Aufgabensammlung

Gold Swap Calculator

Übungen für Studenten

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**
1.1 Schwierigkeitsgrade . . . 2
1.2 Zeitaufwand . . . 2

2 Teil A: Verständnisfragen **3**
2.1 Aufgabe A.1: Grundkonzepte *(Leicht)* . . . 3
2.2 Aufgabe A.2: Bewertungsformeln *(Mittel)* . . . 3
2.3 Aufgabe A.3: Sensitivitäten *(Mittel)* . . . 3
2.4 Aufgabe A.4: VaR-Konzept *(Mittel)* . . . 4
2.5 Aufgabe A.5: Kovarianzmatrix *(Schwer)* . . . 4

3 Teil B: Rechenaufgaben **5**
3.1 Aufgabe B.1: Discount Factor Berechnung *(Leicht)* . . . 5
3.2 Aufgabe B.2: Cashflow-Berechnung *(Leicht)* . . . 5
3.3 Aufgabe B.3: Vollständige Bewertung *(Mittel)* . . . 5
3.4 Aufgabe B.4: Sensitivitäts-Berechnung *(Mittel)* . . . 6
3.5 Aufgabe B.5: Portfolio-Varianz *(Schwer)* . . . 6
3.6 Aufgabe B.6: VaR-Skalierung *(Mittel)* . . . 7

4 Teil C: Calculator-Übungen **8**
4.1 Aufgabe C.1: Basisoperation *(Leicht)* . . . 8
4.2 Aufgabe C.2: Direction-Vergleich *(Leicht)* . . . 8
4.3 Aufgabe C.3: Sensitivitäts-Analyse *(Mittel)* . . . 9
4.4 Aufgabe C.4: VaR-Treiber-Analyse *(Mittel)* . . . 9
4.5 Aufgabe C.5: Zeitreihen-Länge *(Schwer)* . . . 9
4.6 Aufgabe C.6: Stress-Szenario *(Schwer)* . . . 10

5 Teil D: Fallstudien **11**
5.1 Fallstudie D.1: Hedging-Entscheidung *(Mittel)* . . . 11
5.2 Fallstudie D.2: Portfoliooptimierung *(Schwer)* . . . 11
5.3 Fallstudie D.3: Regulatorische Anforderungen *(Schwer)* . . . 12
5.4 Fallstudie D.4: Zentralbank Devisenliquidität *(Schwer)* . . . 12

6 Teil E: Diskussionsfragen **14**
6.1 Frage E.1: Modellrisiko . . . 14
6.2 Frage E.2: Lease Rate vs. Interest Rate . . . 14
6.3 Frage E.3: Praktische Limitationen . . . 14
6.4 Frage E.4: Alternative Methoden . . . 14
6.5 Frage E.5: Geschäftssinn . . . 14

Anhang: Musterlösungen **15**
Teil A: Verständnisfragen – Lösungen . . . 15
Teil B: Rechenaufgaben – Lösungen . . . 19
Teil C: Calculator-Übungen – Lösungen . . . 23
Teil D: Fallstudien – Lösungen . . . 26
Teil E: Diskussionsfragen – Antworten . . . 33

7 Schlusshinweise **38**
7.1 Für Studierende . . . 38
7.2 Für Dozenten . . . 38
7.3 Zeitaufwand . . . 38

1 Einleitung

Diese Aufgabensammlung begleitet die **Gold Swap Dokumentation** und den **Gold Swap Calculator**. Sie enthält:

- **Teil A:** Verständnisfragen (Theorie)
- **Teil B:** Rechenaufgaben (per Hand)
- **Teil C:** Calculator-Übungen (praktisch)
- **Teil D:** Fallstudien (anwendungsorientiert)
- **Teil E:** Diskussionsfragen (kritisches Denken)
- **Anhang:** Musterlösungen

1.1 Schwierigkeitsgrade

Die Aufgaben sind wie folgt gekennzeichnet:

- **Leicht:** Grundlegende Konzepte und einfache Berechnungen
- **Mittel:** Komplexere Berechnungen und Analysen
- **Schwer:** Fortgeschrittene Konzepte und umfangreiche Berechnungen

1.2 Zeitaufwand

Geschätzter Zeitaufwand für die gesamte Aufgabensammlung: **20–25 Stunden**

2 Teil A: Verständnisfragen

2.1 Aufgabe A.1: Grundkonzepte *(Leicht)*

a) Was ist der Unterschied zwischen einem Gold Swap und einem Standard Interest Rate Swap?

b) Warum verwendet man Lease Rates statt Zinssätze für die Gold-Leg?

c) Was bedeutet "Pay EUR" Direction?

d) Erklären Sie den Unterschied zwischen $\mathrm{DF}(t)$ und $L(t)$.

2.2 Aufgabe A.2: Bewertungsformeln *(Mittel)*

a) Leiten Sie die Formel für den Present Value der EUR-Leg her:

$$\mathrm{PV}_{\mathrm{EUR}} = \sum_i \mathrm{CF}_{\mathrm{EUR}}(t_i) \times \mathrm{DF}_{\mathrm{EUR}}(t_i)$$

b) Warum hängt die Gold-Leg von ZWEI Risikofaktoren ab (Lease Rate UND Gold Spot)?

c) Was passiert mit dem Net PV, wenn:

- Die EUR Zero Rates steigen?
- Die Gold Lease Rates steigen?
- Der Gold Spot Price steigt?

2.3 Aufgabe A.3: Sensitivitäten *(Mittel)*

Gegeben sei ein Gold Swap (Pay EUR) mit folgenden Sensitivitäten:

$$\frac{\partial \mathrm{PV}}{\partial \mathrm{DF}(1Y)} = -1.000.000 \text{ EUR}$$
$$\frac{\partial \mathrm{PV}}{\partial L(1Y)} = 1.500.000 \text{ EUR}$$
$$\frac{\partial \mathrm{PV}}{\partial S_{\mathrm{Gold}}} = 2.500 \text{ oz}$$

a) Was bedeutet die negative EUR DF Sensitivität?

b) Welcher Risikofaktor hat das größte Exposure?

c) Wie ändert sich der PV, wenn:

- EUR Zero Rate (1Y) um 10 bps steigt?

- Gold Lease Rate (1Y) um 50 bps fällt?
- Gold Spot um 50 EUR/oz fällt?

Hinweis: Verwenden Sie die erste Ableitung als Approximation.

2.4 Aufgabe A.4: VaR-Konzept *(Mittel)*

a) Erklären Sie in eigenen Worten, was VaR (99%, 1d) = 250.000 EUR bedeutet.

b) Warum ist VaR (99%, 10d) $\neq 10 \times$ VaR (99%, 1d)?

c) Was ist der Unterschied zwischen VaR und Expected Shortfall?

d) Nennen Sie drei Limitationen der parametrischen VaR-Methode.

2.5 Aufgabe A.5: Kovarianzmatrix *(Schwer)*

a) Warum verwendet man Log-Returns statt absolute Änderungen für die Kovarianzmatrix?

b) Was bedeutet eine negative Kovarianz zwischen zwei Risikofaktoren?

c) Erklären Sie, warum die Portfolio-Varianz NICHT einfach die Summe der einzelnen Varianzen ist.

d) Warum ist die Anzahl der Beobachtungen (251 vs. 3) kritisch für die VaR-Berechnung?

3 Teil B: Rechenaufgaben

3.1 Aufgabe B.1: Discount Factor Berechnung *(Leicht)*

Gegeben:

- EUR Zero Rate (6M) = 3,5%
- EUR Zero Rate (1Y) = 4,0%

a) Berechnen Sie $\mathrm{DF}(0,5Y)$ und $\mathrm{DF}(1,0Y)$.

b) Was ist der Present Value von 100.000 EUR in 6 Monaten?

c) Was ist der Present Value von 100.000 EUR in 1 Jahr?

3.2 Aufgabe B.2: Cashflow-Berechnung *(Leicht)*

Gegeben ein Gold Swap mit:

- EUR Notional: 2.000.000 EUR
- Gold Notional: 1.500 oz
- EUR Fixed Rate: 2,5% p.a.
- Gold Spot: 1.400 EUR/oz
- Gold Lease (6M): 0,8%
- Zahlungsfrequenz: Semi-Annual

a) Berechnen Sie $\mathrm{CF}_{\mathrm{EUR}}(0,5Y)$.

b) Berechnen Sie $\mathrm{CF}_{\mathrm{Gold}}(0,5Y)$.

c) Berechnen Sie die Net-Cashflow-Differenz bei $t = 0,5Y$.

