher Bond hat die höhere Duration? Begründen Sie ohne Rechnung.

d) Welcher Bond ist sensitiver gegenüber Zinsänderungen?

e) Berechnen Sie DV01 für beide Bonds.

5 Risikokennzahlen

5.1 Aufgabe 5.1: Macaulay Duration (Mittel)

Ein 3-jähriger Bond mit 6% Kupon (jährlich) und Nominalwert 1,000 EUR wird bei einem konstanten Diskontierungszinssatz von 5% bewertet.

Gefragt:

a) Berechnen Sie die drei Kuponzahlungen.

b) Berechnen Sie den Present Value jeder Zahlung (inkl. Rückzahlung).

c) Berechnen Sie den Gesamt-Present-Value.

d) Berechnen Sie die gewichteten Laufzeiten: $t_i \cdot PV_i$

e) Berechnen Sie die Macaulay Duration.

f) Interpretieren Sie das Ergebnis.

5.2 Aufgabe 5.2: Modified Duration und Preisänderung (Schwer)

Ein Bond hat folgende Kennzahlen:

- Present Value: 1,050,000 EUR
- Macaulay Duration: 4.5 Jahre
- Durchschnittlicher Diskontierungszinssatz: 4%
- Zahlungsfrequenz: halbjährlich

Gefragt:

a) Berechnen Sie die Modified Duration.

b) Schätzen Sie die Preisänderung bei einer Zinserhöhung um 50bp (0.5%) mittels Duration.

c) Berechnen Sie den neuen geschätzten Preis.

d) Erklären Sie, warum dies nur eine Approximation ist.

5.3 Aufgabe 5.3: DV01 Portfolio (Schwer)

Ein Portfolio besteht aus:

- 10 Mio EUR Bond A mit DV01 = 4,500 EUR
- 5 Mio EUR Bond B mit DV01 = 2,800 EUR
- 15 Mio EUR Bond C mit DV01 = 6,200 EUR

Gefragt:

a) Berechnen Sie das Portfolio-DV01.

b) Wie hoch ist der geschätzte Verlust bei einem parallelen Zinsanstieg um 25bp?

c) Wie viel EUR muss in einen Bond mit DV01 = 3,000 EUR investiert werden, um das Portfolio zu hedgen?

5.4 Aufgabe 5.4: Konvexität (Schwer)

Ein Bond wird bei r = 4% bewertet:

- $PV(r = 4.00\%) = 1{,}000{,}000$ EUR
- $PV(r = 4.01\%) = 999{,}550$ EUR
- $PV(r = 3.99\%) = 1{,}000{,}455$ EUR

Gefragt:

a) Berechnen Sie die Konvexität mittels der Formel.

b) Interpretieren Sie: Was bedeutet eine positive Konvexität?

c) Schätzen Sie die Preisänderung bei einer Zinserhöhung um 100bp, wenn Modified Duration = 7 Jahre ist.

d) Verbessern Sie die Schätzung unter Berücksichtigung der Konvexität.

6 Parametrischer Value at Risk

6.1 Aufgabe 6.1: Basis VaR-Berechnung (Leicht)

Ein Bond hat:

- DV01 = 5,000 EUR
- Tägliche Zinsvolatilität: 8 Basispunkte
- Konfidenzniveau: 95% ($z = 1.645$)
- Zeithorizont: 1 Tag

Gefragt:

a) Berechnen Sie den 1-Tages VaR.

b) Interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Wie ändert sich der VaR bei 99% Konfidenz ($z = 2.326$)?

6.2 Aufgabe 6.2: VaR-Skalierung (Mittel)

Gegeben:

- DV01 = 8,500 EUR
- Tägliche Volatilität: 10bp
- Konfidenzniveau: 95%
- Zeithorizont: 10 Tage

Gefragt:

a) Berechnen Sie die skalierte Volatilität für 10 Tage.

b) Berechnen Sie den 10-Tages VaR.

c) Warum wird VaR nicht einfach mit 10 multipliziert?

d) Berechnen Sie den VaR für 1 Monat (ca. 20 Handelstage).

6.3 Aufgabe 6.3: VaR-Vergleich (Mittel)

Zwei Bonds haben identischen PV von 10 Mio EUR, aber:

- Bond A: DV01 = 5,000 EUR, Duration = 5 Jahre
- Bond B: DV01 = 10,000 EUR, Duration = 10 Jahre

Bei identischer Volatilität von 8bp und 95% Konfidenz (1 Tag):
Gefragt:

a) Berechnen Sie VaR für beide Bonds.

b) Welcher Bond ist risikoreicher?

c) Erklären Sie den Zusammenhang zwischen Duration und VaR.

6.4 Aufgabe 6.4: VaR Portfolio (Schwer)

Ein Portfolio aus 3 Bonds (vereinfachte Annahme: perfekte Korrelation):

- Bond 1: DV01 = 4,000 EUR
- Bond 2: DV01 = 6,000 EUR
- Bond 3: DV01 = 5,000 EUR

Volatilität: 7bp, 95% Konfidenz, 5 Tage:
Gefragt:

a) Berechnen Sie das Portfolio-DV01.

b) Berechnen Sie die skalierte Volatilität.

c) Berechnen Sie den Portfolio-VaR.

d) Wie würde sich der VaR ändern, wenn die Korrelation nicht perfekt wäre? (qualitativ)

7 Empirischer Portfolio-VaR

7.1 Aufgabe 7.1: Returns-Berechnung (Leicht)

Historische Zinssätze für 2-jährige Laufzeit:

- Tag 1: 3.50%
- Tag 2: 3.48%
- Tag 3: 3.52%
- Tag 4: 3.49%

Gefragt:

a) Berechnen Sie die Returns (Differenzen) für Tag 2, 3 und 4.

b) Berechnen Sie den Mittelwert der Returns.

c) Berechnen Sie die Varianz der Returns.

d) Berechnen Sie die Standardabweichung (Volatilität) in Basispunkten.

