Bond Bewertungs- und Risikorechner

Mathematische Berechnungsschritte

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlegende Konzepte **2**
1.1 Zinskurve und Diskontierung . . . 2
1.2 Interpolation der Zinskurve . . . 2

2 Fixed Rate Bonds **2**
2.1 Bond-Parameter . . . 2
2.2 Kuponzahlungen . . . 2
2.3 Present Value (Barwert) . . . 3
2.4 Clean Price und Dirty Price . . . 3
2.5 Macaulay Duration . . . 3
2.6 Modified Duration . . . 3
2.7 DV01 (Dollar Value of 01) . . . 4
2.8 Konvexität . . . 4

3 Floating Rate Bonds **4**
3.1 Bond-Parameter . . . 4
3.2 Forward Rates . . . 4
3.3 Variable Kuponzahlungen . . . 5
3.4 Present Value . . . 5
3.5 Accrued Interest . . . 5

4 Zero-Coupon Bonds **5**
4.1 Bond-Parameter . . . 5
4.2 Present Value . . . 5
4.3 Clean und Dirty Price . . . 5
4.4 Macaulay Duration . . . 6
4.5 Modified Duration . . . 6
4.6 DV01 und Konvexität . . . 6

5 Value at Risk (VaR) **6**
5.1 Zwei Methoden . . . 6
5.2 Parametrischer VaR . . . 6
5.3 Empirischer Portfolio-VaR mit historischen Daten . . . 7
5.3.1 Historische Datenstruktur . . . 7
5.3.2 Berechnung der Returns . . . 7
5.3.3 Empirische Varianz-Kovarianz-Matrix . . . 7
5.3.4 Volatilitäten . . . 8
5.3.5 Korrelationen . . . 8
5.3.6 Sensitivitätsvektor . . . 8
5.3.7 Portfolio-Varianz . . . 9
5.3.8 Skalierung auf Zeithorizont . . . 9
5.3.9 Portfolio-VaR . . . 9
5.4 Z-Score Berechnung . . . 9

6 Statistische Analysen **10**
6.1 Cashflow-Statistiken 10
6.2 Kovarianz zwischen aufeinanderfolgenden Cashflows 10
6.3 Korrelation 10

7 Szenario-Analyse **10**

8 Yield to Maturity (YTM) **11**

9 Implementierungshinweise **11**
9.1 Numerische Stabilität 11
9.2 Zinskurven-Management 11
9.3 Handelstage-Konvention 11

10 Beispielrechnung 1: Fixed Rate Bond **11**
10.1 Gegeben 11
10.2 Berechnungen 12

11 Beispielrechnung 2: Floating Rate Bond **12**
11.1 Gegeben 12
11.2 Berechnungen 12

12 Beispielrechnung 3: Portfolio-VaR mit historischen Daten (v3.2) **13**
12.1 Gegeben 13
12.2 Kovarianz-Matrix der Log-Returns 13
12.3 Sensitivitätsvektor 14
12.4 Portfolio-Varianz und VaR 14

13 Zusammenfassung der Formeln **14**

14 Literaturhinweise **15**

1 Grundlegende Konzepte

1.1 Zinskurve und Diskontierung

Die Zinskurve $r(t)$ gibt den Zinssatz für die Laufzeit t an. Zur Bewertung verwenden wir kontinuierliche Diskontierung:

$$DF(t) = e^{-r(t) \cdot t} \tag{1}$$

wobei:

- $DF(t)$ = Diskontfaktor für Laufzeit t
- $r(t)$ = Zinssatz aus der Zinskurve für Laufzeit t
- t = Zeit in Jahren

1.2 Interpolation der Zinskurve

Für Laufzeiten zwischen den Stützstellen verwenden wir lineare Interpolation:

$$r(t) = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1} \cdot (t - t_1) \tag{2}$$

wobei $t_1 \leq t \leq t_2$ und r_1, r_2 die Zinssätze bei t_1, t_2 sind.