3.3 Aufgabe B.3: Vollständige Bewertung *(Mittel)*

Gegeben ein 1-Jahres Gold Swap (Pay EUR) mit:

- EUR Notional: 3.000.000 EUR
- Gold Notional: 2.000 oz
- EUR Fixed Rate: 3,0% p.a.
- Gold Spot: 1.500 EUR/oz
- EUR Zero Rate (6M): 3,2%
- EUR Zero Rate (1Y): 3,5%

- Gold Lease (6M): 1,0%
- Gold Lease (1Y): 0,8%
- Zahlungsfrequenz: Semi-Annual

a) Berechnen Sie alle Cashflows (EUR und Gold Leg).

b) Berechnen Sie die Discount Factors.

c) Berechnen Sie PV_{EUR}, PV_{Gold} und Net PV.

d) Interpretieren Sie das Ergebnis: Ist der Swap "im Geld" oder "aus dem Geld"?

3.4 Aufgabe B.4: Sensitivitäts-Berechnung *(Mittel)*

Verwenden Sie die Daten aus Aufgabe B.3.

a) Berechnen Sie $\frac{\partial \text{PV}}{\partial \text{DF}(0{,}5Y)}$ und $\frac{\partial \text{PV}}{\partial \text{DF}(1{,}0Y)}$.

b) Berechnen Sie $\frac{\partial \text{PV}}{\partial L(0{,}5Y)}$ und $\frac{\partial \text{PV}}{\partial L(1{,}0Y)}$.

c) Berechnen Sie $\frac{\partial \text{PV}}{\partial S_{\text{Gold}}}$ (in oz).

d) Welcher Risikofaktor dominiert das Gesamtrisiko?

3.5 Aufgabe B.5: Portfolio-Varianz *(Schwer)*

Gegeben:

Sensitivitäts-Vektor:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -50.000 \\ -1.000.000 \\ 1.200.000 \\ 1.100.000 \\ 2.000 \end{bmatrix}$$

Kovarianzmatrix (nur Diagonale, alle Kovarianzen $= 0$ zur Vereinfachung):

$$\begin{aligned} \sigma^2(\text{DF } 0,5Y) &= 1 \times 10^{-8} \\ \sigma^2(\text{DF } 1,0Y) &= 4 \times 10^{-8} \\ \sigma^2(\text{Lease } 0,5Y) &= 3 \times 10^{-3} \\ \sigma^2(\text{Lease } 1,0Y) &= 4 \times 10^{-3} \\ \sigma^2(\text{Gold}) &= 2 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Portfolio-Varianz (nur Diagonalelemente).

b) Berechnen Sie die Portfolio-Volatilität.

c) Berechnen Sie VaR (99%, 1d) mit $z = 2{,}326$.

d) Welcher Risikofaktor trägt am meisten zur Gesamt-Varianz bei?

3.6 Aufgabe B.6: VaR-Skalierung *(Mittel)*

Gegeben: VaR (99%, 1d) = 150.000 EUR

a) Berechnen Sie VaR (99%, 10d) unter der Square-Root-of-Time Annahme.

b) Berechnen Sie VaR (95%, 1d), wenn $z_{0,95} = 1{,}645$.

c) Was ist der Expected Shortfall bei 99%, wenn die Returns normalverteilt sind?

4 Teil C: Calculator-Übungen

4.1 Aufgabe C.1: Basisoperation *(Leicht)*

Ziel: Vertrautheit mit dem Calculator

a) Laden Sie die Datei `gold_swap_timeseries_251_tage.csv`.

- Wie viele Zeilen wurden geladen?
- Was ist der Zeitraum?
- Was ist der letzte Gold Spot Preis?

b) Geben Sie folgende Swap-Parameter ein:

- EUR Notional: 10.000.000
- Gold Notional: 5.000
- EUR Fixed Rate: 2,5%
- Laufzeit: 1 Jahr
- Direction: Pay EUR

c) Notieren Sie:

- Net PV
- Alle 5 Sensitivitäten
- VaR (99%, 1d)

4.2 Aufgabe C.2: Direction-Vergleich *(Leicht)*

Ziel: Verstehen des Direction-Effekts

a) Berechnen Sie den Swap mit Direction = "Pay EUR".

- Net PV = ?
- $\frac{\partial \text{PV}}{\partial \text{DF}(1Y)} = ?$

b) Ändern Sie nur Direction zu "Receive EUR".

- Net PV = ?
- $\frac{\partial \text{PV}}{\partial \text{DF}(1Y)} = ?$

c) Was beobachten Sie? Warum?

4.3 Aufgabe C.3: Sensitivitäts-Analyse *(Mittel)*

Ziel: Verständnis der Risikofaktoren
Verwenden Sie die Standard-Parameter (wie in Dokumentation).

a) Notieren Sie die Basis-Sensitivitäten.

b) Verdoppeln Sie das EUR Notional (auf 10 Mio).

- Wie ändern sich die EUR DF Sensitivitäten?
- Wie ändern sich die Lease Sensitivitäten?
- Warum?

c) Verdoppeln Sie das Gold Notional (auf 6.000 oz).

- Wie ändern sich die Lease Sensitivitäten?
- Wie ändert sich die Gold Spot Sensitivität?
- Warum?

d) Was ist der dominante Risikofaktor?

4.4 Aufgabe C.4: VaR-Treiber-Analyse *(Mittel)*

Ziel: Identifikation der Hauptrisiken

a) Berechnen Sie den Standard-Swap und notieren Sie VaR (99%, 1d).

b) Interpretieren Sie: Wenn die Lease Sensitivitäten Null wären, wie würde sich der VaR ändern?

c) Interpretieren Sie: Wenn die DF Sensitivitäten Null wären, wie würde sich der VaR ändern?

d) Welcher Risikofaktor-Typ dominiert den VaR?

4.5 Aufgabe C.5: Zeitreihen-Länge *(Schwer)*

Ziel: Einfluss der Datenhistorie verstehen

a) Verwenden Sie die volle 251-Tage-Zeitreihe.

- VaR (99%, 1d) = ?
- Portfolio-Volatilität = ?

b) Diskutieren Sie: Was würde passieren mit nur 50 Tagen?

c) Diskutieren Sie: Was würde passieren mit nur 10 Tagen?

d) Diskutieren Sie:

- Wie stabil ist der VaR?
- Warum sind 250 Beobachtungen besser als 10?
- Was ist das Minimum für robuste Schätzungen?

4.6 Aufgabe C.6: Stress-Szenario *(Schwer)*

Ziel: Extremrisiken verstehen

a) Berechnen Sie VaR (99%, 1d) für Standard-Parameter.

b) Simulieren Sie ein "Lease Rate Schock"-Szenario:

- Alle Lease Rates steigen um 200 bps (2%)
- Was passiert mit dem Net PV?
- Wie groß ist der Verlust/Gewinn?

c) Simulieren Sie ein "Gold Crash"-Szenario:

- Gold Spot fällt um 30% (auf ∼910 EUR/oz)
- Was passiert mit dem Net PV?
- Wie groß ist der Verlust/Gewinn?

d) Welches Szenario ist schlimmer? Warum?
Hinweis: Verwenden Sie die Sensitivitäten für erste Approximation.

5 Teil D: Fallstudien

5.1 Fallstudie D.1: Hedging-Entscheidung *(Mittel)*

Situation:

Ein Goldminenunternehmen hat einen bestehenden Gold Swap (Receive EUR, Pay Gold) mit:

- EUR Notional: 5.000.000 EUR
- Gold Notional: 3.000 oz
- Restlaufzeit: 1 Jahr
- Aktueller Net PV: +500.000 EUR (im Geld)

VaR-Analyse zeigt:

- VaR (99%, 1d): 350.000 EUR
- Hauptrisiko: Lease Rate Volatilität

Fragen:

a) Was bedeutet ein positiver Net PV für das Unternehmen?

b) Das Risk Management Team schlägt vor, die Lease Rate Exposure zu hedgen. Wie könnte das funktionieren?

c) Sollte das Unternehmen den Swap bei positivem PV vorzeitig schließen? Diskutieren Sie Vor- und Nachteile.

d) Welche Margin-Anforderungen könnte die Gegenpartei stellen?

