Aufgabensammlung

Transportproblem

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Stufe 1: Leicht **2**
Aufgabe 1.1 2
Aufgabe 1.2 3

2 Stufe 2: Mittel **4**
Aufgabe 2.1 4
Aufgabe 2.2 5

3 Stufe 3: Schwer **7**
Aufgabe 3.1 7
Aufgabe 3.2 8

1 Stufe 1: Leicht

Aufgabe 1.1 – Nordwestecken-Methode

Aufgabe 1.1

Gegeben ist folgendes Transportproblem (Kosten pro Einheit):

	N_1	N_2	N_3	Angebot
A_1	2	3	5	30
A_2	4	1	6	40
A_3	3	5	2	30
Nachfrage	25	35	40	100

(a) Prüfe, ob das Problem ausgeglichen ist.

(b) Bestimme eine Startlösung mit der Nordwestecken-Methode.

(c) Berechne die Gesamtkosten der Startlösung.

(d) Wie viele Basisvariablen hat eine nicht-entartete Lösung?

Lösung: Aufgabe 1.1

(a) Ausgeglichenheit: $\sum a_i = 30 + 40 + 30 = 100 = 25 + 35 + 40 = \sum b_j$ ✓

(b) Nordwestecken-Methode:

1. $(1,1)$: $\min(30, 25) = 25$, $x_{11} = 25$. $a_1 = 5$, $b_1 = 0$.
2. $(1,2)$: $\min(5, 35) = 5$, $x_{12} = 5$. $a_1 = 0$, $b_2 = 30$.
3. $(2,2)$: $\min(40, 30) = 30$, $x_{22} = 30$. $a_2 = 10$, $b_2 = 0$.
4. $(2,3)$: $\min(10, 40) = 10$, $x_{23} = 10$. $a_2 = 0$, $b_3 = 30$.
5. $(3,3)$: $\min(30, 30) = 30$, $x_{33} = 30$. Fertig.

	N_1	N_2	N_3	Angebot
A_1	**25**(2)	**5**(3)	(5)	30
A_2	(4)	**30**(1)	**10**(6)	40
A_3	(3)	(5)	**30**(2)	30
Nachfrage	25	35	40	

(c) Gesamtkosten: $K = 25{\cdot}2 + 5{\cdot}3 + 30{\cdot}1 + 10{\cdot}6 + 30{\cdot}2 = 50 + 15 + 30 + 60 + 60 =$ **215**

(d) Basisvariablen: $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$

Aufgabe 1.2 – Minimale-Kosten-Methode

Aufgabe 1.2

Verwende dieselbe Kostenmatrix und dieselben Angebots-/Nachfragemengen wie in Aufgabe 1.1.

(a) Bestimme eine Startlösung mit der Minimalen-Kosten-Methode.

(b) Berechne die Gesamtkosten und vergleiche mit der Nordwestecken-Lösung.

(c) Welche Zelle hat die günstigsten Kosten und erhält die erste Zuweisung?

Lösung: Aufgabe 1.2

(a) Minimale-Kosten-Methode:
Günstigste Zellen der Reihe nach: $c_{22} = 1$, $c_{11} = 2$, $c_{33} = 2$, $c_{12} = 3$, $c_{31} = 3$, ...

1. $c_{22} = 1$: $x_{22} = \min(40, 35) = 35$. $b_2 = 0$, $a_2 = 5$.
2. $c_{11} = 2$: $x_{11} = \min(30, 25) = 25$. $b_1 = 0$, $a_1 = 5$.
3. $c_{33} = 2$: $x_{33} = \min(30, 40) = 30$. $a_3 = 0$, $b_3 = 10$.
4. $c_{12} = 3$ gesperrt (Spalte 2 erschöpft). $c_{13} = 5$: $x_{13} = \min(5, 10) = 5$. $a_1 = 0$.
5. $c_{23} = 6$: $x_{23} = \min(5, 5) = 5$. Fertig.

