# Forward Swap VaR Rechner

Mathematische Grundlagen

Forward Starting Swaps, historische Zeitreihen

Deutsch

**Wolfgang Böhme**

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

7. November 2026

---

Modelle und Formeln des Rechners `forward-swap-calculator.html`:
Zinskurve, Bewertung, Sensitivitäten und parametrischer Value at Risk.

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

# Inhaltsverzeichnis

**1 Überblick** **2**
1.1 Notation . . . 2

**2 Zinskurve** **2**
2.1 Zero-Rates und Discount Factors . . . 2
2.2 Interpolation der aktuellen Kurve . . . 3
2.3 Interpolation der historischen Kurven . . . 3

**3 Bewertung des Forward Starting Swaps** **3**
3.1 Zahlungsplan . . . 3
3.2 Forward Rates . . . 3
3.3 Cashflows und Barwert . . . 4
3.4 Geschlossene Darstellung . . . 4

**4 Sensitivitäten** **4**
4.1 DV01 . . . 4
4.2 Modified Duration . . . 5
4.3 Konvexität . . . 5

**5 Value at Risk** **5**
5.1 Historische Discount-Factor-Zeitreihen . . . 5
5.2 Log-Returns . . . 5
5.3 Kovarianz- und Korrelationsmatrix . . . 6
5.4 Sensitivitätsvektor . . . 6
5.5 Portfolio-Varianz und VaR . . . 6
5.6 Inverse Normalverteilung . . . 7

**6 Modellannahmen und Grenzen** **7**
6.1 Annahmen . . . 7
6.2 Vergleich mit festgehaltenen Netto-Cashflows . . . 7
6.3 Weitere Punkte . . . 7

**7 Zuordnung Formel – Code** **8**

# 1 Überblick

Der Rechner bewertet einen *Forward Starting Interest Rate Swap* und berechnet dessen Marktrisiko. Betrachtet wird ein **Payer Swap**: Der Inhaber zahlt den festen Zins $K$ und empfängt den variablen Zins. Der Swap beginnt zum Zeitpunkt $T_0$ (Forward Start) und läuft $T$ Jahre.

Der Rechenablauf gliedert sich in fünf Schritte (Abbildung 1):

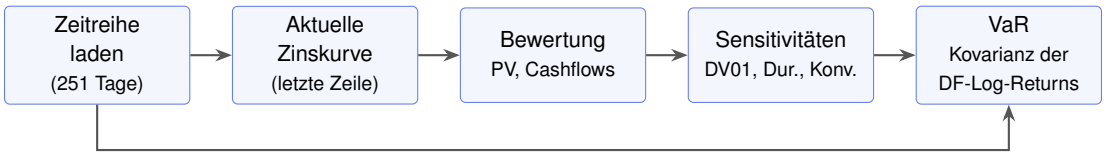



Abbildung 1: Rechenablauf des Forward Swap VaR Rechners

## 1.1 Notation

| Symbol | Bedeutung | Code |
|---|---|---|
| $N$ | Nominalbetrag in EUR | `notional` |
| $K$ | fester Zinssatz (dezimal, p. a.) | `fixedRate` |
| $T_0$ | Forward Start in Jahren | `forwardStart` |
| $T$ | Laufzeit (Tenor) in Jahren | `tenor` |
| $f$ | Zahlungsfrequenz pro Jahr $(1, 2, 4)$ | `frequency` |
| $\delta = 1/f$ | Länge einer Zinsperiode in Jahren | `paymentInterval` |
| $n$ | Anzahl der Zahlungen | `nPayments` |
| $t_i$ | Zahlungstermine, $i = 1, \ldots, n$ | `paymentDates` |
| $\tau_j$, $r_j$ | Stützstellen (Tenors) und Zero-Rates der Zinskurve | `yieldCurveTenors`, `yieldCurve` |
| $r(t)$ | interpolierte Zero-Rate zur Laufzeit $t$ | `interpolateRate` |
| $P(t)$ | Discount Factor zur Laufzeit $t$ | `discountFactor` |
| $F_i$ | einfache Forward Rate der Periode $i$ | `forwardRates` |
| $C_i$ | Netto-Cashflow der Periode $i$ | `netCashflows` |
| $\alpha$ | Konfidenzniveau | `confidence` |
| $h$ | Zeithorizont in Handelstagen | `horizon` |

Alle Zeiten werden als Jahresbruchteile behandelt; ein Kalender oder eine Tagezählkonvention wird nicht verwendet.