2 Fixed Rate Bonds

2.1 Bond-Parameter

- N = Nominalbetrag
- c = Kupon (Jahres-Zinssatz)
- T = Laufzeit in Jahren
- f = Zahlungsfrequenz (1=jährlich, 2=halbjährlich, 4=vierteljährlich, 12=monatlich)
- n = Anzahl Zahlungen = $\lfloor T \cdot f \rfloor$
- Δt = Zahlungsintervall = $\frac{1}{f}$

2.2 Kuponzahlungen

Die Kuponzahlung pro Periode beträgt:

$$C = \frac{N \cdot c}{f} \tag{3}$$

Die Zahlungstermine sind:

$$t_i = i \cdot \Delta t \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

2.3 Present Value (Barwert)

Der Present Value besteht aus der Summe aller diskontierten Kuponzahlungen plus der diskontierten Rückzahlung:

$$PV = \sum_{i=1}^{n} C \cdot DF(t_i) + N \cdot DF(t_n) \tag{5}$$

Ausgeschrieben:

$$PV = \sum_{i=1}^{n} C \cdot e^{-r(t_i) \cdot t_i} + N \cdot e^{-r(t_n) \cdot t_n} \tag{6}$$

2.4 Clean Price und Dirty Price

Clean Price (ohne Stückzinsen):

$$\text{Clean Price} = \frac{PV}{N} \cdot 100\% \tag{7}$$

Accrued Interest (Stückzinsen):

$$AI = \frac{C \cdot d}{d_{\text{Periode}}} \tag{8}$$

wobei:

- d = Tage seit letzter Kuponzahlung
- d_{Periode} = Tage in einer Periode = $\frac{365}{f}$

Dirty Price (mit Stückzinsen):

$$\text{Dirty Price} = \text{Clean Price} + \frac{AI}{N} \cdot 100\% \tag{9}$$

2.5 Macaulay Duration

Die Macaulay Duration misst die durchschnittliche Kapitalbindungsdauer:

$$D_{\text{Mac}} = \frac{1}{PV} \left[\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot C \cdot DF(t_i) + t_n \cdot N \cdot DF(t_n) \right] \tag{10}$$

2.6 Modified Duration

Die Modified Duration misst die prozentuale Preisänderung bei Zinsänderung:

$$D_{\text{Mod}} = \frac{D_{\text{Mac}}}{1 + \frac{\bar{r}}{f}} \tag{11}$$

wobei $\bar{r}$ der durchschnittliche Zinssatz ist (z.B. $r(T/2)$).

2.7 DV01 (Dollar Value of 01)

DV01 misst die absolute Wertänderung bei 1 Basispunkt (0.01%) Zinsänderung:

$$DV01 = -\left[PV(r + 0.0001) - PV(r)\right] \tag{12}$$

Berechnung:

1. Erhöhe alle Zinssätze in der Kurve um 1bp: $r'(t) = r(t) + 0.0001$
2. Berechne PV' mit der verschobenen Kurve
3. $DV01 = -(PV' - PV)$

2.8 Konvexität

Die Konvexität misst die Krümmung der Preis-Zins-Beziehung:

$$\text{Konvexität} = \frac{PV^+ + PV^- - 2 \cdot PV}{PV \cdot (\Delta r)^2} \tag{13}$$

wobei:

- PV^+ = Present Value bei $r(t) + \Delta r$
- PV^- = Present Value bei $r(t) - \Delta r$
- $\Delta r = 0.0001$ (1 Basispunkt)

3 Floating Rate Bonds

3.1 Bond-Parameter

- N = Nominalbetrag
- s = Spread über Referenzzins (in Basispunkten)
- T = Laufzeit in Jahren
- f = Zahlungsfrequenz
- n = Anzahl Zahlungen = $\lfloor T \cdot f \rfloor$

3.2 Forward Rates

Für jeden Zahlungstermin berechnen wir die Forward Rate aus der Zinskurve:

Erste Periode:

$$f_1 = r(t_1) \tag{14}$$

Folgeperioden:

$$f_i = \frac{DF(t_{i-1})/DF(t_i) - 1}{t_i - t_{i-1}} \tag{15}$$

Ausgeschrieben:

$$f_i = \frac{e^{-r(t_{i-1}) \cdot t_{i-1}} / e^{-r(t_i) \cdot t_i} - 1}{t_i - t_{i-1}} \tag{16}$$