7.2 Aufgabe 7.2: Kovarianz-Berechnung (Mittel)

Historische Returns für zwei Laufzeiten (3 Beobachtungen):

Tag	2Y Return	5Y Return
1	-0.02%	-0.015%
2	+0.04%	+0.03%
3	-0.01%	-0.008%

Gefragt:

a) Berechnen Sie den Mittelwert für beide Laufzeiten.

b) Berechnen Sie die Kovarianz zwischen 2Y und 5Y Returns.

c) Berechnen Sie die Standardabweichungen für beide.

d) Berechnen Sie die Korrelation zwischen den beiden Laufzeiten.

e) Interpretieren Sie die Korrelation.

7.3 Aufgabe 7.3: DV01-Vektor (Mittel)

Ein 5-jähriger Bond mit 4% Kupon (halbjährlich) soll bezüglich Key Rate Risks analysiert werden.

Die Zinskurve hat Stützstellen bei 0.5Y, 1Y, 2Y, 3Y, 5Y.

Berechnungen ergeben (bei r=3%):

- PV (Basis) = 1,047,000 EUR

- PV (0.5Y +1bp) = 1,046,850 EUR
- PV (1Y +1bp) = 1,046,700 EUR

Gefragt:

a) Berechnen Sie DV01 für die 0.5Y Laufzeit.

b) Berechnen Sie DV01 für die 1Y Laufzeit.

c) Welche Laufzeit hat den größeren Einfluss auf den Bond-Wert? Warum?

7.4 Aufgabe 7.4: Portfolio-VaR mit Var-Cov-Matrix (Schwer)

Ein Bond-Portfolio wird analysiert mit 3 Laufzeiten: 1Y, 3Y, 5Y.

Gegeben:

DV01-Vektor (in EUR):

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 500 \\ 1{,}200 \\ 800 \end{pmatrix}$$

Kovarianz-Matrix (in 10^{-6}):

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 9.0 & 7.5 & 5.0 \\ 7.5 & 8.0 & 6.5 \\ 5.0 & 6.5 & 7.0 \end{pmatrix}$$

Konfidenzniveau: 95% ($z = 1.645$), Horizont: 10 Tage

Gefragt:

a) Berechnen Sie $\mathbf{w}^T\mathbf{\Sigma}$ (Zeilenvektor).

b) Berechnen Sie $\mathbf{w}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}$ (Portfolio-Varianz, tägliche Basis).

c) Berechnen Sie die Portfolio-Standardabweichung (tägliche Basis).

d) Skalieren Sie auf 10 Tage.

e) Berechnen Sie den Portfolio-VaR.

f) Interpretieren Sie das Ergebnis.

7.5 Aufgabe 7.5: Empirische vs. Parametrische Methode (Schwer)

Ein Bond wird mit beiden VaR-Methoden bewertet:

Parametrisch:

- DV01 = 6,000 EUR
- Angenommene Volatilität: 10bp/Tag
- 95% Konfidenz, 5 Tage

Empirisch:

- Aus 250 historischen Tagen: $\sigma = 12$bp/Tag
- Kovarianz mit anderen Laufzeiten berücksichtigt
- Portfolio-Varianz = 0.000150 (nach Matrix-Multiplikation)
- 95% Konfidenz, 5 Tage

Gefragt:

a) Berechnen Sie den parametrischen VaR.

b) Berechnen Sie den empirischen VaR.

c) Vergleichen Sie beide Ergebnisse. Welche Methode ist konservativer?

d) Welche Methode ist in der Praxis zu bevorzugen und warum?

e) Nennen Sie Vor- und Nachteile beider Ansätze.

8 Integrierte Fallstudien

8.1 Aufgabe 8.1: Anleihen-Portfolio (Sehr Schwer)

Ein institutioneller Investor verwaltet ein Portfolio aus drei Bonds:

Bond A (Government):

- Nominal: 10 Mio EUR
- Typ: Fixed Rate, 3% Kupon, 5 Jahre, jährlich
- Zinskurve: flach bei 2.5%

Bond B (Corporate):

- Nominal: 5 Mio EUR
- Typ: Fixed Rate, 5% Kupon, 3 Jahre, halbjährlich
- Zinskurve: flach bei 4%

Bond C (Floating):

- Nominal: 8 Mio EUR
- Typ: Floating Rate, 120bp Spread, 4 Jahre, vierteljährlich
- Zinskurve: 3M: 2.5%, 1Y: 2.8%, 2Y: 3.0%, 3Y: 3.2%, 4Y: 3.4%

Gefragt:

a) Berechnen Sie den Present Value jedes Bonds (grobe Schätzung ausreichend).

b) Berechnen Sie den Gesamt-Portfolio-Wert.

c) Schätzen Sie die Duration für jeden Bond (qualitativ: kurz/mittel/lang).

d) Welcher Bond ist am sensitivsten gegenüber Zinsänderungen?

e) Bei einem DV01 von Bond A = 4,500 EUR, Bond B = 1,200 EUR, Bond C = 2,800 EUR: Berechnen Sie das Portfolio-DV01.

f) Schätzen Sie den Verlust bei einem parallelen Zinsanstieg um 50bp.

g) Welche Strategie würden Sie empfehlen, um das Zinsrisiko zu reduzieren?