# 2 Zinskurve

## 2.1 Zero-Rates und Discount Factors

Die Zinskurve ist durch $m$ Stützstellen $(\tau_j, r_j)_{j=1,\ldots,m}$ gegeben. Die Zinssätze werden als **stetig verzinste Zero-Rates** interpretiert. Der Discount Factor zur Laufzeit $t$ lautet

$$P(t) = e^{-r(t)\,t}. \tag{1}$$

**Umsetzung im Code: discountFactor(rate, time)**

```
return Math.exp(-rate * time);
```

Die Zeitreihe stammt aus einer CSV-Datei oder aus einer der beiden im Rechner eingebauten Beispielreihen. Die *aktuelle* Zinskurve ist die letzte Zeile der geladenen Zeitreihe. Die Datei enthält Zinssätze in Prozent; beim Einlesen werden sie durch 100 geteilt.

### 2.2 Interpolation der aktuellen Kurve

Für die Bewertung wird $r(t)$ mit `interpolateRate(t)` bestimmt:

$$r(t) = \begin{cases} r_1, & t \le \tau_1, \\ r_j + \dfrac{r_{j+1} - r_j}{\tau_{j+1} - \tau_j}\,(t - \tau_j), & \tau_j \le t \le \tau_{j+1}, \\ r_m, & t \ge \tau_m. \end{cases} \tag{2}$$

Das ist eine lineare Interpolation in den Zero-Rates mit flacher Extrapolation an beiden Enden.

### 2.3 Interpolation der historischen Kurven

Für die VaR-Berechnung werden die Zinskurven aller historischen Tage mit der Funktion `interpolateFromData` ausgewertet. Diese verhält sich an den Rändern anders als `interpolateRate`:

$$r(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{t}\,\ln\!\left(1 + \left(e^{-r_1\tau_1} - 1\right)\dfrac{t}{\tau_1}\right), & t < \tau_1 \quad \text{(linear im Discount Factor)}, \\ r_j + \dfrac{r_{j+1} - r_j}{\tau_{j+1} - \tau_j}\,(t - \tau_j), & \tau_j < t < \tau_{j+1}, \\ r_j, & t = \tau_j \text{ (exakte Stützstelle)}, \\ r_m, & t > \tau_m. \end{cases} \tag{3}$$

Für $t < \tau_1$ wird also der Discount Factor linear zwischen $P(0) = 1$ und $P(\tau_1)$ interpoliert, $P(t) = 1 + (P(\tau_1) - 1)\,t/\tau_1$, und daraus die implizite Zero-Rate berechnet.

**Hinweis**

Für Laufzeiten unterhalb der ersten Stützstelle $\tau_1$ unterscheiden sich (2) und (3): Die Bewertung nutzt eine flache Zero-Rate, die Risikomessung einen linear interpolierten Discount Factor. Relevant ist dies nur, wenn Zahlungstermine vor $\tau_1$ liegen (z. B. $\tau_1 = 1$ Jahr und $T_0 + \delta < 1$).

## 3 Bewertung des Forward Starting Swaps

### 3.1 Zahlungsplan

Die Anzahl der Zahlungen und die Zahlungstermine sind

$$n = \lfloor T \cdot f \rfloor, \qquad t_i = T_0 + i\,\delta, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Ist $T \cdot f$ nicht ganzzahlig, entfällt die angebrochene Restperiode. Die Zinsperiode $i$ reicht von $t_{i-1}$ bis $t_i$ mit $t_0 := T_0$.