3.3 Variable Kuponzahlungen

Die Kuponzahlung für Periode i beträgt:

$$C_i = \frac{N \cdot (f_i + s)}{f_{\text{freq}}} \tag{17}$$

wobei:

- f_i = Forward Rate für Periode i
- s = Spread (als Dezimalzahl, z.B. 150bp = 0.015)
- f_{freq} = Zahlungsfrequenz

3.4 Present Value

$$PV = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot DF(t_i) + N \cdot DF(t_n) \tag{18}$$

3.5 Accrued Interest

Geschätzt mit der ersten Forward Rate:

$$AI = \frac{C_1 \cdot d}{d_{\text{Periode}}} \tag{19}$$

wobei $C_1 = \frac{N \cdot (f_1 + s)}{f_{\text{freq}}}$

4 Zero-Coupon Bonds

4.1 Bond-Parameter

- N = Nominalbetrag / Rückzahlung
- T = Restlaufzeit in Jahren

4.2 Present Value

Bei Zero-Coupon Bonds gibt es nur eine einzige Zahlung am Ende:

$$PV = N \cdot DF(T) = N \cdot e^{-r(T) \cdot T} \tag{20}$$

4.3 Clean und Dirty Price

Da es keine Kuponzahlungen gibt:

$$\text{Clean Price} = \text{Dirty Price} = \frac{PV}{N} \cdot 100\% \tag{21}$$

$$\text{Accrued Interest} = 0 \tag{22}$$

4.4 Macaulay Duration

Für Zero-Coupon Bonds entspricht die Duration der Laufzeit:

$$D_{\text{Mac}} = T \tag{23}$$

4.5 Modified Duration

$$D_{\text{Mod}} = \frac{T}{1 + r(T)} \tag{24}$$

4.6 DV01 und Konvexität

Analog zu Fixed Rate Bonds, aber mit nur einer Zahlung:

$$DV01 = -\left[N \cdot e^{-(r(T)+0.0001)\cdot T} - N \cdot e^{-r(T)\cdot T}\right] \tag{25}$$

$$\text{Konvexität} = \frac{PV^{+} + PV^{-} - 2 \cdot PV}{PV \cdot (0.0001)^2} \tag{26}$$

5 Value at Risk (VaR)

5.1 Zwei Methoden

Der Rechner unterstützt zwei VaR-Methoden:

1. **Parametrischer VaR** – bei manueller Zinskurven-Eingabe
2. **Empirischer Portfolio-VaR** – bei historischen Zinsdaten

5.2 Parametrischer VaR

Bei manueller Eingabe der Zinskurve verwenden wir:

$$VaR = z_\alpha \cdot \sigma_{\text{scaled}} \cdot 10000 \cdot |DV01| \tag{27}$$

wobei:

- z_α = Z-Score für Konfidenzniveau α (z.B. 1.645 für 95%)
- σ_{scaled} = skalierte Volatilität
- $DV01$ = Dollar Value of 01 (in EUR)

Volatilitätsskalierung:

$$\sigma_{\text{scaled}} = \sigma_{\text{täglich}} \cdot \sqrt{\frac{h}{250}} \tag{28}$$

wobei:

- $\sigma_{\text{täglich}}$ = tägliche Zinsvolatilität (in Dezimalform)
- h = Zeithorizont in Tagen
- 250 = Anzahl Handelstage pro Jahr

5.3 Empirischer Portfolio-VaR mit historischen Daten

5.3.1 Historische Datenstruktur

Die CSV-Datei enthält:

- Datum
- Zinssätze für verschiedene Laufzeiten (z.B. 3M, 6M, 1Y, 2Y, 3Y, 5Y, 7Y, 10Y)
- Mindestens 250 Beobachtungen

5.3.2 Berechnung der Returns

Die täglichen Returns werden als **Log-Returns der Diskontfaktoren** berechnet:

$$\ell_{i,t} = \ln\left(\frac{DF_i(t)}{DF_i(t-1)}\right) = \ln\left(\frac{e^{-r_{i,t}\cdot\tau_i}}{e^{-r_{i,t-1}\cdot\tau_i}}\right) = -\tau_i \cdot \left(r_{i,t} - r_{i,t-1}\right) \tag{29}$$

wobei:

- i = Index der Laufzeit $(1, 2, \ldots, m)$
- t = Zeitindex (Tag)
- τ_i = Laufzeit in Jahren für Stützstelle i
- $r_{i,t}$ = Zinssatz für Laufzeit i am Tag t (stetige Verzinsung, Dezimal)

Begründung: Der Log-Return des Diskontfaktors ist direkt proportional zur Barwertänderung eines Cashflows. Gegenüber der einfachen Zinsänderung Δr berücksichtigt $\ell_{i,t}$ die Laufzeit τ_i als natürliche Gewichtung und ist für Normalverteilungsannahmen besser geeignet.