8.2 Aufgabe 8.2: Risikomanagement-Entscheidung (Sehr Schwer)

Sie sind Risikomanager einer Bank. Ein Händler möchte folgendes Portfolio aufbauen:

- Long Position: 20 Mio EUR in 10-jährigen Government Bonds (DV01 = 9,000 EUR)
- Short Position: 15 Mio EUR in 2-jährigen Corporate Bonds (DV01 = 2,500 EUR)

Historische Volatilitäten:

- 10Y: 5bp/Tag
- 2Y: 8bp/Tag
- Korrelation: 0.7

Das VaR-Limit der Bank beträgt 100,000 EUR (95%, 10 Tage).
Gefragt:

a) Berechnen Sie das Netto-DV01 des Portfolios.

b) Ist das Portfolio long oder short Zinsen?

c) Schätzen Sie den parametrischen VaR (vereinfacht: gewichtete Durchschnitts-Volatilität).

d) Wird das VaR-Limit eingehalten?

e) Welche Anpassungen würden Sie vorschlagen?

f) Wie würde sich der VaR ändern, wenn die Korrelation nur 0.3 beträgt?

9 Lösungen

Lösung 1.1: Einfache Diskontierung

a) Diskontfaktor:

$$DF(3) = e^{-0.04 \cdot 3} = e^{-0.12} = 0.8869$$

b) Present Value:

$$PV = 1{,}000 \cdot 0.8869 = 886.90 \text{ EUR}$$

c) Present Value bei 5%:

$$DF(3) = e^{-0.05 \cdot 3} = e^{-0.15} = 0.8607$$

$$PV = 1{,}000 \cdot 0.8607 = 860.70 \text{ EUR}$$

Interpretation: Bei höheren Zinssätzen sinkt der Present Value.

Lösung 1.2: Interpolation der Zinskurve

a) Diskontierungszinssatz für 2 Jahre:

$$r(2) = 2.5\% + \frac{3.5\% - 2.5\%}{3 - 1} \cdot (2 - 1) = 2.5\% + 0.5\% = 3.0\%$$

b) Diskontfaktor:

$$DF(2) = e^{-0.03 \cdot 2} = e^{-0.06} = 0.9418$$

c) Present Value:

$$PV = 500 \cdot 0.9418 = 470.90 \text{ EUR}$$

Lösung 1.3: Mehrfache Diskontierung

a) Present Value bei 3%:

$$\begin{aligned} PV_1 &= 100 \cdot e^{-0.03 \cdot 1} = 97.04 \text{ EUR} \\ PV_2 &= 150 \cdot e^{-0.03 \cdot 2} = 141.27 \text{ EUR} \\ PV_3 &= 200 \cdot e^{-0.03 \cdot 3} = 177.38 \text{ EUR} \\ PV_{\text{total}} &= 415.69 \text{ EUR} \end{aligned}$$

b) Present Value bei 4%:

$$\begin{aligned} PV_1 &= 100 \cdot e^{-0.04 \cdot 1} = 96.08 \text{ EUR} \\ PV_2 &= 150 \cdot e^{-0.04 \cdot 2} = 138.45 \text{ EUR} \\ PV_3 &= 200 \cdot e^{-0.04 \cdot 3} = 176.70 \text{ EUR} \\ PV_{\text{total}} &= 411.23 \text{ EUR} \end{aligned}$$

c) Prozentuale Änderung:

$$\frac{411.23 - 415.69}{415.69} \cdot 100\% = -1.07\%$$

Interpretation: Eine Erhöhung der Diskontierungszinssätze um 1% führt zu einem Wertverlust von ca. 1%.

Lösung 2.1: Fixed Rate Bond Basis-Bewertung

a) Kuponzahlung:

$$C = \frac{1{,}000{,}000 \cdot 0.04}{1} = 40{,}000 \text{ EUR}$$

b) PV aller Kuponzahlungen:

$$\begin{aligned} PV_{\text{Kupons}} &= 40{,}000 \cdot e^{-0.035 \cdot 1} + 40{,}000 \cdot e^{-0.035 \cdot 2} + 40{,}000 \cdot e^{-0.035 \cdot 3} \\ &= 38{,}617 + 37{,}273 + 35{,}965 \\ &= 111{,}855 \text{ EUR} \end{aligned}$$

c) PV der Rückzahlung:

$$PV_{\text{Rückz}} = 1{,}000{,}000 \cdot e^{-0.035 \cdot 3} = 899{,}122 \text{ EUR}$$

d) Gesamt-PV:

$$PV_{\text{total}} = 111{,}855 + 899{,}122 = 1{,}010{,}977 \text{ EUR}$$

e) Clean Price:

$$\text{Clean Price} = \frac{1{,}010{,}977}{1{,}000{,}000} \cdot 100\% = 101.10\%$$

Interpretation: Der Bond handelt über Par (100%), da der Kupon (4%) höher als der Diskontierungszinssatz (3.5%) ist.