	N_1	N_2	N_3	Angebot
A_1	**25**$_{(2)}$	$_{(3)}$	**5**$_{(5)}$	30
A_2	$_{(4)}$	**35**$_{(1)}$	**5**$_{(6)}$	40
A_3	$_{(3)}$	$_{(5)}$	**30**$_{(2)}$	30
Nachfrage	25	35	40	

(b) Gesamtkosten: $K = 25{\cdot}2 + 5{\cdot}5 + 35{\cdot}1 + 5{\cdot}6 + 30{\cdot}2 = 50 + 25 + 35 + 30 + 60 =$ **200**
Vergleich: NW = 215, MC = 200 $\Rightarrow$ MC ist um 15 besser.
(c) Erste Zuweisung: Zelle $(2, 2)$ mit $c_{22} = 1$.
Minimale-Kosten-Lösung: $K = 200$ **(besser als NW mit 215)**

2 Stufe 2: Mittel

Aufgabe 2.1 – Vogel-Approximation

Aufgabe 2.1

Gegeben ist folgendes Transportproblem:

	N_1	N_2	N_3	N_4	Angebot
A_1	4	8	1	6	120
A_2	7	2	5	3	80
A_3	3	6	4	9	100
Nachfrage	90	60	70	80	300

(a) Berechne alle Strafkosten für die erste Iteration der Vogel-Approximation.

(b) Führe die vollständige Vogel-Approximation durch.

(c) Berechne die Gesamtkosten.

Lösung: Aufgabe 2.1

(a) Strafkosten Iteration 1:

	N_1	N_2	N_3	N_4	Angebot	**Strafe**
A_1	4	8	1	6	120	$4-1=\mathbf{3}$
A_2	7	2	5	3	80	$3-2=\mathbf{1}$
A_3	3	6	4	9	100	$4-3=\mathbf{1}$
Nachfrage	90	60	70	80		
Strafe	$4-3=1$	$6-2=4$	$4-1=\mathbf{3}$	$6-3=3$		

Höchste Strafe: Spalte N_2 (Strafe 4). Günstigste Zelle in N_2: $(2,2)$ mit $c=2$. $x_{22}=\min(80,60)=60$. $a_2=20$, $b_2=0$.

(b) Vollständige VAM:

Iteration 2 (ohne N_2): Strafkosten neu. Höchste Strafe: N_3 oder A_1 (Strafe 3). Wähle N_3: günstigste Zelle $(1,3)$, $c=1$. $x_{13}=\min(120,70)=70$. $a_1=50$.

Iteration 3: Höchste Strafe: A_1 (Strafe $6-4=2$). N_1: günstigste Zelle $(1,1)$, $c=4$. $x_{11}=\min(50,90)=50$. $a_1=0$, $b_1=40$.

Iteration 4: A_2 noch offen ($a_2=20$), A_3 noch offen. Strafkosten. Günstigste: $(2,4)$, $c=3$. $x_{24}=\min(20,80)=20$. $a_2=0$, $b_4=60$.

Iteration 5: A_3: $x_{31}=\min(100,40)=40$. $b_1=0$, $a_3=60$.

Iteration 6: $x_{34}=60$. Fertig.

(c) Gesamtkosten: $K = 50 \cdot 4 + 70 \cdot 1 + 60 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 3 + 60 \cdot 9 = 200 + 70 + 120 + 60 + 120 + 540 = \mathbf{1110}$
VAM-Lösung: $K = 1110$

Aufgabe 2.2 – Eine MODI-Iteration

Aufgabe 2.2

Gegeben ist folgende Basislösung eines 3×3-Transportproblems:

	N_1	N_2	N_3	Angebot
A_1	**40**$_{(2)}$	**30**$_{(3)}$	$_{(5)}$	70
A_2	$_{(7)}$	**10**$_{(4)}$	**30**$_{(1)}$	40
A_3	$_{(3)}$	$_{(2)}$	**50**$_{(6)}$	50
Nachfrage	40	40	80	

(a) Berechne die Potentiale u_i und v_j (setze $u_1 = 0$).

(b) Berechne alle reduzierten Kosten δ_{ij} für Nicht-Basiszellen.

(c) Ist die Lösung optimal? Falls nicht: welche Zelle tritt ein?

(d) Führe eine MODI-Iteration durch (Schleife, θ, neue Lösung, neue Kosten).