5.3.3 Empirische Varianz-Kovarianz-Matrix

Die empirische Kovarianz zwischen Laufzeiten i und j wird berechnet als:

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\ell_{i,t} - \bar{\ell}_i\right)\left(\ell_{j,t} - \bar{\ell}_j\right) \tag{30}$$

wobei:

- T = Anzahl Beobachtungen (Returns)
- $\bar{\ell}_i$ = Mittelwert der Log-Returns für Laufzeit i

Mittelwerte:

$$\bar{\ell}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\ell_{i,t} \tag{31}$$

Die vollständige Kovarianz-Matrix ist:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \cdots & \Sigma_{1m} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \cdots & \Sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{m1} & \Sigma_{m2} & \cdots & \Sigma_{mm} \end{pmatrix} \tag{32}$$

Die Einheit von Σ_{ij} ist $(\Delta \ln DF)^2$.

5.3.4 Volatilitäten

Die Volatilität für Laufzeit i ist:

$$\sigma_i = \sqrt{\Sigma_{ii}} \tag{33}$$

5.3.5 Korrelationen

Die Korrelation zwischen Laufzeiten i und j ist:

$$\rho_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \tag{34}$$

Die Korrelations-Matrix ist:

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

5.3.6 Sensitivitätsvektor

Für jede Stützstelle i der Zinskurve wird die Sensitivität als **barwertgewichteter Cashflow** berechnet:

$$s_i = \sum_{k=1}^{n} CF_k \cdot DF(t_k) \cdot w_i(t_k) \tag{36}$$

wobei $w_i(t_k)$ das lineare Interpolationsgewicht des Zahlungstermins t_k auf Stützstelle i ist:

$$w_i(t_k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t_k = \tau_i \\ \dfrac{\tau_{i+1} - t_k}{\tau_{i+1} - \tau_i} & \text{falls } \tau_i < t_k < \tau_{i+1} \\ \dfrac{t_k - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}} & \text{falls } \tau_{i-1} < t_k < \tau_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{37}$$

Die ökonomische Interpretation: s_i entspricht der Änderung des Barwerts bei einer Änderung von $\ln DF(\tau_i)$ um eine Einheit, d.h.

$$\frac{\partial PV}{\partial \ln DF(\tau_i)} \approx s_i \tag{38}$$

Der Sensitivitätsvektor ist:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} \quad \text{(Einheit: EUR)} \tag{39}$$

Konsistenzcheck: $\sum_{i=1}^{m} s_i = PV$ (Summe der gewichteten Sensitivitäten ergibt den Barwert).

5.3.7 Portfolio-Varianz

Die Portfolio-Varianz (tägliche Basis) wird berechnet als:

$$\sigma_P^2 = \mathbf{s}^T \boldsymbol{\Sigma}\, \mathbf{s} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} s_i \cdot \Sigma_{ij} \cdot s_j \tag{40}$$

Die Einheiten sind konsistent: $[EUR]^2 \cdot [(\Delta \ln DF)^2]/[(\Delta \ln DF)^2] \to [EUR]^2$.
Die Portfolio-Standardabweichung ist:

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2} \quad \text{(Einheit: EUR/Tag)} \tag{41}$$

5.3.8 Skalierung auf Zeithorizont

Da σ_P bereits aus **täglichen** Returns berechnet wurde, skaliert die Quadratwurzel-Regel direkt mit dem Horizont in Handelstagen:

$$\sigma_{P,h} = \sigma_P \cdot \sqrt{h} \tag{42}$$

wobei h der Zeithorizont in Handelstagen ist.
Begründung: Die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ ist in Einheiten von $(\Delta \ln DF)^2$ **pro Handelstag**. Eine Division durch 250 wäre nur erforderlich, wenn σ_P in Jahreseinheiten vorläge – das ist hier nicht der Fall.