Lösung 2.2: Halbjährliche Zahlungen

a) Anzahl Zahlungen:

$$n = 4 \text{ Jahre} \times 2 = 8 \text{ Zahlungen}$$

b) Kuponzahlung:

$$C = \frac{500{,}000 \cdot 0.055}{2} = 13{,}750 \text{ EUR}$$

c) Interpolierte Zinssätze:

$$\begin{aligned} r(0.5) &= 4.0\% \text{ (gegeben)} \\ r(1.5) &= 4.2\% + \frac{4.5\% - 4.2\%}{2 - 1} \cdot 0.5 = 4.35\% \\ r(2.5) &= 4.5\% + \frac{4.7\% - 4.5\%}{3 - 2} \cdot 0.5 = 4.6\% \end{aligned}$$

d) Erste drei diskontierte Kuponzahlungen:

$$\begin{aligned} PV_1 &= 13{,}750 \cdot e^{-0.04 \cdot 0.5} = 13{,}479 \text{ EUR} \\ PV_2 &= 13{,}750 \cdot e^{-0.042 \cdot 1.0} = 13{,}186 \text{ EUR} \\ PV_3 &= 13{,}750 \cdot e^{-0.0435 \cdot 1.5} = 12{,}874 \text{ EUR} \end{aligned}$$

e) Schätzung Gesamt-PV:

Die 8 Kuponzahlungen summieren sich zu ca. 105,000 EUR (PV). Die Rückzahlung: $500{,}000 \cdot e^{-0.05 \cdot 4} \approx 409{,}365$ EUR Geschätzter Gesamt-PV: ca. 514,000 EUR

Interpretation: Der Bond handelt über Par (ca. 103%), da der Kupon (5.5%) höher als die Diskontierungszinssätze (4-5%) ist.

Lösung 2.3: Stückzinsen

a) Tage pro Periode:

$$d_{\text{Periode}} = \frac{365}{2} = 182.5 \text{ Tage}$$

b) Accrued Interest:

$$AI = \frac{1{,}000{,}000 \cdot 0.06}{2} \cdot \frac{45}{182.5} = 30{,}000 \cdot 0.2466 = 7{,}397 \text{ EUR}$$

c) Dirty Price:

$$\text{Dirty Price} = 102\% + \frac{7{,}397}{1{,}000{,}000} \cdot 100\% = 102.74\%$$

Lösung 2.4: Sensitivität gegenüber Zinsänderungen

a) PV bei r=4%:
Bei r=4% (Diskontierungszinssatz) und 4% Kupon handelt der Bond bei Par:

$$PV = 1{,}000{,}000 \text{ EUR}$$

b) PV bei r=4.01%:

$$\begin{aligned} PV^{+} &= \sum_{i=1}^{5} 40{,}000 \cdot e^{-0.0401 \cdot i} + 1{,}000{,}000 \cdot e^{-0.0401 \cdot 5} \\ &\approx 999{,}554 \text{ EUR} \end{aligned}$$

c) PV bei r=3.99%:

$$PV^{-} \approx 1{,}000{,}446 \text{ EUR}$$

d) DV01:

$$DV01 = -(PV^{+} - PV) = -(999{,}554 - 1{,}000{,}000) = 446 \text{ EUR}$$

e) Konvexität:

$$\text{Konvexität} = \frac{PV^{+} + PV^{-} - 2 \cdot PV}{PV \cdot (0.0001)^2} = \frac{999{,}554 + 1{,}000{,}446 - 2{,}000{,}000}{1{,}000{,}000 \cdot 0.00000001} = 0$$

(Konvexität ist sehr gering bei Par-Bond mit flacher Kurve)
f) Preisänderung bei +50bp:

$$\Delta PV \approx -DV01 \cdot 50 = -446 \cdot 50 = -22{,}300 \text{ EUR}$$

Neuer geschätzter Preis: 977,700 EUR

Lösung 3.1: Forward Rate Berechnung

a) DF für 3 Monate:

$$DF(0.25) = e^{-0.02 \cdot 0.25} = e^{-0.005} = 0.9950$$

b) DF für 6 Monate:

$$DF(0.5) = e^{-0.022 \cdot 0.5} = e^{-0.011} = 0.9891$$

c) Forward Rate:

$$f_2 = \frac{DF(0.25)/DF(0.5) - 1}{0.5 - 0.25} = \frac{0.9950/0.9891 - 1}{0.25} = \frac{1.00596 - 1}{0.25} = 0.0238 = 2.38\%$$

d) Interpretation:
Die Forward Rate (2.38%) ist höher als der Spot Rate bei 3M (2.0%) aber niedriger als bei 6M (2.2%). Dies spiegelt die steigende Zinsstruktur wider.

Lösung 3.2: Floating Rate Bond (gekürzt)

a) 8 Zahlungen (2 Jahre × 4)
b) Forward Rate Periode 1: $f_1 = 2.5\%$ (Spot Rate)
c) Forward Rate Periode 2:

$$f_2 = \frac{e^{-0.025 \cdot 0.25}/e^{-0.026 \cdot 0.5} - 1}{0.25} \approx 2.7\%$$

d) Kupon Periode 1:

$$C_1 = \frac{2{,}000{,}000 \cdot (0.025 + 0.01)}{4} = 17{,}500 \text{ EUR}$$

e) Kupon Periode 2:

$$C_2 = \frac{2{,}000{,}000 \cdot (0.027 + 0.01)}{4} = 18{,}500 \text{ EUR}$$

f) PV der ersten beiden:

$$\begin{aligned} PV &= 17{,}500 \cdot e^{-0.025 \cdot 0.25} + 18{,}500 \cdot e^{-0.026 \cdot 0.5} \\ &\approx 17{,}391 + 18{,}263 = 35{,}654 \text{ EUR} \end{aligned}$$

g) Der Bond handelt über Par, da der Spread (100bp) zusätzlich zu den Forward Rates gezahlt wird.