### 3.2 Forward Rates

Die einfache (lineare) Forward Rate für die Periode $[t_{i-1}, t_i]$ ergibt sich aus der Arbitragefreiheit:

$$F_i = \frac{1}{t_i - t_{i-1}}\left(\frac{P(t_{i-1})}{P(t_i)} - 1\right) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{P(t_{i-1})}{P(t_i)} - 1\right). \tag{5}$$

### 3.3 Cashflows und Barwert

**Cashflows der Periode $i$**

$$\text{Fester Cashflow:} \quad X_i^{\text{fix}} = N\,K\,\delta, \tag{6}$$

$$\text{Variabler Cashflow:} \quad X_i^{\text{float}} = N\,F_i\,\delta, \tag{7}$$

$$\text{Netto-Cashflow (Payer):} \quad C_i = X_i^{\text{float}} - X_i^{\text{fix}} = N\,\delta\,(F_i - K), \tag{8}$$

$$\text{Barwert:} \quad \mathrm{PV}_i = C_i\,P(t_i), \qquad \mathrm{PV} = \sum_{i=1}^{n} C_i\,P(t_i). \tag{9}$$

Der Code berechnet $X_i^{\text{fix}}$ als `notional * fixedRate / frequency` und $X_i^{\text{float}}$ als `notional * forwardRate / frequency`; das entspricht den Formeln oben mit $\delta = 1/f$.

### 3.4 Geschlossene Darstellung

**Satz 1** (Teleskopsumme der variablen Seite)**.** *Mit* (5) *gilt* $X_i^{float}\,P(t_i) = N\big(P(t_{i-1}) - P(t_i)\big)$. *Daraus folgt*

$$\mathrm{PV} = N\big(P(T_0) - P(t_n)\big) \;-\; N\,K\,\delta \sum_{i=1}^{n} P(t_i). \tag{10}$$

*Beweis.* $NF_i\delta\,P(t_i) = N\big(P(t_{i-1})/P(t_i) - 1\big)P(t_i) = N\big(P(t_{i-1}) - P(t_i)\big)$; die Summe über $i$ teleskopiert zu $N\big(P(t_0) - P(t_n)\big)$. □

Die Darstellung (10) dient als Kontrolle der Bewertung. Sie zeigt außerdem, dass der Barwert von den Discount Factors bei $T_0$, bei allen Zahlungsterminen und (doppelt) beim letzten Termin $t_n$ abhängt.

*Bemerkung* (Par-Swap-Satz). Der feste Satz, für den $\mathrm{PV} = 0$ gilt, ist $S = \dfrac{P(T_0) - P(t_n)}{\delta \sum_i P(t_i)}$. Der Rechner gibt $S$ nicht aus. Ist $K > S$, ist der Barwert des Payer Swaps negativ.

## 4 Sensitivitäten

Alle Sensitivitäten entstehen durch **Neubewertung** nach einer Parallelverschiebung aller Zero-Rates um $\Delta r = 1\,\text{bp} = 0{,}0001$:

$$\mathrm{PV}^{\pm} = \mathrm{PV}\big(r_j \pm \Delta r,\ j = 1, \ldots, m\big).$$

Da die Forward Rates aus der verschobenen Kurve neu berechnet werden, enthalten $\mathrm{PV}^{\pm}$ sowohl den Diskontierungs- als auch den Projektionseffekt.

### 4.1 DV01

$$\mathrm{DV01} = -\big(\mathrm{PV}^{+} - \mathrm{PV}\big). \tag{11}$$

Positives DV01 bedeutet einen Verlust bei steigenden Zinsen. Für einen Payer Swap steigt der Barwert mit den Zinsen, daher ist sein DV01 typischerweise *negativ*.

### 4.2 Modified Duration

Die Duration wird auf den **Nominalbetrag** $N$ bezogen:

$$D = \frac{\mathrm{DV01} \cdot 10\,000}{N} \approx -\frac{1}{N}\frac{\partial \mathrm{PV}}{\partial r}, \qquad \text{also} \qquad \Delta\mathrm{PV} \approx -D\,N\,\Delta r. \tag{12}$$

Steigen alle Zinsen um einen Prozentpunkt, ändert sich der Barwert um etwa $-D$ Prozent des Nominals. Für einen Payer Swap ist $D$ negativ, weil sein Wert mit steigenden Zinsen zunimmt.