5.3.9 Portfolio-VaR

Der finale VaR wird berechnet als:

$$\boxed{VaR = z_\alpha \cdot \sigma_{P,h} = z_\alpha \cdot \sigma_P \cdot \sqrt{h}} \tag{43}$$

wobei die Einheit direkt EUR ist, da $\mathbf{s}$ in EUR und $\boldsymbol{\Sigma}$ dimensionslos (in $(\Delta \ln DF)^2$) ist.

5.4 Z-Score Berechnung

Der Z-Score wird über die inverse Normalverteilung berechnet:

$$z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) \tag{44}$$

Beispielwerte:

- 90% Konfidenz: $z_{0.90} = 1.282$
- 95% Konfidenz: $z_{0.95} = 1.645$
- 99% Konfidenz: $z_{0.99} = 2.326$

6 Statistische Analysen

6.1 Cashflow-Statistiken

Gegeben seien die Cashflows $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Mittelwert:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} C_i \tag{45}$$

Varianz:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (C_i - \mu)^2 \tag{46}$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \tag{47}$$

6.2 Kovarianz zwischen aufeinanderfolgenden Cashflows

$$\mathrm{Cov}(C_i, C_{i+1}) = (C_i - \mu)(C_{i+1} - \mu) \tag{48}$$

Durchschnittliche Kovarianz:

$$\bar{\mathrm{Cov}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (C_i - \mu)(C_{i+1} - \mu) \tag{49}$$

6.3 Korrelation

$$\rho = \frac{\bar{\mathrm{Cov}}}{\sigma^2} \tag{50}$$

7 Szenario-Analyse

Für die Szenario-Analyse verschieben wir die gesamte Zinskurve parallel:

$$r'(t) = r(t) + \Delta r \tag{51}$$

wobei $\Delta r \in \{-50, -25, -10, 0, +10, +25, +50\}$ Basispunkte.
Für jedes Szenario berechnen wir:

- Neuer Present Value: PV'
- Absolute Änderung: $\Delta PV = PV' - PV$
- Prozentuale Änderung: $\frac{\Delta PV}{|PV|} \cdot 100\%$
- Neue Clean Price: $\frac{PV'}{N} \cdot 100\%$

8 Yield to Maturity (YTM)

Die Yield to Maturity ist der interne Zinssatz, der den Present Value mit dem Marktpreis gleichsetzt.

Für die Approximation verwenden wir:

$$YTM \approx \bar{r} \tag{52}$$

wobei $\bar{r}$ der durchschnittliche Zinssatz der Zinskurve ist (z.B. bei $T/2$).

Hinweis: Eine exakte YTM-Berechnung erfordert iterative Verfahren (z.B. Newton-Raphson), die für komplexe Zinskurven-Strukturen aufwendig sind.

9 Implementierungshinweise

9.1 Numerische Stabilität

- Alle Zinssätze werden intern als Dezimalzahlen gespeichert (z.B. 3.5% = 0.035)
- Basispunkte werden durch Division durch 10000 konvertiert
- Exponentialfunktionen verwenden $e^{-r \cdot t}$ für kontinuierliche Diskontierung

9.2 Zinskurven-Management

- Lineare Interpolation zwischen Stützstellen
- Konstante Extrapolation außerhalb des definierten Bereichs
- Spread-Anpassungen werden nach der Interpolation addiert

9.3 Handelstage-Konvention

Für VaR-Berechnungen verwenden wir die Konvention:

- 250 Handelstage pro Jahr
- 365 Kalendertage für Stückzins-Berechnungen

10 Beispielrechnung 1: Fixed Rate Bond

10.1 Gegeben

- Nominalbetrag: $N = 1{,}000{,}000$ EUR
- Kupon: $c = 3.5\%$ p.a.
- Laufzeit: $T = 5$ Jahre
- Frequenz: $f = 2$ (halbjährlich)
- Zinssatz (konstant): $r = 3.0\%$