Lösung 4.1: Zero-Coupon Bond

a) Present Value:

$$PV = 1{,}000{,}000 \cdot e^{-0.03 \cdot 5} = 860{,}708 \text{ EUR}$$

b) Clean Price:

$$\text{Clean Price} = \frac{860{,}708}{1{,}000{,}000} \cdot 100\% = 86.07\%$$

c) Dirty Price:
Bei Zero-Coupon Bonds: Clean Price = Dirty Price = 86.07%, da keine Stückzinsen anfallen.

d) Macaulay Duration:
Bei Zero-Coupon Bonds entspricht die Duration der Laufzeit:

$$D_{\text{Mac}} = 5 \text{ Jahre}$$

e) Modified Duration:

$$D_{\text{Mod}} = \frac{5}{1 + 0.03} = 4.85 \text{ Jahre}$$

Lösung 4.2: Yield-Berechnung

a) Gleichung:

$$0.7408 = e^{-r \cdot 10}$$

b) Lösung:

$$\ln(0.7408) = -r \cdot 10$$
$$-0.3001 = -r \cdot 10$$
$$r = 0.03001 = 3.00\%$$

c) Der Yield (impliziter Diskontierungszinssatz) beträgt 3%.
d) Preis bei 4% Diskontierungszinssatz:

$$\text{Preis} = e^{-0.04 \cdot 10} = 0.6703 = 67.03\%$$

Lösung 5.1: Macaulay Duration

a) Kuponzahlungen: $C = 60$ EUR (jährlich für 3 Jahre)
b) Present Values:

$$PV_1 = 60 \cdot e^{-0.05 \cdot 1} = 57.07 \text{ EUR}$$
$$PV_2 = 60 \cdot e^{-0.05 \cdot 2} = 54.27 \text{ EUR}$$
$$PV_3 = 1{,}060 \cdot e^{-0.05 \cdot 3} = 913.03 \text{ EUR}$$

c) Gesamt-PV:

$$PV = 1{,}024.37 \text{ EUR}$$

d) Gewichtete Laufzeiten:

$$1 \cdot 57.07 = 57.07$$
$$2 \cdot 54.27 = 108.54$$
$$3 \cdot 913.03 = 2{,}739.09$$
$$\text{Summe: } = 2{,}904.70$$

e) Macaulay Duration:

$$D_{\text{Mac}} = \frac{2{,}904.70}{1{,}024.37} = 2.84 \text{ Jahre}$$

f) Interpretation:
Im Durchschnitt ist das Kapital für 2.84 Jahre gebunden. Dies ist kürzer als die Laufzeit von 3 Jahren, da Kuponzahlungen früher zurückfließen.

Lösung 6.1: Basis VaR

a) 1-Tages VaR:

$$VaR = 1.645 \cdot 0.0008 \cdot 10{,}000 \cdot 5{,}000 = 65{,}800 \text{ EUR}$$

b) Interpretation:
Mit 95% Wahrscheinlichkeit wird der Verlust an einem Tag nicht größer als 65,800 EUR sein.

c) VaR bei 99%:

$$VaR_{99} = 2.326 \cdot 0.0008 \cdot 10{,}000 \cdot 5{,}000 = 93{,}040 \text{ EUR}$$

Lösung 7.4: Portfolio-VaR mit Matrix (detailliert)

a) Berechne $\mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma}$:

$$\mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma} = (500 \quad 1{,}200 \quad 800) \begin{pmatrix} 9.0 & 7.5 & 5.0 \\ 7.5 & 8.0 & 6.5 \\ 5.0 & 6.5 & 7.0 \end{pmatrix}$$

Erste Komponente: $500 \cdot 9.0 + 1{,}200 \cdot 7.5 + 800 \cdot 5.0 = 4{,}500 + 9{,}000 + 4{,}000 = 17{,}500$
Zweite Komponente: $500 \cdot 7.5 + 1{,}200 \cdot 8.0 + 800 \cdot 6.5 = 3{,}750 + 9{,}600 + 5{,}200 = 18{,}550$
Dritte Komponente: $500 \cdot 5.0 + 1{,}200 \cdot 6.5 + 800 \cdot 7.0 = 2{,}500 + 7{,}800 + 5{,}600 = 15{,}900$

$$\mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma} = (17{,}500 \quad 18{,}550 \quad 15{,}900)$$

b) Berechne $\mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$:

$$\sigma_P^2 = 17{,}500 \cdot 500 + 18{,}550 \cdot 1{,}200 + 15{,}900 \cdot 800$$
$$= 8{,}750{,}000 + 22{,}260{,}000 + 12{,}720{,}000 = 43{,}730{,}000 \times 10^{-6}$$
$$= 0.04373$$

c) Portfolio-Standardabweichung:

$$\sigma_P = \sqrt{0.04373} = 0.2091$$

(Dies entspricht ca. 209bp oder 0.02091 in Dezimalform pro Tag)

d) Skalierung auf 10 Tage:

$$\sigma_{P,10} = 0.2091 \cdot \sqrt{\frac{10}{250}} = 0.2091 \cdot 0.2 = 0.04182$$

e) Portfolio-VaR:

$$VaR = 1.645 \cdot 0.04182 \cdot 10{,}000 = 687.95 \text{ EUR}$$

f) Interpretation:
Mit 95% Wahrscheinlichkeit wird der Verlust des Portfolios über 10 Tage nicht größer als 688 EUR sein. Dies berücksichtigt sowohl die individuellen Volatilitäten als auch die Korrelationen zwischen den Laufzeiten.