5.2 Fallstudie D.2: Portfoliooptimierung *(Schwer)*

Situation:

Eine Bank hat ein Portfolio von 5 Gold Swaps mit unterschiedlichen Parametern:

Swap	EUR Not.	Gold Not.	Net PV	VaR (99%, 1d)
A	5 Mio	3.000 oz	-1,1 Mio	350k
B	3 Mio	2.000 oz	+0,5 Mio	200k
C	10 Mio	6.000 oz	-2,0 Mio	700k
D	2 Mio	1.500 oz	+0,2 Mio	150k
E	8 Mio	5.000 oz	-1,5 Mio	600k

Fragen:

a) Was ist der Gesamt-Net-PV des Portfolios?

b) Ist der Portfolio-VaR einfach die Summe der einzelnen VaRs? Warum (nicht)?

c) Angenommen, die Korrelation zwischen den Swaps ist 0,7. Schätzen Sie den Portfolio-VaR grob ab.

d) Die Bank möchte das Lease Rate Risiko reduzieren. Welche Swaps sollten geschlossen werden?

5.3 Fallstudie D.3: Regulatorische Anforderungen *(Schwer)*

Situation:

Ein Hedgefonds verwendet Gold Swaps für Trading. Regulatoren verlangen:

- VaR (99%, 10d) darf nicht mehr als 5% des Eigenkapitals sein
- Eigenkapital: 50 Mio EUR

Aktuelles Portfolio:

- 10 Gold Swaps mit aggregiertem VaR (99%, 1d) = 1,2 Mio EUR
- Durchschnittliche Korrelation: 0,6

Fragen:

a) Berechnen Sie VaR (99%, 10d) unter Square-Root-of-Time.

b) Ist das regulatorische Limit erfüllt (5% von 50 Mio = 2,5 Mio)?

c) Wenn nicht, um wie viel muss die Position reduziert werden?

d) Welche Alternativen gibt es außer Position-Reduktion?

5.4 Fallstudie D.4: Zentralbank Devisenliquidität *(Schwer)*

Situation:

Die Zentralbank eines Schwellenlandes steht vor einer akuten Liquiditätskrise:

- Goldreserven: 50 Tonnen (aktueller Wert: ∼2,1 Mrd EUR bei 1.300 EUR/oz)
- Devisenreserven: Sehr niedrig, nur noch 500 Mio USD
- Benötigt: 2 Mrd USD für Importfinanzierung und Zahlungsbilanz-Stabilisierung
- Politische Einschränkung: Regierung verbietet Verkauf von Goldreserven (nationales Symbol)
- Alternative: Internationaler Kredit bei 5% p.a. oder IMF-Programm (politisch unpopulär)

Die Finanzabteilung der Zentralbank schlägt einen Gold Swap vor:

- Swap-Partner: Internationale Großbank
- Laufzeit: 1 Jahr

- Gold bleibt rechtliches Eigentum der Zentralbank
- Lease Rate: 0,8% p.a.
- Gegenleistung: 2 Mrd USD (entspricht ∼30 Tonnen Gold)

Fragen:

a) Wie funktioniert dieser Gold Swap mechanisch? Beschreiben Sie die Cashflows bei Inception und Maturity.

b) Vergleichen Sie die Kosten:

- Gold Swap (Lease Rate 0,8%)
- USD-Kredit (5,0% Zinsen)
- Goldverkauf + Rückkauf nach 1 Jahr

c) Welche Risiken entstehen für die Zentralbank?

- Gold-Preis steigt um 20%?
- Gold-Preis fällt um 20%?
- USD/EUR Wechselkurs ändert sich?
- Counterparty-Risiko?

d) Warum ist dieser Gold Swap politisch sensitiv?

- Wie wird es in der Bilanz ausgewiesen?
- Ist das Gold wirklich noch "da"?
- Was passiert bei Default?
- Vergleich zu IMF-Programm

e) Recherchieren Sie: Welche Länder haben in den letzten 10 Jahren Gold Swaps zur Devisenbeschaffung genutzt?

6 Teil E: Diskussionsfragen

6.1 Frage E.1: Modellrisiko

a) Die parametrische VaR-Methode nimmt Normalverteilung an. Was sind die Konsequenzen, wenn Returns "fat tails" haben?

b) Wie könnte man das Modellrisiko quantifizieren oder reduzieren?

6.2 Frage E.2: Lease Rate vs. Interest Rate

a) Warum sind Gold Lease Rates typischerweise niedriger als EUR Zero Rates?

b) Was würde passieren, wenn Lease Rates plötzlich höher als EUR Rates werden?

c) Gibt es historische Beispiele für extreme Lease Rate Bewegungen?

6.3 Frage E.3: Praktische Limitationen

a) Die Dokumentation verwendet 251 historische Beobachtungen. Was sind die Vor- und Nachteile von mehr/weniger Daten?

b) Wie schnell sollte man die Kovarianzmatrix aktualisieren (täglich, wöchentlich, monatlich)?

c) Was macht man, wenn es keine liquiden Lease Rate Quotes gibt?

6.4 Frage E.4: Alternative Methoden

a) Vergleichen Sie parametrische VaR, Historical Simulation und Monte Carlo. Was sind Vor-/Nachteile?

b) Wann würden Sie Historical Simulation bevorzugen?

c) Wann würden Sie Monte Carlo bevorzugen?

6.5 Frage E.5: Geschäftssinn

a) Warum würde ein Unternehmen überhaupt einen Gold Swap eingehen?

b) Geben Sie 4 konkrete Beispiele für Institutionen/Unternehmen, die Gold Swaps benötigen (inkl. Zentralbanken).

c) Ist ein Gold Swap ein Hedging-Instrument oder ein Spekulationsinstrument? Diskutieren Sie.

Anhang: Musterlösungen

Teil A: Verständnisfragen – Lösungen

Lösung A.1:

a) Gold Swap vs. IRS:

- **IRS:** Beide Legs basieren auf Zinssätzen (float vs. fixed)
- **Gold Swap:** Eine Leg basiert auf Gold (Lease Rate + Gold Spot), andere auf EUR Zinssatz
- Gold Swap hat zusätzliches Commodity-Risiko

b) Warum Lease Rates:

- Lease Rates sind die "Kosten" des Gold-Borrowing
- Sie repräsentieren den Zins für das Leihen von physischem Gold
- Analog zu Repo-Rates für Anleihen

c) "Pay EUR" bedeutet:

- Die Bank zahlt die EUR-Leg (basierend auf EUR Fixed Rate)
- Die Bank erhält die Gold-Leg (basierend auf Lease Rate + Gold Spot)
- Direction bestimmt das Vorzeichen des Net PV

d) $\mathrm{DF}(t)$ vs. $L(t)$:

- **DF(t):** Discount Factor, abgeleitet von EUR Zero Rate, zum Abdiskontieren von Cashflows
- **L(t):** Lease Rate, "Zinssatz" für Gold-Borrowing, bestimmt Gold-Leg Cashflows
- $\mathrm{DF}(t) < 1$, $L(t)$ ist ein Prozentsatz (typisch 0,1% – 1%)

Lösung A.2:

a) Herleitung $\mathrm{PV}_{\mathrm{EUR}}$:
Jeder Cashflow $\mathrm{CF}_{\mathrm{EUR}}(t_i)$ hat einen zukünftigen Wert. Um Present Value zu erhalten, diskontieren mit $\mathrm{DF}_{\mathrm{EUR}}(t_i)$. Summe über alle Zahlungstermine:

$$\mathrm{PV}_{\mathrm{EUR}} = \mathrm{CF}_{\mathrm{EUR}}(t_1) \times \mathrm{DF}(t_1) + \mathrm{CF}_{\mathrm{EUR}}(t_2) \times \mathrm{DF}(t_2) + \ldots = \sum_i \mathrm{CF}_{\mathrm{EUR}}(t_i) \times \mathrm{DF}_{\mathrm{EUR}}(t_i)$$

b) Zwei Risikofaktoren für Gold-Leg:

- **Lease Rate $L(t)$:** Bestimmt die Zinszahlung auf den Gold-Wert
- **Gold Spot S_{Gold}:** Bestimmt den Wert des Gold Notionals

- Cashflow = $S_{\text{Gold}} \times N_{\text{oz}} \times [L(t) \times \Delta t + 1 \text{ am Ende}]$
- Beide Faktoren können sich unabhängig bewegen

c) Auswirkungen (Pay EUR):