**Hinweis: Bezug auf das Nominal**

Bei Swaps ist der Barwert oft klein im Verhältnis zur Zinssensitivität (bei Abschluss zu Marktkonditionen ist PV $\approx 0$). Eine auf den Barwert bezogene Duration $\mathrm{DV01} \cdot 10\,000/|\mathrm{PV}|$ würde dann sehr groß und könnte ihr Vorzeichen wechseln. Der Bezug auf das Nominal ist bei Swaps üblich und liefert auch bei PV $\approx 0$ stabile Werte. Er ist allerdings nicht direkt mit der barwertbezogenen Duration einer Anleihe vergleichbar.

### 4.3 Konvexität

$$\mathcal{C} = \frac{\mathrm{PV}^{+} + \mathrm{PV}^{-} - 2\,\mathrm{PV}}{N \cdot (\Delta r)^2}. \tag{13}$$

Der Zähler ist die zentrale Differenzenapproximation der zweiten Ableitung nach einer Parallelverschiebung. Wie die Duration ist $\mathcal{C}$ auf das Nominal bezogen. Da $N > 0$, bestimmt allein der Zähler das Vorzeichen. Mit (12) gilt die Näherung zweiter Ordnung

$$\Delta\mathrm{PV} \approx N\Big(-D\,\Delta r + \tfrac{1}{2}\,\mathcal{C}\,(\Delta r)^2\Big).$$

Für einen Payer Swap ist $\mathcal{C}$ typischerweise negativ, weil er die feste Seite *zahlt* (Short-Position in einem festverzinslichen Zahlungsstrom).

## 5 Value at Risk

Der VaR wird nach dem **Varianz-Kovarianz-Ansatz (Delta-Normal)** berechnet. Risikofaktoren sind die logarithmierten Discount Factors am Forward Start $T_0$ und an den Zahlungsterminen; ihre Kovarianzmatrix wird aus der historischen Zeitreihe geschätzt.

### 5.1 Historische Discount-Factor-Zeitreihen

Die Zeitreihe umfasst $D$ Tage ($D \geq 251$) mit den Zinskurven $\big(r_j^{(k)}\big)$, $k = 1, \ldots, D$. Für jeden Tag $k$ und jeden Termin $t_i$ ($i = 0, \ldots, n$ mit $t_0 = T_0$) wird mit (3) die Zero-Rate $r^{(k)}(t_i)$ interpoliert und daraus

$$P_i^{(k)} = \exp\big(-r^{(k)}(t_i)\,t_i\big) \tag{14}$$

gebildet. Die Zahlungstermine $t_i$ bleiben dabei für alle Tage gleich (konstante Laufzeiten).

### 5.2 Log-Returns

Risikofaktoren sind $X_i = \ln P(t_i)$. Ihre täglichen Änderungen sind

$$x_i^{(k)} = \ln \frac{P_i^{(k)}}{P_i^{(k-1)}} = -\big(r^{(k)}(t_i) - r^{(k-1)}(t_i)\big)\,t_i, \qquad k = 2, \ldots, D. \tag{15}$$

Es ergeben sich $M = D - 1$ Beobachtungen (bei 251 Tagen also 250). Gleichung (15) zeigt: Der Log-Return eines Discount Factors ist die mit der Laufzeit gewichtete, negative Änderung der Zero-Rate.

### 5.3 Kovarianz- und Korrelationsmatrix

Mit den Stichprobenmittelwerten $\bar{x}_i = \frac{1}{M}\sum_k x_i^{(k)}$ gilt

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{M-1}\sum_{k=2}^{D}\left(x_i^{(k)} - \bar{x}_i\right)\left(x_j^{(k)} - \bar{x}_j\right), \tag{16}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\Sigma_{ii}}, \qquad \rho_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sigma_i\,\sigma_j}. \tag{17}$$