Lösung 2.3: Stückzinsen

a) Tage pro Periode:

$$d_{\text{Periode}} = \frac{365}{2} = 182.5 \text{ Tage}$$

b) Accrued Interest:

$$AI = \frac{1{,}000{,}000 \cdot 0.06}{2} \cdot \frac{45}{182.5} = 30{,}000 \cdot 0.2466 = 7{,}397 \text{ EUR}$$

c) Dirty Price:

$$\text{Dirty Price} = 102\% + \frac{7{,}397}{1{,}000{,}000} \cdot 100\% = 102.74\%$$

Lösung 3.3: Spread-Analyse

a) Unterschied in Kuponzahlungen:
Kupon pro Periode bei Bond A: $\frac{1{,}000{,}000 \cdot (f+0.005)}{2}$
Kupon pro Periode bei Bond B: $\frac{1{,}000{,}000 \cdot (f+0.015)}{2}$
Unterschied: $\frac{1{,}000{,}000 \cdot 0.01}{2} = 5{,}000$ EUR pro Periode

b) Unterschied im Present Value:
Bond B zahlt in jeder Periode 5,000 EUR mehr. Bei 6 Perioden über 3 Jahre und einem Diskontierungszinssatz von ca. 3%:

$$\Delta PV \approx 6 \cdot 5{,}000 \cdot e^{-0.03 \cdot 1.5} \approx 28{,}500 \text{ EUR}$$

Bond B ist ca. 28,500 EUR mehr wert.

c) Faktoren für höheren Spread:

- Höheres Kreditrisiko (niedrigere Bonität)
- Geringere Liquidität
- Längere Laufzeit
- Kleinerer Emittent
- Branchenspezifische Risiken

Lösung 4.3: Vergleich mit Kupon-Bond

a) PV von Bond A (Zero-Coupon):

$$PV_A = 1{,}000{,}000 \cdot e^{-0.05 \cdot 5} = 778{,}801 \text{ EUR}$$

b) PV von Bond B (5% Kupon):
Bei Kupon = Diskontierungszinssatz = 5% handelt der Bond bei Par:

$$PV_B = 1{,}000{,}000 \text{ EUR}$$

c) Höhere Duration:
Bond A hat die höhere Duration (5 Jahre), da:

- Zero-Coupon: Duration = Laufzeit = 5 Jahre
- Kupon-Bond: Duration ¡ Laufzeit, da Cashflows früher zurückfließen

d) Sensitivität:
Bond A ist sensitiver, da höhere Duration → höheres Zinsrisiko
e) DV01 Berechnung:
Bond A:

$$PV(5.01\%) = 1{,}000{,}000 \cdot e^{-0.0501 \cdot 5} = 778{,}412 \text{ EUR}$$
$$DV01_A = 778{,}801 - 778{,}412 = 389 \text{ EUR}$$

Bond B: Bei r=5%: PV = 1,000,000 EUR
Bei r=5.01%:

$$PV \approx 999{,}520 \text{ EUR}$$
$$DV01_B \approx 480 \text{ EUR}$$

Bond B hat trotz niedrigerer Duration einen höheren DV01, da der Nominalwert höher ist (1 Mio vs. 779k).

Lösung 5.2: Modified Duration und Preisänderung

a) Modified Duration:

$$D_{\text{Mod}} = \frac{4.5}{1 + 0.04} = \frac{4.5}{1.04} = 4.327 \text{ Jahre}$$

b) Preisänderung bei +50bp:

$$\Delta PV \approx -D_{\text{Mod}} \cdot \Delta r \cdot PV = -4.327 \cdot 0.005 \cdot 1{,}050{,}000$$
$$= -22{,}717 \text{ EUR}$$

c) Neuer geschätzter Preis:

$$PV_{\text{neu}} = 1{,}050{,}000 - 22{,}717 = 1{,}027{,}283 \text{ EUR}$$

d) Warum nur Approximation?
Die Duration-Approximation ist linear und ignoriert die Konvexität (Krümmung) der Preis-Zins-Beziehung. Bei größeren Zinsänderungen wird der Fehler signifikant. Die tatsächliche Preis-Zins-Beziehung ist konvex, was bedeutet:

- Bei Zinssenkung: tatsächlicher Gewinn ¿ Duration-Schätzung
- Bei Zinserhöhung: tatsächlicher Verlust ¡ Duration-Schätzung

Lösung 5.3: DV01 Portfolio

a) Portfolio-DV01:

$$DV01_{\text{Portfolio}} = 4{,}500 + 2{,}800 + 6{,}200 = 13{,}500 \text{ EUR}$$

b) Verlust bei +25bp:

$$\text{Verlust} = DV01 \cdot 25 = 13{,}500 \cdot 25 = 337{,}500 \text{ EUR}$$

c) Hedge-Betrag:
Um das Portfolio zu hedgen, brauchen wir:

$$DV01_{\text{Hedge}} = -13{,}500 \text{ EUR}$$

Bei einem Bond mit DV01 = 3,000 EUR per Million:

$$\text{Nominalbetrag} = \frac{-13{,}500}{3{,}000} \cdot 1{,}000{,}000 = -4{,}500{,}000 \text{ EUR}$$

Man muss 4.5 Mio EUR **short** gehen (verkaufen).

Lösung 5.4: Konvexität

a) Konvexität:

$$\begin{aligned}\text{Konvexität} &= \frac{PV^+ + PV^- - 2 \cdot PV}{PV \cdot (\Delta r)^2} \\ &= \frac{999{,}550 + 1{,}000{,}455 - 2{,}000{,}000}{1{,}000{,}000 \cdot (0.0001)^2} \\ &= \frac{5}{1{,}000{,}000 \cdot 0.00000001} = \frac{5}{0.00001} = 500{,}000\end{aligned}$$

b) Interpretation:
Positive Konvexität bedeutet:

- Die Preis-Zins-Kurve krümmt sich nach oben
- Bei Zinssenkung: Preis steigt stärker als Duration-Schätzung
- Bei Zinserhöhung: Preis fällt schwächer als Duration-Schätzung
- Dies ist vorteilhaft für den Bondholder

c) Schätzung mit Duration bei +100bp:

$$\Delta PV_{\text{Duration}} = -7 \cdot 0.01 \cdot 1{,}000{,}000 = -70{,}000 \text{ EUR}$$

d) Verbesserung mit Konvexität:

$$\Delta PV_{\text{Konvexität}} = \frac{1}{2} \cdot 500{,}000 \cdot (0.01)^2 \cdot 1{,}000{,}000 = 25{,}000 \text{ EUR}$$

$$\Delta PV_{\text{gesamt}} = -70{,}000 + 25{,}000 = -45{,}000 \text{ EUR}$$

Der tatsächliche Verlust ist nur 45,000 EUR statt 70,000 EUR – die Konvexität reduziert den Verlust.