10.2 Berechnungen

Anzahl Zahlungen:

$$n = \lfloor 5 \cdot 2 \rfloor = 10 \tag{53}$$

Kuponzahlung:

$$C = \frac{1{,}000{,}000 \cdot 0.035}{2} = 17{,}500 \text{ EUR} \tag{54}$$

Zahlungstermine:

$$t_i = \{0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0\} \text{ Jahre} \tag{55}$$

Present Value (erste 3 Zahlungen + Prinzipal):

$$\begin{aligned} PV = {} & 17{,}500 \cdot e^{-0.03 \cdot 0.5} + 17{,}500 \cdot e^{-0.03 \cdot 1.0} + \ldots \\ & + 17{,}500 \cdot e^{-0.03 \cdot 5.0} + 1{,}000{,}000 \cdot e^{-0.03 \cdot 5.0} \end{aligned} \tag{56}$$

Numerisches Ergebnis:

$$PV \approx 1{,}023{,}186 \text{ EUR} \tag{57}$$

Clean Price:

$$\text{Clean Price} = \frac{1{,}023{,}186}{1{,}000{,}000} \cdot 100\% = 102.32\% \tag{58}$$

11 Beispielrechnung 2: Floating Rate Bond

11.1 Gegeben

- Nominalbetrag: $N = 1{,}000{,}000$ EUR
- Spread: $s = 150$ bp $= 0.015$
- Laufzeit: $T = 5$ Jahre
- Frequenz: $f = 4$ (vierteljährlich)
- Zinskurve: steigend von 2.5% (3M) bis 3.9% (10Y)

11.2 Berechnungen

Anzahl Zahlungen:

$$n = \lfloor 5 \cdot 4 \rfloor = 20 \tag{59}$$

Zahlungsintervall:

$$\Delta t = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ Jahre} \tag{60}$$

Forward Rate Berechnung (Beispiel für Periode 2):
Gegeben:

- $t_1 = 0.25$ Jahre, $r(t_1) = 2.5\%$
- $t_2 = 0.50$ Jahre, $r(t_2) = 2.6\%$

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{DF(t_1)/DF(t_2) - 1}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{e^{-0.025 \cdot 0.25}/e^{-0.026 \cdot 0.50} - 1}{0.50 - 0.25} \\ &= \frac{0.993769/0.987080 - 1}{0.25} \\ &= 0.027112 = 2.71\% \end{aligned} \tag{61}$$

Kuponzahlung Periode 2:

$$C_2 = \frac{1{,}000{,}000 \cdot (0.02711 + 0.015)}{4} = 10{,}528 \text{ EUR} \tag{62}$$

Present Value der Periode 2:

$$PV_2 = 10{,}528 \cdot e^{-0.026 \cdot 0.50} = 10{,}392 \text{ EUR} \tag{63}$$

Gesamter Present Value:

$$PV = \sum_{i=1}^{20} C_i \cdot DF(t_i) + 1{,}000{,}000 \cdot DF(5.0) \approx 1{,}045{,}230 \text{ EUR} \tag{64}$$

12 Beispielrechnung 3: Portfolio-VaR mit historischen Daten (v3.2)

12.1 Gegeben

- Fixed Rate Bond: $N = 1{,}000{,}000$ EUR, $c = 5\%$, $T = 5$ Jahre, jährlich
- 251 historische Beobachtungen (Euro-Zone Zinskurve)
- 5 Laufzeiten: 1Y, 2Y, 3Y, 4Y, 5Y
- Aktuelle Zinskurve: 2.88%, 2.94%, 3.04%, 3.32%, 3.88%
- Konfidenzniveau: 99%
- Zeithorizont: $h = 1$ Tag

12.2 Kovarianz-Matrix der Log-Returns

Aus den 250 täglichen Log-Returns $\ell_{i,t} = \ln(DF_i(t)/DF_i(t-1))$ berechnet (in 10^{-6}):

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0.57 & 1.33 & 1.99 & 2.61 & 3.09 \\ 1.33 & 3.53 & 5.67 & 7.52 & 9.11 \\ 1.99 & 5.67 & 10.24 & 14.36 & 17.80 \\ 2.61 & 7.52 & 14.36 & 22.28 & 29.17 \\ 3.09 & 9.11 & 17.80 & 29.17 & 42.07 \end{pmatrix} \tag{65}$$