Zusätzlich werden zwei zusammenfassende Kennzahlen angezeigt:

$$\text{Durchschn. Volatilität:}\quad \bar{\sigma} = \sqrt{\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\Sigma_{ii}}\quad \text{(Wurzel der mittleren Varianz)}, \tag{18}$$

$$\text{Durchschn. Korrelation:}\quad \bar{\rho} = \tfrac{1}{n-1}\textstyle\sum_{i=1}^{n-1}\rho_{i,i+1}\quad \text{(nur benachbarte Termine)}. \tag{19}$$

Beide Werte werden nur über die Zahlungstermine $t_1, \ldots, t_n$ gebildet, dienen der Information und gehen nicht in den VaR ein. Bei nur einer Zahlung ($n = 1$) ist $\bar{\rho}$ nicht definiert (Anzeige `NaN`).

### 5.4 Sensitivitätsvektor

Die variablen Cashflows hängen über (5) selbst von den Discount Factors ab. Nach Satz 1 lautet der Barwert in den Risikofaktoren $X_i = \ln P(t_i)$ mit $t_0 := T_0$

$$\mathrm{PV} = N\,e^{X_0} - N\,e^{X_n} - NK\delta\sum_{i=1}^{n} e^{X_i}. \tag{20}$$

Daraus folgen die vollständigen Sensitivitäten $w_i := \partial\mathrm{PV}/\partial X_i$:

$$w_0 = N\,P(T_0), \qquad w_i = -NK\delta\,P(t_i)\ \ (1 \le i < n), \qquad w_n = -N\,P(t_n)\,(1 + K\delta), \tag{21}$$

mit $\sum_{i=0}^{n} w_i = \mathrm{PV}$. Der VaR erfasst damit die feste *und* die variable Seite des Swaps. Für $T_0 = 0$ ist $P(T_0) = 1$ kein Risikofaktor; es bleiben $w_1, \ldots, w_n$.

### 5.5 Portfolio-Varianz und VaR

Linearisiert gilt $\Delta\mathrm{PV} \approx \sum_i w_i\,\Delta X_i$. Unter der Annahme normalverteilter Log-Returns mit Erwartungswert null folgt

$$\sigma_{\mathrm{PV}}^2 = w^{\top}\Sigma\,w = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} w_i\,\Sigma_{ij}\,w_j, \tag{22}$$

$$\mathrm{VaR}_{\alpha,h} = z_\alpha\,\sigma_{\mathrm{PV}}\,\sqrt{h}. \tag{23}$$

Dabei ist $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ das $\alpha$-Quantil der Standardnormalverteilung und $h$ der Zeithorizont in Tagen (Wurzel-$h$-Skalierung). Angezeigt wird $|\mathrm{VaR}_{\alpha,h}|$.

| Konfidenzniveau $\alpha$ | 95 % | 99 % | 99,9 % |
|---|---|---|---|
| $z_\alpha$ | 1,644854 | 2,326348 | 3,090232 |

### 5.6 Inverse Normalverteilung

$\Phi^{-1}$ wird mit dem rationalen Approximationsverfahren von P. J. Acklam berechnet (Funktion `normalInv`). Für $p \in [0{,}02425;\ 0{,}97575]$ gilt mit $q = p - 0{,}5$ und $s = q^2$

$$\Phi^{-1}(p) \approx q\,\frac{a_1 s^5 + a_2 s^4 + a_3 s^3 + a_4 s^2 + a_5 s + a_6}{b_1 s^5 + b_2 s^4 + b_3 s^3 + b_4 s^2 + b_5 s + 1},$$

in den Randbereichen eine entsprechende Formel in $q = \sqrt{-2\ln p}$ bzw. $q = \sqrt{-2\ln(1-p)}$. Der relative Fehler liegt unter $1{,}15 \cdot 10^{-9}$ und ist für die VaR-Berechnung vernachlässigbar.

## 6 Modellannahmen und Grenzen

### 6.1 Annahmen

(A1) Eine einzige Zinskurve dient zur Diskontierung und zur Projektion der variablen Zinsen (Single-Curve-Ansatz).

(A2) Zero-Rates sind stetig verzinst; Zeitabstände sind exakte Jahresbruchteile ohne Kalender und Tagezählkonvention.