Lösung 6.2: VaR-Skalierung

a) Skalierte Volatilität für 10 Tage:

$$\sigma_{10} = 10 \text{ bp} \cdot \sqrt{\frac{10}{250}} = 10 \cdot 0.2 = 2 \text{ bp}$$

b) 10-Tages VaR:

$$VaR_{10} = 1.645 \cdot 0.0002 \cdot 10{,}000 \cdot 8{,}500 = 27{,}965 \text{ EUR}$$

c) Warum nicht einfach $\times$ 10?
VaR skaliert mit der Quadratwurzel der Zeit, nicht linear:

$$VaR_t = VaR_1 \cdot \sqrt{t}$$

Dies liegt daran, dass:

- Volatilität mit $\sqrt{t}$ wächst (Random Walk)
- Positive und negative Bewegungen können sich teilweise aufheben
- Lineare Skalierung würde Risiko überschätzen

d) VaR für 1 Monat (20 Tage):

$$\sigma_{20} = 10 \text{ bp} \cdot \sqrt{\frac{20}{250}} = 10 \cdot \sqrt{0.08} = 2.828 \text{ bp}$$

$$VaR_{20} = 1.645 \cdot 0.00028828 \cdot 10{,}000 \cdot 8{,}500 = 40{,}239 \text{ EUR}$$

Lösung 6.3: VaR-Vergleich

a) VaR für beide Bonds:
Bond A:

$$VaR_A = 1.645 \cdot 0.0008 \cdot 10{,}000 \cdot 5{,}000 = 65{,}800 \text{ EUR}$$

Bond B:

$$VaR_B = 1.645 \cdot 0.0008 \cdot 10{,}000 \cdot 10{,}000 = 131{,}600 \text{ EUR}$$

b) Risikoreicher:
Bond B ist doppelt so risikoreich wie Bond A (VaR ist doppelt so hoch).
c) Zusammenhang Duration und VaR:

- Höhere Duration $\rightarrow$ höherer DV01 $\rightarrow$ höherer VaR
- Duration misst Zinssensitivität
- VaR quantifiziert das daraus resultierende Verlustrisiko
- Bei gleichem Nominalwert: VaR $\propto$ Duration

Lösung 6.4: VaR Portfolio

a) Portfolio-DV01:

$$DV01_P = 4{,}000 + 6{,}000 + 5{,}000 = 15{,}000 \text{ EUR}$$

b) Skalierte Volatilität:

$$\sigma_5 = 7 \text{ bp} \cdot \sqrt{\frac{5}{250}} = 7 \cdot \sqrt{0.02} = 0.9899 \text{ bp}$$

c) Portfolio-VaR:

$$VaR = 1.645 \cdot 0.000099 \cdot 10{,}000 \cdot 15{,}000 = 24{,}433 \text{ EUR}$$

d) Effekt unvollständiger Korrelation:
Bei unvollständiger Korrelation (z.B. $\rho = 0.7$) würde der VaR **sinken**:

- Diversifikationseffekt: nicht alle Bonds bewegen sich gleichzeitig
- Verluste kompensieren sich teilweise
- Portfolio-VaR ¡ Summe der Einzel-VaRs
- Je niedriger die Korrelation, desto stärker der Diversifikationseffekt

Bei perfekter Korrelation ($\rho = 1$) gibt es keinen Diversifikationseffekt.

Lösung 7.1: Returns-Berechnung

a) Returns:

$$\begin{aligned}
\Delta r_2 &= 3.48\% - 3.50\% = -0.02\% = -2 \text{ bp} \\
\Delta r_3 &= 3.52\% - 3.48\% = +0.04\% = +4 \text{ bp} \\
\Delta r_4 &= 3.49\% - 3.52\% = -0.03\% = -3 \text{ bp}
\end{aligned}$$

b) Mittelwert:

$$\overline{\Delta r} = \frac{-0.02 + 0.04 - 0.03}{3} = \frac{-0.01}{3} = -0.0033\% \approx -0.33 \text{ bp}$$

c) Varianz:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{3-1} \sum (\Delta r_i - \overline{\Delta r})^2 \\
&= \frac{1}{2}[(-0.02 + 0.0033)^2 + (0.04 + 0.0033)^2 + (-0.03 + 0.0033)^2] \\
&= \frac{1}{2}[0.000278 + 0.001878 + 0.000711] = 0.001434
\end{aligned}$$

d) Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{0.001434} = 0.0379\% = 3.79 \text{ bp}$$

Lösung 7.2: Kovarianz-Berechnung

a) Mittelwerte:

$$\overline{\Delta r_{2Y}} = \frac{-0.02 + 0.04 - 0.01}{3} = 0.0033\%$$
$$\overline{\Delta r_{5Y}} = \frac{-0.015 + 0.03 - 0.008}{3} = 0.0023\%$$

b) Kovarianz:

$$Cov(2Y, 5Y) = \frac{1}{2}[(-0.0233)(-0.0173) + (0.0367)(0.0277) + (-0.0133)(-0.0103)]$$
$$= \frac{1}{2}[0.000405 + 0.001015 + 0.000139] = 0.000779$$

c) Standardabweichungen:

$$\sigma_{2Y} = 0.0300\%$$
$$\sigma_{5Y} = 0.0226\%$$

d) Korrelation:

$$\rho = \frac{0.000779}{0.0300 \cdot 0.0226} = 0.988$$

e) Interpretation:
Die Korrelation von 0.988 zeigt: 2Y und 5Y Zinssätze bewegen sich fast immer gemeinsam. Typisch für benachbarte Laufzeiten – geringe Diversifikation.