- **EUR Rates steigen → DF sinkt → $\mathbf{PV_{EUR}}$ sinkt → Net PV steigt** (besser für Pay EUR)
- **Lease Rates steigen → $\mathbf{CF_{Gold}}$ steigt → $\mathbf{PV_{Gold}}$ steigt → Net PV steigt** (besser für Pay EUR)
- **Gold Spot steigt → $\mathbf{CF_{Gold}}$ steigt → $\mathbf{PV_{Gold}}$ steigt → Net PV steigt** (besser für Pay EUR)

Lösung A.3:

a) Negative EUR DF Sensitivität:

- $\frac{\partial \text{PV}}{\partial \text{DF}(1Y)} = -1.000.000 \text{ EUR} < 0$
- Wenn DF steigt (EUR Rate sinkt) → PV sinkt um 1 Mio EUR
- Das bedeutet: Pay EUR Position ist größer als Receive Gold Position bei diesem Tenor
- EUR Cashflow dominiert

b) Größtes Exposure:

- Lease: 1.500.000 EUR (absolut)
- EUR DF: 1.000.000 EUR (absolut)
- Gold Spot: 2.500 oz ≈ 2.500 × 1.300 = 3.250.000 EUR (wenn Gold ≈ 1.300)
- **Gold Spot hat größtes Exposure** (wenn in EUR konvertiert)
- **Aber:** Lease Rate ist wahrscheinlich volatiler

c) PV-Änderungen:
EUR Rate +10 bps:

$$\Delta \text{DF} \approx -\text{DF} \times t \times \Delta r = -0{,}977 \times 1 \times 0{,}001 \approx -0{,}00098$$
$$\Delta \text{PV} \approx -1.000.000 \times (-0{,}00098) \approx +980 \text{ EUR}$$

Lease Rate -50 bps:

$$\Delta \text{PV} \approx 1.500.000 \times (-0{,}005) = -7.500 \text{ EUR}$$

Gold Spot -50 EUR:

$$\Delta \text{PV} \approx 2.500 \times (-50) = -125.000 \text{ EUR}$$

Gold Spot Bewegung hat größten Effekt!

Lösung A.4:

a) VaR (99%, 1d) = 250.000 EUR bedeutet:

- "Mit 99% Wahrscheinlichkeit verliert der Swap **nicht mehr als** 250.000 EUR an einem Tag"
- Anders: "An 99 von 100 Tagen ist der Verlust $\leq$ 250.000 EUR"
- Oder: "Nur an 1 von 100 Tagen überschreitet der Verlust 250.000 EUR"

b) Warum VaR(10d) $\neq 10 \times$ VaR(1d):

- Returns skalieren mit $\sqrt{\text{Zeit}}$, nicht linear
- VaR(10d) = VaR(1d) $\times\sqrt{10} \approx 3{,}16\times$ VaR(1d)
- Grund: Volatilität wächst mit Quadratwurzel der Zeit
- Diversifikation über Zeit

c) VaR vs. Expected Shortfall (ES):

- **VaR:** Nur der Schwellenwert (wie viel maximal verloren geht bei 99%)
- **ES (CVaR):** Durchschnittlicher Verlust WENN VaR überschritten wird
- ES beantwortet: "Was passiert im worst 1% der Fälle?"
- ES ist immer $\geq$ VaR
- ES ist kohärent, VaR nicht

d) Limitationen parametrischer VaR:

1. **Normalverteilungsannahme:** Fat tails werden unterschätzt
2. **Lineare Approximation:** Delta-Normal, keine Gamma-Effekte
3. **Konstante Korrelationen:** Ändern sich in Krisen
4. **Historische Daten:** Vergangenheit $\neq$ Zukunft
5. **Keine Worst-Case-Info:** Sagt nichts über Tail-Losses

Lösung A.5:

a) Log-Returns vs. Absolute Änderungen:
Log-Returns: $r = \ln(P_t/P_{t-1})$

- Zeitaggregierbar: $r(2d) = r(1d) + r(1d)$
- Symmetrisch: $r(+10\%) \neq -r(-10\%)$, aber log-Skala ist symmetrischer
- Normalverteilungsnäher

Absolute Änderungen: $\Delta = P_t - P_{t-1}$

- Nicht gut für Prozent-Risiken
- Preisabhängig

b) Negative Kovarianz:

- $\text{Cov}(X, Y) < 0$ bedeutet: X und Y bewegen sich entgegengesetzt
- Wenn X steigt, tendiert Y zu fallen
- Beispiel: EUR DF und EUR Rate (wenn Rate steigt, sinkt DF)
- **Diversifikationseffekt:** Portfolio-Varianz wird kleiner

c) Portfolio-Varianz $\neq$ Summe der Varianzen:

$$\begin{aligned}\text{Var}(w_1X_1 + w_2X_2) &= w_1^2\text{Var}(X_1) + w_2^2\text{Var}(X_2) + 2w_1w_2\text{Cov}(X_1, X_2) \\ &\neq w_1^2\text{Var}(X_1) + w_2^2\text{Var}(X_2) \quad [\text{wenn Cov} \neq 0]\end{aligned}$$

- Der Kovarianz-Term kann positiv oder negativ sein
- Negative Korrelation reduziert Gesamt-Risiko (Diversifikation)
- Positive Korrelation erhöht Gesamt-Risiko (Konzentration)

d) Anzahl Beobachtungen:
3 Beobachtungen: Nur 2 Returns $\rightarrow$ extrem unsichere Kovarianzschätzung

- Standard Error sehr groß
- Wenige Freiheitsgrade

251 Beobachtungen: 250 Returns $\rightarrow$ robuste Schätzung

- Kleinerer Standard Error $\propto 1/\sqrt{n}$
- Mehr Freiheitsgrade
- Faustregel: Mindestens 180–250 für Kovarianz

Teil B: Rechenaufgaben – Lösungen

Lösung B.1:

a) Discount Factors:

$$\mathrm{DF}(0{,}5Y) = e^{-0{,}035\times 0{,}5} = e^{-0{,}0175} = 0{,}98266$$
$$\mathrm{DF}(1{,}0Y) = e^{-0{,}040\times 1{,}0} = e^{-0{,}040} = 0{,}96079$$

b) PV von 100.000 EUR in 6M:

$$\mathrm{PV} = 100.000 \times 0{,}98266 = 98.266 \text{ EUR}$$

c) PV von 100.000 EUR in 1Y:

$$\mathrm{PV} = 100.000 \times 0{,}96079 = 96.079 \text{ EUR}$$

Lösung B.2:

a) $\mathrm{CF}_{\mathrm{EUR}}(0{,}5Y)$:

$$\mathrm{CF}_{\mathrm{EUR}}(0{,}5Y) = N_{\mathrm{EUR}} \times r_{\mathrm{EUR}} \times \Delta t = 2.000.000 \times 0{,}025 \times 0{,}5 = 25.000 \text{ EUR}$$

b) $\mathrm{CF}_{\mathrm{Gold}}(0{,}5Y)$:

$$V_{\mathrm{Gold}} = S_{\mathrm{Gold}} \times N_{\mathrm{oz}} = 1.400 \times 1.500 = 2.100.000 \text{ EUR}$$
$$\begin{aligned}\mathrm{CF}_{\mathrm{Gold}}(0{,}5Y) &= V_{\mathrm{Gold}} \times L(0{,}5Y) \times \Delta t \\ &= 2.100.000 \times 0{,}008 \times 0{,}5 = 8.400 \text{ EUR}\end{aligned}$$

c) Net-Cashflow (bei $t = 0{,}5Y$, Pay EUR):

$$\text{Net CF} = \mathrm{CF}_{\mathrm{Gold}} - \mathrm{CF}_{\mathrm{EUR}} = 8.400 - 25.000 = -16.600 \text{ EUR}$$

Negativ $\rightarrow$ zahlt mehr als erhält

Lösung B.3:

a) Alle Cashflows:
EUR Leg:

$$\mathrm{CF}_{\mathrm{EUR}}(0{,}5Y) = 3.000.000 \times 0{,}03 \times 0{,}5 = 45.000 \text{ EUR}$$
$$\mathrm{CF}_{\mathrm{EUR}}(1{,}0Y) = 45.000 + 3.000.000 = 3.045.000 \text{ EUR}$$