(A3) Die täglichen Log-Returns der Discount Factors sind gemeinsam normalverteilt mit Erwartungswert null und zeitlich konstanter Kovarianz; Tagesrenditen sind unabhängig (Wurzel-$h$-Regel).

(A4) Alle 250 Beobachtungen werden gleich gewichtet (keine exponentielle Gewichtung).

(A5) Die Linearisierung (21) vernachlässigt Terme zweiter Ordnung.

### 6.2 Vergleich mit festgehaltenen Netto-Cashflows

Frühere Fassungen des Rechners verwendeten $w_i = C_i\,P(t_i)$, hielten also die Netto-Cashflows $C_i$ fest. Damit fehlte das Projektionsrisiko der variablen Seite, das den Großteil des Zinsrisikos eines Swaps ausmacht, und $P(T_0)$ war kein Risikofaktor. Der VaR fiel dadurch viel zu klein aus.

Im Beispiel des Benutzerhandbuchs (Nominal 1 Mio. EUR, 2J×3J, 99 %, 1 Tag) ergibt sich:

| Variante | 1-Tages-VaR 99 % |
|---|---|
| Rechner (vollständige Sensitivitäten, 4 Risikofaktoren) | 3.480,51 EUR |
| Frühere Fassung (festgehaltene $C_i$, 3 Risikofaktoren) | 52,18 EUR |
| Näherung $z_{0{,}99} \cdot \lvert\text{DV01}\rvert \cdot \sigma(\Delta r_{3\text{J}})$ | 2.952,55 EUR |

Der VaR des Rechners liegt in der Größenordnung der DV01-Näherung. Er ist etwas größer, weil die Sensitivitäten bei $T_0$ und $t_n$ entgegengesetzte Vorzeichen haben und die Zinsen der einzelnen Laufzeiten nicht vollkommen parallel schwanken.

### 6.3 Weitere Punkte

- **Randbereich der Kurve:** unterschiedliche Extrapolation unter $\tau_1$ in Bewertung und Risikomessung (Abschnitt 2.3).
- **DV01** misst nur Parallelverschiebungen; Drehungen und Krümmungsänderungen der Kurve werden erst im VaR sichtbar.
- **Duration und Konvexität** sind auf den Nominalbetrag bezogen und daher auch bei PV $\approx 0$ stabil. Mit barwertbezogenen Kennzahlen sind sie nicht direkt vergleichbar.

- **Restperiode:** Bei nicht ganzzahligem $T \cdot f$ wird die angebrochene Periode ignoriert.
- **Mittelwert:** In der Kovarianz (16) werden die Mittelwerte abgezogen, im VaR (23) wird ein Erwartungswert von null angenommen.

## 7 Zuordnung Formel – Code

| Funktion | Zweck | Gleichung |
|---|---|---|
| `loadTimeSeries` | gewählte CSV-Datei lesen | – |
| `importTimeSeriesText` | Zeitreihe parsen, Prozent → dezimal, aktuelle Kurve = letzte Zeile | – |
| `loadSampleData` | eingebaute Beispielreihe laden | – |
| `downloadSample` | Beispielreihe als CSV speichern | – |
| `discountFactor` | $P(t) = e^{-rt}$ | (1) |
| `interpolateRate` | Interpolation der aktuellen Kurve | (2) |
| `interpolateFromData` | Interpolation der historischen Kurven | (3) |
| `calculateSwapPV` | Zahlungsplan, Forward Rates, Cashflows, PV | (5)–(10) |
| `calculateRisk` | DV01, Duration, Konvexität, $w$, $\sigma_{\mathrm{PV}}$, VaR | (12), (13), (21)–(23) |
| `calculateHistoricalCovarianceMatrix` | DF-Zeitreihen, Log-Returns, $\Sigma$, $\bar{\sigma}$, $\bar{\rho}$ | (15), (16) |
| `buildCorrelationMatrix` | $\rho_{ij}$ aus $\Sigma$ | – |
| `normalInv` | $\Phi^{-1}(p)$ nach Acklam | – |
| `exportToCSV` | Export aller Ergebnisse und Matrizen | – |