Lösung 7.3: DV01-Vektor

a) DV01 für 0.5Y:

$$DV01_{0.5Y} = 1{,}047{,}000 - 1{,}046{,}850 = 150 \text{ EUR}$$

b) DV01 für 1Y:

$$DV01_{1Y} = 1{,}047{,}000 - 1{,}046{,}700 = 300 \text{ EUR}$$

c) Größerer Einfluss:
Die 1Y Laufzeit (DV01 = 300 EUR) hat größeren Einfluss, da bei einem 5-jährigen Bond mehr Cashflows von der 1Y-Rate betroffen sind.

Lösung 7.5: Empirische vs. Parametrische Methode

a) Parametrischer VaR:

$$\sigma_5 = 10 \cdot \sqrt{5/250} = 1.414 \text{ bp}$$

$$VaR_{\text{param}} = 1.645 \cdot 0.00001414 \cdot 10{,}000 \cdot 6{,}000 = 13{,}961 \text{ EUR}$$

b) Empirischer VaR:
Portfolio-Standardabweichung (täglich): $\sqrt{0.000150} = 0.01225 = 122.5$ bp

Skaliert auf 5 Tage:

$$\sigma_5 = 122.5 \cdot \sqrt{5/250} = 17.32 \text{ bp}$$

$$VaR_{\text{emp}} = 1.645 \cdot 0.0001732 \cdot 10{,}000 = 28{,}491 \text{ EUR}$$

c) Vergleich:
Empirische Methode ist konservativer (28,491 EUR vs. 13,961 EUR).

d) Bevorzugte Methode:
Empirische Methode bevorzugt: Basiert auf tatsächlichen Marktdaten, erfasst reale Volatilitäten und Korrelationen, keine Normalverteilungs-Annahme.

e) Vor- und Nachteile:
Parametrisch: Einfach, wenig Daten nötig, aber Normalverteilungs-Annahme oft verletzt.

Empirisch: Keine Annahmen, realistisch, aber benötigt viele Daten (250+ Tage) und Vergangenheit $\neq$ Zukunft.

Lösung 8.1: Anleihen-Portfolio

a-b) Present Values:
Bond A (10M, 3% Kupon, r=2.5%): $\approx$ 10,220,000 EUR
Bond B (5M, 5% Kupon, r=4%): $\approx$ 5,140,000 EUR
Bond C (8M, Floating+120bp): $\approx$ 8,080,000 EUR
Gesamt: 23,440,000 EUR
c) Duration: A: mittel (4.5J), B: kurz (2.7J), C: sehr kurz (0.5J)
d) Bond A am sensitivsten (höchste Duration)
e) Portfolio-DV01 = 8,500 EUR
f) Verlust bei +50bp: 425,000 EUR
g) Strategien:

- Duration Matching durch Verkauf von Bond A
- Interest Rate Swaps (Pay-fixed)
- Short-Position in Bond-Futures
- Umschichtung zu mehr Floating Rate

Lösung 8.2: Risikomanagement-Entscheidung

a) Netto-DV01: 9,000 - 2,500 = 6,500 EUR
b) Portfolio ist **long Zinsen** (positives DV01)
c) VaR (vereinfacht):
Gewichtete Volatilität: 5.65 bp
10-Tages VaR: 12,088 EUR
d) Ja, Limit eingehalten (12,088 ¡ 100,000 EUR)
e) Anpassungen:
Beachte Basis-Risiko (10Y Gov vs. 2Y Corp), Spread-Risiko und Liquiditätsrisiko. Besseres Matching mit 10Y Instrumenten oder Erhöhung der Short-Position auf DV01=9,000 EUR.
f) Bei $\rho = 0.3$:

VaR würde **sinken** auf ca. 8,000-9,000 EUR (stärkerer Diversifikationseffekt bei niedrigerer Korrelation).

Wichtige Formeln zur Wiederholung:

- Diskontfaktor: $DF(t) = e^{-r(t)\cdot t}$
- Present Value: $PV = \sum C_i \cdot DF(t_i) + N \cdot DF(t_n)$
- Forward Rate: $f = \frac{DF(t_{i-1})/DF(t_i)-1}{t_i - t_{i-1}}$
- DV01: $DV01 = -(PV_{r+1bp} - PV_r)$
- Parametrischer VaR: $VaR = z_\alpha \cdot \sigma \cdot \sqrt{h/250} \cdot 10{,}000 \cdot |DV01|$
- Portfolio-VaR: $VaR = z_\alpha \cdot \sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{w}} \cdot \sqrt{h/250} \cdot 10{,}000$

Schlussbemerkung

Diese Aufgabensammlung deckt die wichtigsten Aspekte der Bond-Bewertung und des Risikomanagements ab. Für tiefere Einblicke empfehlen wir:

- Die mathematische Dokumentation des Bond-Rechners v3
- Praktische Übungen mit dem Bond-Rechner v3
- Fachliteratur zu Fixed Income und Risikomanagement

Bei Fragen oder Unklarheiten stehen die begleitenden Dokumentationen zur Verfügung.