Gold Leg:

$$\begin{aligned} V_{\text{Gold}} &= 1.500 \times 2.000 = 3.000.000 \text{ EUR} \\ \text{CF}_{\text{Gold}}(0{,}5Y) &= 3.000.000 \times 0{,}01 \times 0{,}5 = 15.000 \text{ EUR} \\ \text{CF}_{\text{Gold}}(1{,}0Y) &= 3.000.000 \times 0{,}008 \times 0{,}5 + 3.000.000 \\ &= 12.000 + 3.000.000 = 3.012.000 \text{ EUR} \end{aligned}$$

b) Discount Factors:

$$\begin{aligned} \text{DF}(0{,}5Y) &= e^{-0{,}032 \times 0{,}5} = e^{-0{,}016} = 0{,}98413 \\ \text{DF}(1{,}0Y) &= e^{-0{,}035 \times 1{,}0} = e^{-0{,}035} = 0{,}96562 \end{aligned}$$

c) Present Values:

$$\begin{aligned} \text{PV}_{\text{EUR}} &= 45.000 \times 0{,}98413 + 3.045.000 \times 0{,}96562 \\ &= 44.286 + 2.940.313 = 2.984.599 \text{ EUR} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{PV}_{\text{Gold}} &= 15.000 \times 0{,}98413 + 3.012.000 \times 0{,}96562 \\ &= 14.762 + 2.908.497 = 2.923.259 \text{ EUR} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Net PV (Pay EUR)} &= \text{PV}_{\text{Gold}} - \text{PV}_{\text{EUR}} \\ &= 2.923.259 - 2.984.599 = -61.340 \text{ EUR} \end{aligned}$$

d) Interpretation:

- Net PV $= -61.340$ EUR < 0
- **Swap ist "AUS DEM GELD"** aus Sicht Pay EUR
- EUR-Leg ist wertvoller als Gold-Leg
- Wenn der Swap heute geschlossen würde, müsste 61.340 EUR gezahlt werden

Lösung B.4:

Verwende Daten aus B.3.

a) EUR DF Sensitivitäten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{PV}}{\partial \text{DF}(0{,}5Y)} &= \text{CF}_{\text{Gold}}(0{,}5Y) - \text{CF}_{\text{EUR}}(0{,}5Y) \\ &= 15.000 - 45.000 = -30.000 \text{ EUR} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{PV}}{\partial \text{DF}(1{,}0Y)} &= \text{CF}_{\text{Gold}}(1{,}0Y) - \text{CF}_{\text{EUR}}(1{,}0Y) \\ &= 3.012.000 - 3.045.000 = -33.000 \text{ EUR} \end{aligned}$$

b) Lease Sensitivitäten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{PV}}{\partial L(0{,}5Y)} &= S_{\text{Gold}} \times N_{\text{oz}} \times \Delta t \times \text{DF}(0{,}5Y) \\ &= 1.500 \times 2.000 \times 0{,}5 \times 0{,}98413 = 1.476.195 \text{ EUR}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{PV}}{\partial L(1{,}0Y)} &= S_{\text{Gold}} \times N_{\text{oz}} \times \Delta t \times \text{DF}(1{,}0Y) \\ &= 1.500 \times 2.000 \times 0{,}5 \times 0{,}96562 = 1.448.430 \text{ EUR}\end{aligned}$$

c) Gold Spot Sensitivität:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{PV}}{\partial S_{\text{Gold}}} &= N_{\text{oz}} \times [L(0{,}5Y) \times \Delta t \times \text{DF}(0{,}5Y) + L(1{,}0Y) \times \Delta t \times \text{DF}(1{,}0Y) + \text{DF}(1{,}0Y)] \\ &= 2.000 \times [0{,}01 \times 0{,}5 \times 0{,}98413 + 0{,}008 \times 0{,}5 \times 0{,}96562 + 0{,}96562] \\ &= 2.000 \times [0{,}00492 + 0{,}00386 + 0{,}96562] \\ &= 2.000 \times 0{,}97440 = 1.948{,}8 \text{ oz}\end{aligned}$$

d) Dominanter Risikofaktor:

- EUR DF: ∼30k EUR (klein)
- Lease: ∼1,45 Mio EUR (SEHR GROSS!)
- Gold Spot: ∼1.949 oz ≈ 2,9 Mio EUR

Lease Rates dominieren das Risiko!

Lösung B.5:

a) Portfolio-Varianz (nur Diagonale):

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= \sum_i w_i^2 \times \sigma_i^2 \\ &= (-50.000)^2 \times 1 \times 10^{-8} + (-1.000.000)^2 \times 4 \times 10^{-8} \\ &\quad + (1.200.000)^2 \times 3 \times 10^{-3} + (1.100.000)^2 \times 4 \times 10^{-3} \\ &\quad + (2.000)^2 \times 2 \times 10^{-4} \\ &= 25 + 40.000 + 4.320.000.000 + 4.840.000.000 + 800 \\ &\approx 9.160.040.825 \text{ EUR}^2\end{aligned}$$

b) Portfolio-Volatilität:

$$\sigma_P = \sqrt{9.160.040.825} = 95.708 \text{ EUR}$$

c) VaR (99%, 1d):

$$\text{VaR} = 2{,}326 \times 95.708 = 222.617 \text{ EUR}$$

d) Beitrag zur Varianz:

$$\begin{aligned}\text{Lease } 0{,}5Y &: (1.200.000)^2 \times 3 \times 10^{-3} = 4.320.000.000 \quad (47\%)\\ \text{Lease } 1{,}0Y &: (1.100.000)^2 \times 4 \times 10^{-3} = 4.840.000.000 \quad (53\%)\\ \text{Rest} &: \text{Vernachlässigbar}\end{aligned}$$

Lease Rates tragen 100% zur Varianz bei!

Lösung B.6:

a) VaR (99%, 10d):

$$\text{VaR}(10d) = \text{VaR}(1d) \times \sqrt{10} = 150.000 \times 3{,}162 = 474.300 \text{ EUR}$$

b) VaR (95%, 1d):

$$\text{VaR}_{95} = \frac{z_{0.95}}{z_{0.99}} \times \text{VaR}_{99} = \frac{1{,}645}{2{,}326} \times 150.000 = 0{,}7073 \times 150.000 = 106.095 \text{ EUR}$$

c) Expected Shortfall (99%):
Für Normalverteilung:

$$\begin{aligned}\text{ES}_{99} &= \sigma \times \frac{\phi(z_{0.99})}{1 - 0{,}99}\\ \sigma &= \frac{\text{VaR}_{99}}{z_{0.99}} = \frac{150.000}{2{,}326} = 64.496 \text{ EUR}\\ \phi(2{,}326) &\approx 0{,}0246\\ \text{ES}_{99} &= 64.496 \times \frac{0{,}0246}{0{,}01} = 158.660 \text{ EUR}\end{aligned}$$

Faustregel: ES $\approx 1{,}06\times$ VaR bei 99%

Teil C: Calculator-Übungen – Lösungen

Lösung C.1:

a) CSV laden:

- Zeilen geladen: **251**
- Zeitraum: **01.01.2023 bis 08.09.2023**
- Letzter Gold Spot: **1.302,51 EUR/oz**

b) Parameter eingegeben ✓

c) Ergebnisse (hängen von Calculator-Implementierung ab):

- Net PV: $\sim -2.296.232$ EUR (Pay EUR mit größerem Notional)
- Sensitivitäten:
  - $\frac{\partial \text{PV}}{\partial \text{DF}(0{,}5Y)}$: ~ -63.841 EUR
  - $\frac{\partial \text{PV}}{\partial \text{DF}(1{,}0Y)}$: $\sim -1.893.153$ EUR
  - $\frac{\partial \text{PV}}{\partial L(0{,}5Y)}$: $\sim 3.222.464$ EUR
  - $\frac{\partial \text{PV}}{\partial L(1{,}0Y)}$: $\sim 3.182.649$ EUR
  - $\frac{\partial \text{PV}}{\partial S_{\text{Gold}}}$: ~ 4.910 oz
- VaR (99%, 1d): ~ 583.372 EUR

Lösung C.2:

a) Pay EUR:

- Net PV: z.B. $-1.148.116$ EUR (negativ)
- $\frac{\partial \text{PV}}{\partial \text{DF}(1Y)}$: $-1.135.892$ EUR (negativ)

b) Receive EUR (Direction geändert):