12.3 Sensitivitätsvektor

Für den 5-jährigen Bond mit jährlichen Zahlungen (Zahlungstermine = Markttenors):

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} CF_1 \cdot DF(1) \\ CF_2 \cdot DF(2) \\ CF_3 \cdot DF(3) \\ CF_4 \cdot DF(4) \\ CF_5 \cdot DF(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48{,}581 \\ 47{,}145 \\ 45{,}642 \\ 43{,}782 \\ 864{,}841 \end{pmatrix} \text{ EUR} \tag{66}$$

Konsistenzcheck: $\sum s_i = 1{,}049{,}990$ EUR $= PV$ ✓

12.4 Portfolio-Varianz und VaR

$$\sigma_P^2 = \mathbf{s}^T \boldsymbol{\Sigma}\, \mathbf{s} = 36{,}291{,}289 \text{ EUR}^2 \tag{67}$$

$$\sigma_P = \sqrt{36{,}291{,}289} = 6{,}024 \text{ EUR/Tag} \tag{68}$$

Skalierung ($h = 1$ Tag):

$$\sigma_{P,1} = 6{,}024 \cdot \sqrt{1} = 6{,}024 \text{ EUR} \tag{69}$$

$$VaR_{99\%,\,1\text{d}} = 2.3263 \cdot 6{,}024 = \mathbf{14{,}014} \text{ EUR} \tag{70}$$

Für 10 Tage:

$$VaR_{99\%,\,10\text{d}} = 2.3263 \cdot 6{,}024 \cdot \sqrt{10} = \mathbf{44{,}318} \text{ EUR} \tag{71}$$

13 Zusammenfassung der Formeln

Tabelle 1: Übersicht aller Hauptformeln (v3.2)

Kennzahl	**Formel**	**Einheit**
Diskontfaktor	$e^{-r(t)\cdot t}$	–
Present Value	$\sum C_i \cdot DF(t_i) + N \cdot DF(t_n)$	EUR
Forward Rate	$\frac{DF(t_{i-1})/DF(t_i)-1}{t_i - t_{i-1}}$	–
Clean Price	$\frac{PV}{N} \cdot 100$	%
Dirty Price	Clean Price $+ \frac{AI}{N} \cdot 100$	%
Macaulay Duration	$\frac{1}{PV} \sum t_i \cdot CF_i \cdot DF(t_i)$	Jahre
Modified Duration	$\frac{D_{\text{Mac}}}{1+r/f}$	Jahre
DV01	$-(PV_{r+1\text{bp}} - PV_r)$	EUR
Konvexität	$\frac{PV^+ + PV^- - 2PV}{PV \cdot (\Delta r)^2}$	–
Log-Return DF	$\ell_{i,t} = \ln(DF_i(t)/DF_i(t-1))$	–
Kovarianz	$\frac{1}{T-1} \sum (\ell_{i,t} - \bar{\ell}_i)(\ell_{j,t} - \bar{\ell}_j)$	–
Korrelation	$\Sigma_{ij}/(\sigma_i \cdot \sigma_j)$	–
Sensitivität	$s_i = \sum_k CF_k \cdot DF(t_k) \cdot w_i(t_k)$	EUR
Parametrischer VaR	$z_\alpha \cdot \sigma \cdot \sqrt{h/250} \cdot 10000 \cdot \lvert DV01 \rvert$	EUR
Portfolio VaR	$z_\alpha \cdot \sqrt{\mathbf{s}^T \boldsymbol{\Sigma}\, \mathbf{s}} \cdot \sqrt{h}$	EUR

Die drei gegenüber v3 geänderten Formeln sind **fett** hervorgehoben.

14 Literaturhinweise

- Hull, J. C. (2018). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson.
- Tuckman, B., & Serrat, A. (2011). *Fixed Income Securities*. Wiley.
- Fabozzi, F. J. (2012). *Bond Markets, Analysis, and Strategies*. Pearson.
- Jorion, P. (2006). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. McGraw-Hill.
- Alexander, C. (2008). *Market Risk Analysis, Volume IV: Value at Risk Models*. Wiley.