- Net PV: $+1.148.116$ EUR (positiv, Vorzeichen gedreht!)
- $\frac{\partial \text{PV}}{\partial \text{DF}(1Y)}$: $+1.135.892$ EUR (positiv, Vorzeichen gedreht!)

c) Beobachtung:

- **ALLE Werte ändern nur das Vorzeichen!**
- Net $\text{PV}_{\text{receive}} = -\text{Net PV}_{\text{pay}}$
- Grund: Direction dreht die Perspektive komplett um
- Was vorher Zahlung war, ist jetzt Empfang

Lösung C.3:

a) Basis-Sensitivitäten (Standard 5M/3k):

$$\frac{\partial \text{PV}}{\partial \text{DF}(0{,}5Y)} : -38.305 \text{ EUR}$$
$$\frac{\partial \text{PV}}{\partial \text{DF}(1{,}0Y)} : -1.135.892 \text{ EUR}$$
$$\frac{\partial \text{PV}}{\partial L(0{,}5Y)} : 1.933.479 \text{ EUR}$$
$$\frac{\partial \text{PV}}{\partial L(1{,}0Y)} : 1.909.589 \text{ EUR}$$
$$\frac{\partial \text{PV}}{\partial S_{\text{Gold}}} : 2{,}946 \text{ oz}$$

b) EUR Notional verdoppelt (10M/3k):

- EUR DF Sensitivitäten: ∼verdoppeln (linear in N_{EUR}!)
  - $\frac{\partial \text{PV}}{\partial \text{DF}(0{,}5Y)}$: ~ -76.610 EUR
  - $\frac{\partial \text{PV}}{\partial \text{DF}(1{,}0Y)}$: $\sim -2.271.784$ EUR
- Lease Sensitivitäten: UNVERÄNDERT (hängen nicht von N_{EUR} ab)
  - $\frac{\partial \text{PV}}{\partial L(0{,}5Y)}$: 1.933.479 EUR (gleich!)
  - $\frac{\partial \text{PV}}{\partial L(1{,}0Y)}$: 1.909.589 EUR (gleich!)
- Warum: Lease Sensitivität $= S_{\text{Gold}} \times N_{\text{oz}} \times \Delta t \times \text{DF}$ (kein N_{EUR}!)

c) Gold Notional verdoppelt (5M/6k):

- EUR DF Sensitivitäten: Ändern sich (weil CF_{Gold} steigt)
- Lease Sensitivitäten: ∼verdoppeln (linear in N_{oz}!)
  - $\frac{\partial \text{PV}}{\partial L(0{,}5Y)}$: $\sim 3.866.958$ EUR
  - $\frac{\partial \text{PV}}{\partial L(1{,}0Y)}$: $\sim 3.819.178$ EUR
- Gold Spot Sensitivität: ∼verdoppelt
  - $\frac{\partial \text{PV}}{\partial S_{\text{Gold}}}$: $\sim 5{,}892$ oz
- Warum: Gold Sensitivität $= N_{\text{oz}} \times [\ldots]$

d) Dominanter Risikofaktor:

- **Lease Rates!**

- Sensitivitäten ∼1,9 Mio EUR (sehr groß)
- Lease Volatilität ∼6% täglich (sehr hoch)
- Kombination = dominantes Risiko

Lösung C.4–C.6:

Hinweis: Die Lösungen für C.4–C.6 hängen stark von der konkreten Calculator-Implementierung und den Experimenten der Studenten ab. Die Aufgaben sind konzipiert als praktische Übungen zur Exploration und Analyse mit dem Tool.

Wichtige Erkenntnisse die Studenten machen sollten:

C.4 (VaR-Treiber):

- Lease Rates dominieren den VaR fast vollständig ($> 95\%$ des Risikos)
- EUR DFs tragen nur minimal bei
- Gold Spot relevant, aber weniger als Lease

C.5 (Zeitreihen-Länge):

- 251 Tage: Stabil, robust
- 50 Tage: Noch verwendbar, aber volatiler
- 10 Tage: Sehr instabil, nicht verlässlich
- Minimum: 180–250 Beobachtungen

C.6 (Stress-Szenarien):

- Lease Rate Schock (+200 bps): Gewinn ∼+77k EUR (Pay EUR profitiert!)
- Gold Crash (-30%): Verlust $\sim -1{,}15$ Mio EUR (sehr schmerzhaft!)
- VaR erfasst normale Volatilität, nicht Crash-Szenarien

Teil D: Fallstudien – Lösungen

Lösung D.1:

a) Positiver Net PV:

- +500.000 EUR im Geld
- Wenn heute geschlossen: Unternehmen erhält 500k EUR
- Aber: Das ist aktueller Wert, kann sich ändern

b) Lease Rate Hedge:
Optionen:

1. **Lease Rate Swap:** Fixed vs. Floating Lease Rate
2. **Gold Futures:** Indirekt, da Futures implizit Lease Rates enthalten
3. **Optionen auf Lease Rates:** Teuer, aber flexibel
4. **Position reduzieren:** Teil des Swaps schließen

c) Vorzeitig schließen?
Pro:

- Gewinn von 500k realisieren (sicher)
- VaR-Risiko von 350k eliminieren
- Keine laufende Überwachung nötig

Contra:

- Operative Hedging-Funktion geht verloren
- Ggf. ursprünglicher Hedging-Bedarf noch da
- Transaktionskosten
- Weitere Wertsteigerung verpasst

Empfehlung: Hängt von:

- Ursprünglichem Hedging-Zweck
- Risiko-Appetit
- Erwartungen über zukünftige Marktbewegungen

d) Margin-Anforderungen:

- Bei positivem PV: Gegenpartei hat Verlust
- Initial Margin: ∼10–20% des Notionals = 500k – 1M EUR
- Variation Margin: Täglich mark-to-market
- VaR kann als Basis dienen: z.B. $2 \times \text{VaR}(10d) = 2 \times 1{,}1M = 2{,}2M$ EUR

Lösung D.2:

a) Gesamt-Net-PV:

$$\text{PV}_{\text{total}} = -1{,}1 + 0{,}5 - 2{,}0 + 0{,}2 - 1{,}5 = -3{,}9 \text{ Mio EUR}$$

Bank hat aggregierten Verlust von 3,9 Mio EUR

b) Portfolio-VaR ≠ Summe:

$$\text{VaR}_{\text{sum}} = 350 + 200 + 700 + 150 + 600 = 2.000\text{k EUR}$$

Aber: Portfolio-VaR < 2.000k (wegen Diversifikation)
Warum:

- Swaps sind nicht perfekt korreliert
- Diversifikationseffekt reduziert Gesamt-VaR
- Nur bei Korrelation = 1 wäre VaR = Summe

c) Portfolio-VaR mit $\rho = 0{,}7$:
Faustregel: $\text{VaR}_{\text{Portfolio}} \approx 0{,}8\text{–}0{,}85 \times \text{VaR}_{\text{sum}}$ bei $\rho = 0{,}7$

$$\text{VaR}_{\text{Portfolio}} \approx 0{,}82 \times 2.000\text{k} = 1.640\text{k EUR}$$

d) Welche Swaps schließen:
Kriterien:

1. **Größter einzelner VaR:** Swap C (700k) → erste Priorität
2. **Größter Verlust (PV):** Swap C ($-2{,}0M$) → verstärkt Argument
3. **Schließe C:** Reduziert VaR um ∼575k (mit Diversifikation)

Alternative: Swap E schließen (600k VaR, $-1{,}5M$ PV)
Empfehlung: Swap C schließen (schlechtestes Risk/Return-Profil)

Lösung D.3:

a) VaR (99%, 10d):

$$\text{VaR}(10d) = \text{VaR}(1d) \times \sqrt{10} = 1{,}2 \text{ Mio} \times 3{,}162 = 3{,}794 \text{ Mio EUR}$$

b) Regulatorisches Limit:

$$\begin{aligned} \text{Limit} &= 5\% \times 50 \text{ Mio} = 2{,}5 \text{ Mio EUR} \\ \text{Aktueller VaR}(10d) &= 3{,}794 \text{ Mio EUR} \\ 3{,}794 > 2{,}5 \quad &\rightarrow \text{ LIMIT ÜBERSCHRITTEN!} \end{aligned}$$

c) Erforderliche Reduktion:

$$\begin{aligned} \text{Erforderlicher VaR} &= 2{,}5 \text{ Mio} \\ \text{Aktueller VaR} &= 3{,}794 \text{ Mio} \\ \text{Reduktionsfaktor} &= \frac{2{,}5}{3{,}794} = 0{,}659 = 65{,}9\% \\ &\rightarrow 34{,}1\% \text{ der Position schließen} \end{aligned}$$

d) Alternativen:

1. **Hedging:**
   - Lease Rate Swaps zur Kompensation
   - Gold Futures gegenläufig
   - Reduziert VaR ohne Position zu schließen
2. **Eigenkapital erhöhen:**
   - 50 Mio $\rightarrow$ 76 Mio EUR
   - $5\% \times 76$ Mio $= 3{,}8$ Mio $> 3{,}794$ Mio ✓
3. **Diversifikation:**
   - Korrelation zwischen Swaps reduzieren
   - Verschiedene Laufzeiten, Richtungen
4. **Risiko-Reduktion:**
   - Kleinere Notionals pro Swap
   - Mehr, aber kleinere Positionen
5. **VaR-Methode ändern:**
   - Historical Simulation (wenn niedriger)
   - Monte Carlo mit besserer Tail-Modellierung
   - Aber: Regulatoren müssen zustimmen

Lösung D.4:

a) Mechanik des Gold Swaps:
Bei Inception (Tag 0):

- Zentralbank: Überträgt 30 Tonnen Gold an Swap-Partner (physisch oder rechtlich)

- Swap-Partner: Zahlt 2 Mrd USD an Zentralbank
- Rechtliches Eigentum: Bleibt bei Zentralbank (wichtig für Bilanz!)
- Besitz: Temporär bei Swap-Partner

Während Laufzeit (1 Jahr):

- Zentralbank zahlt "Lease Rate" 0,8% p.a. auf 2 Mrd USD
- = 16 Mio USD pro Jahr
- Ggf. quartalsweise Zahlungen

Bei Maturity (Tag 365):

- Zentralbank: Zahlt 2 Mrd USD zurück
- Swap-Partner: Gibt Gold zurück (30 Tonnen)
- Plus finale Lease Rate Zahlung

b) Kostenvergleich:
Option 1: Gold Swap

$$\text{Kosten} = 2.000.000.000 \times 0{,}008 = 16.000.000 \text{ USD}$$
$$\text{Kosten in } \% = 0{,}8\% \text{ p.a.}$$

Option 2: USD-Kredit

$$\text{Kosten} = 2.000.000.000 \times 0{,}05 = 100.000.000 \text{ USD}$$
$$\text{Kosten in } \% = 5{,}0\% \text{ p.a.}$$

Option 3: Goldverkauf + Rückkauf

- Heute: Verkaufe 30t Gold für 2 Mrd USD
- In 1 Jahr: Kaufe Gold zurück
- **Risiko:** Gold-Preis könnte gestiegen sein!
- Wenn Gold +10%: Rückkauf kostet 2,2 Mrd USD → Verlust 200 Mio USD
- Wenn Gold -10%: Rückkauf kostet 1,8 Mrd USD → Gewinn 200 Mio USD
- Plus: Politisch inakzeptabel ("Verkauf nationaler Reserven")

Fazit:

- Gold Swap ist mit Abstand günstigster (16 Mio vs. 100 Mio)
- 84% Kostenersparnis vs. USD-Kredit
- Kein Gold-Preis-Risiko (im Gegensatz zu Verkauf)
- Politisch akzeptabel (Gold bleibt "in Besitz")

c) Risiken für Zentralbank:
Risiko 1: Gold-Preis steigt um 20%

- Gold jetzt wert: 30t × 1.560 EUR/oz = 2,52 Mrd EUR (statt 2,1 Mrd)
- Opportunitätskosten: 420 Mio EUR entgangen
- **Aber:** Kein Verlust! Gold wird zum alten Wert zurückgegeben
- Bilanz-Effekt: Unrealisierter Gewinn auf Gold

Risiko 2: Gold-Preis fällt um 20%

- Gold jetzt wert: 30t × 1.040 EUR/oz = 1,68 Mrd EUR
- Verlust: 420 Mio EUR Wertverlust
- **Aber:** Gleich wie wenn Gold in Reserve geblieben wäre
- Kein zusätzliches Risiko durch Swap

Risiko 3: USD/EUR Wechselkurs

- Wenn USD schwächer: Schulden in USD weniger wert (positiv!)
- Wenn USD stärker: Schulden in USD mehr wert (negativ)
- Typisch: USD-Schulden für Schwellenland = Währungsrisiko

Risiko 4: Counterparty-Risiko

- Swap-Partner könnte defaulten
- Gold ist weg, wenn Partner bankrott geht
- **Mitigation:** Nur mit AAA-Banken, Collateral-Vereinbarungen
- Lehman 2008: Viele Gold Swaps gingen verloren

Risiko 5: Roll-over Risiko

- Nach 1 Jahr: Muss Swap erneuert oder 2 Mrd USD zurückgezahlt werden
- Wenn Devisenlage nicht besser: Erneuter Swap nötig
- Lease Rates könnten gestiegen sein
- Abhängigkeit von Swap-Partner

d) Politische Sensitivität:
Bilanzausweis:

- Gold bleibt als Asset (rechtliches Eigentum)
- USD-Schulden erscheinen als Liability
- Netto: Bilanz verschlechtert sich (Schulden steigen)
- **Aber:** Devisenreserven steigen auch (USD Cash)

Ist das Gold wirklich noch "da"?

- Rechtlich: Ja
- Physisch: Nein (bei Swap-Partner)
- **Problem:** Opposition könnte behaupten "Gold verkauft"
- Öffentlichkeit versteht Unterschied oft nicht
- Vertrauensverlust möglich

Bei Default:

- Wenn Zentralbank 2 Mrd nicht zurückzahlen kann
- Gold geht an Swap-Partner (Collateral)
- Nationale Katastrophe ("Gold verloren")
- Regierung könnte stürzen

Vergleich zu IMF-Programm:
IMF-Programm:

- Pro: Niedrige Zinsen, langfristig
- Contra: Strenge Auflagen (Austerität, Reformen)
- Contra: Souveränitätsverlust
- Contra: Politisch toxisch ("Auslandsabhängigkeit")

Gold Swap:

- Pro: Keine politischen Auflagen
- Pro: Schnell verfügbar
- Pro: Günstiger als kommerzielle Kredite
- Contra: Gold-Risiko
- Contra: Kurzfristig (1 Jahr), kein langfristiger Fix

Politische Bewertung:

- Gold Swap = "Pragmatische Lösung"
- Regierung kann sagen: "Wir behalten Gold, nutzen es nur clever"
- Opposition kann sagen: "Gold heimlich verhökert"
- Transparenz ist kritisch!

e) Historische Beispiele (Recherche):
Türkei (2020–2021):

- Massive Gold Swaps mit kommerziellen Banken

- Volumen: >10 Mrd USD
- Devisenreserven künstlich aufgebläht
- Kritik: Intransparenz

Venezuela (2018):

- Versuchte Gold Swaps mit Russland
- Sanktionen erschwerten Deals
- Gold physisch nach Uganda geflogen

Ghana (2015):

- 1 Mrd USD Gold Swap mit Citibank
- Für Budget-Finanzierung
- Erfolgreich zurückgezahlt

Indien (1991):

- Zahlungsbilanz-Krise
- 67 Tonnen Gold an Bank of England verpfändet
- 400 Mio USD Kredit
- Gold später zurückerhalten
- Nationale Demütigung, aber hat Krise überstanden

Ägypten (2016):

- Gold Swaps für Devisenstabilisierung
- Teil breiterer Reformpakete

Wichtige Lehre:

- Gold Swaps sind gängiges Tool für Schwellenländer
- Oft Zeichen wirtschaftlicher Schwäche
- Kann funktionieren, wenn transparent und professionell gemanagt
- Risiken müssen verstanden werden
- Keine langfristige Lösung, nur Überbrückung

Teil E: Diskussionsfragen – Antworten

Die Antworten auf Teil E sind konzeptionell und sollen zur Diskussion anregen. Es gibt oft keine eindeutig "richtige" Antwort.

Antwort E.1: Modellrisiko

a) Fat Tails Konsequenzen:
Wenn Returns fat tails haben (z.B. t-Verteilung statt Normal):

- **VaR wird unterschätzt:** Normale Verteilung hat zu dünne Tails
- **Extreme Events häufiger:** 1% Quantil ist in Realität größer
- **99% VaR könnte tatsächlich 95% sein:** Mehr Verluste als erwartet

Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{Normal:} \quad & \text{VaR}(99\%) = 350\text{k} \rightarrow \text{Überschreitung 1\% der Zeit} \\ \text{Fat Tail:} \quad & \text{VaR}(99\%) = 350\text{k} \rightarrow \text{Überschreitung 5\% der Zeit!} \end{aligned}$$

b) Modellrisiko reduzieren:

1. **Backtesting:**
   - Vergleiche vorhergesagte VaR mit tatsächlichen Losses
   - Zähle VaR-Überschreitungen
   - Sollte $\approx 1\%$ sein, wenn nicht $\rightarrow$ Modell anpassen
2. **Alternative Verteilungen:**
   - t-Verteilung (Fat Tails)
   - Generalized Extreme Value (GEV)
   - Empirische Verteilung
3. **Multiple Methoden:**
   - Parametrisch, Historical, Monte Carlo gleichzeitig
   - Vergleiche Ergebnisse
   - Wenn groß abweichend $\rightarrow$ vorsichtig sein
4. **Stress Testing:**
   - Ergänze VaR mit Worst-Case-Szenarien
   - Expected Shortfall statt VaR
5. **Konservative Kalibrierung:**
   - Verwende 99,5% statt 99%
   - Safety Buffer einbauen

Antwort E.2: Lease Rate vs. Interest Rate

a) Warum Lease Rates < EUR Rates:
Typische Beobachtung: $L \approx 0{,}2\%$–$1{,}0\%$, EUR Rates $\approx 2\%$–4%
Gründe:

1. **Gold wirft keine Zinsen ab:**
   - Keine Coupons wie Anleihen
   - Lease Rate ist "Kosten des Haltens"
   - Nicht "Ertrag des Investments"
2. **Storage Costs:**
   - Gold verursacht Lagerkosten
   - Versicherung, Security
   - Lease Rate kann diese reflektieren
3. **Convenience Yield:**
   - Physisches Gold hat Wert "verfügbar zu sein"
   - Industrielle Nutzer zahlen Prämie
   - Reduziert Netto-Lease Rate
4. **Supply/Demand:**
   - Wenn viele Gold "verleihen" wollen
   - Wenige "borgen" wollen
   - $\rightarrow$ Niedriger Lease Rate

b) Wenn Lease > EUR Rates:
"Backwardation" im Gold-Markt
Bedeutung:

- Gold zu leihen ist teurer als EUR zu leihen
- Könnte auf Knappheit hindeuten
- Arbitrage-Gelegenheit:
  1. Borge EUR bei 3%
  2. Kaufe Gold
  3. Verleihe Gold bei 5%
  4. Risikoloser Gewinn 2%

Praktisch:

- Würde Lease Rates runterdrücken (mehr Angebot)
- Selbstkorrigierender Mechanismus
- Temporär in Krisen möglich

c) Historische Beispiele:
September 1999:

- Lease Rates stiegen auf 9% (!)
- Grund: Central Bank Gold Sales Agreement
- Befürchtung von Gold-Knappheit
- "Gold Squeeze"

2008 Finanzkrise:

- Lease Rates kurz über EUR Rates
- Liquidity Crunch
- Alle wollten physisches Gold, keiner wollte verleihen

2013 Cyprus Crisis:

- Lease Rates stiegen
- Sorge um Banken-Zusammenbruch
- Flight to physical Gold

Antworten E.3–E.5:

Die detaillierten Antworten für E.3–E.5 würden den Rahmen sprengen. Wichtige Stichpunkte:

E.3 (Praktische Limitationen):

- 180–250 Tage optimal (Trade-off: Stabilität vs. Aktualität)
- Wöchentliches Update empfohlen
- Bei fehlenden Lease Rates: Implizite Ableitung aus Futures, Proxies, Modellierung

E.4 (Alternative Methoden):

- Parametrisch: Schnell, einfach, aber Normalverteilungsannahme
- Historical: Keine Annahmen, aber braucht viel Daten
- Monte Carlo: Flexibel, aber rechenintensiv
- Best Practice: Alle drei verwenden!

E.5 (Geschäftssinn):
Warum Gold Swaps:

- Goldminen: Preis-Absicherung zukünftiger Produktion
- Juweliere/Hersteller: Inputkosten-Stabilität
- Zentralbanken: Devisenliquidität oder Rendite auf Reserven
- Hedging vs. Spekulation: Hängt von Underlying Exposure ab

Konkrete Beispiele:
Beispiel 1: Barrick Gold (Produzent)

- Größter Goldproduzent weltweit
- Verwendet Gold Swaps/Forwards zur Preis-Absicherung
- Sichert zukünftige Produktion zu festen Preisen ab
- Trade-off: Stabilität vs. "Selling the upside"

Beispiel 2: Rolex/Schmuckindustrie (Manufacturer)

- Benötigt große Mengen Gold für Produktion
- Gold Swaps zur Fixierung von Inputkosten
- Alternative: Physical Purchase, aber Lagerkosten und Kapitalbindung
- Planbarkeit der Produktionskosten

Beispiel 3: Deutsche Bundesbank (Zentralbank – Reserven)

- Große Gold-Reserven (3.350 Tonnen, zweitgrößte weltweit)
- Könnte theoretisch Lease Rate generieren via Swaps
- Gold "arbeiten lassen" statt ungenutzt zu lagern
- Politisch sensitiv, daher selten genutzt

Beispiel 4: Türkische Zentralbank (Zentralbank – Liquidität)

- **Situation 2020–2021:** Niedrige Devisenreserven, USD-Knappheit
- **Lösung:** Gold Swaps mit kommerziellen Banken
- **Mechanik:** Gold temporär gegen USD/EUR getauscht
- **Vorteil:** Gold bleibt in Reserve-Bilanz, günstiger als Kredit
- **Risiko:** Gold-Preis-Exposure, Counterparty-Risiko
- **Politik:** Weniger sensibel als IMF-Programm

Weitere historische Beispiele:

- **Venezuela:** Versuchte Gold Swaps mit Russland/China für USD
- **Indien (1991):** Gold Swaps während Zahlungsbilanz-Krise
- **Ägypten:** Gold Swaps zur Devisenstützung
- **Ghana, Uganda:** Afrikanische Zentralbanken nutzen Gold für Liquidität

Wichtige Erkenntnis:

- Gold Swaps sind versatile Instrumente

- Verwendung hängt stark von Institution und Situation ab
- Für Zentralbanken: Kritisches Tool für Devisenliquidität ohne Goldverkauf
- Für Produzenten/Konsumenten: Hedging-Instrument
- Politische und bilanzielle Aspekte wichtig

7 Schlusshinweise

7.1 Für Studierende

Diese Aufgabensammlung ist als Begleitmaterial zur Gold Swap Dokumentation gedacht. Es wird empfohlen:

- Bearbeiten Sie die Aufgaben in der vorgegebenen Reihenfolge
- Nutzen Sie die Musterlösungen zur Selbstkontrolle
- Experimentieren Sie mit dem Calculator für tieferes Verständnis
- Diskutieren Sie die Fallstudien in Gruppen
- Stellen Sie Fragen bei Unklarheiten

7.2 Für Dozenten

Verwendungsvorschläge:

- **Teil A:** Nach jeder Vorlesungseinheit (2–3 Aufgaben)
- **Teil B:** Wöchentliche Hausaufgaben
- **Teil C:** Labor-Sitzungen mit Calculator
- **Teil D:** Gruppen-Projekte (2–3 Studierende)
- **Teil E:** Seminar-Diskussionen

Prüfungsvorschläge:

- **Klausur:** Teil A + B (90 Min)
- **Praktische Prüfung:** Teil C (45 Min am Computer)
- **Essay:** Teil D (Take-Home, 1 Woche)
- **Mündliche Prüfung:** Teil E (20 Min pro Student)

7.3 Zeitaufwand

Teil	Bearbeitungszeit	Schwerpunkt
Teil A	2–3 Stunden	Konzepte
Teil B	4–5 Stunden	Rechnen
Teil C	3–4 Stunden	Praxis
Teil D	2–3 Stunden	Anwendung
Teil E	1–2 Stunden	Diskussion
Gesamt	**20–25 Stunden**	

Empfohlen: 1–2 Wochen Bearbeitungszeit

Viel Erfolg!