Lösung: Aufgabe 2.2

(a) Potentiale ($u_1 = 0$):

$$x_{11} : c_{11} = u_1 + v_1 \Rightarrow 2 = 0 + v_1 \Rightarrow v_1 = 2$$
$$x_{12} : c_{12} = u_1 + v_2 \Rightarrow 3 = 0 + v_2 \Rightarrow v_2 = 3$$
$$x_{22} : c_{22} = u_2 + v_2 \Rightarrow 4 = u_2 + 3 \Rightarrow u_2 = 1$$
$$x_{23} : c_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow 1 = 1 + v_3 \Rightarrow v_3 = 0$$
$$x_{33} : c_{33} = u_3 + v_3 \Rightarrow 6 = u_3 + 0 \Rightarrow u_3 = 6$$

(b) Reduzierte Kosten $\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$:

$$\delta_{13} = 5 - 0 - 0 = 5$$
$$\delta_{21} = 7 - 1 - 2 = 4$$
$$\delta_{31} = 3 - 6 - 2 = \mathbf{-5}$$
$$\delta_{32} = 2 - 6 - 3 = \mathbf{-7}$$

(c) Optimalität: Nein – $\delta_{32} = -7 < 0$. Eintretende Zelle: $(3, 2)$.
(d) MODI-Iteration:
Schleife für $(3, 2)$: $(3, 2)^+ \to (3, 3)^- \to (2, 3)^+ \to (2, 2)^- \to (3, 2)$... Prüfe: $(3, 2) \to (1, 2) \to (1, 1) \to (3, 1)$? Nein, $(3, 1)$ nicht Basisvariable.

Korrekte Schleife: $(3,2)^+ \to (1,2)^- \to (1,1)^+$? – $(1,1)$ liegt nicht in Spalte 2.
Schleife: $(3,2)^+ \to (2,2)^- \to (2,3)^+ \to (3,3)^-$.
$(-)$-Positionen: $x_{22} = 10$, $x_{33} = 50$. $\theta = \min(10, 50) = 10$.
Aktualisierung: $x_{32} = 0 + 10 = 10$, $x_{22} = 10 - 10 = 0$ (verlässt), $x_{23} = 30 + 10 = 40$, $x_{33} = 50 - 10 = 40$.
Kostenreduktion: $\Delta K = \delta_{32} \cdot \theta = (-7) \cdot 10 = -70$.
Alte Kosten: $40 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 30 \cdot 1 + 50 \cdot 6 = 80 + 90 + 40 + 30 + 300 = 540$.
Neue Kosten: $540 - 70 = \mathbf{470}$.
Neue Basislösung mit $K = 470$. Eintretende Zelle $(3,2)$, verlassende Zelle $(2,2)$.

3 Stufe 3: Schwer

Aufgabe 3.1 – Vollständige Optimierung

Aufgabe 3.1

Gegeben ist folgendes Transportproblem:

	N_1	N_2	N_3	N_4	Angebot
A_1	2	3	1	5	120
A_2	7	3	4	6	80
A_3	5	4	7	3	100
Nachfrage	90	70	80	60	300

(a) Bestimme eine Startlösung mit der Nordwestecken-Methode und berechne die Kosten.

(b) Führe so viele MODI-Iterationen durch, bis die Optimallösung erreicht ist.

(c) Zeige, dass die Endlösung optimal ist (alle $\delta_{ij} \geq 0$).

(d) Berechne die Kostenreduktion gegenüber der Startlösung in Prozent.

Lösung: Aufgabe 3.1

(a) Nordwestecken-Startlösung:
$(1,1)$: $x_{11} = 90$, $a_1 = 30$. $(1,2)$: $x_{12} = 30$, $a_1 = 0$. $(2,2)$: $x_{22} = 40$, $b_2 = 0$. $(2,3)$: $x_{23} = 40$, $a_2 = 0$. $(3,3)$: $x_{33} = 40$, $b_3 = 0$. $(3,4)$: $x_{34} = 60$.
$K_0 = 90{\cdot}2{+}30{\cdot}3{+}40{\cdot}3{+}40{\cdot}4{+}40{\cdot}7{+}60{\cdot}3 = 180{+}90{+}120{+}160{+}280{+}180 = \mathbf{1010}$
(b) MODI-Iteration 1:
Potentiale: $u_1 = 0$, $v_1 = 2$, $v_2 = 3$, $u_2 = 0$, $v_3 = 4$, $u_3 = 3$, $v_4 = 0$.
Reduzierte Kosten: $\delta_{13} = 1{-}0{-}4 = -3$, $\delta_{14} = 5$, $\delta_{21} = 5$, $\delta_{24} = 6$, $\delta_{31} = 0$, $\delta_{32} = -2$.
Eintretend: $(1,3)$ mit $\delta = -3$.
Schleife: $(1,3)^+ \to (1,2)^- \to (2,2)^+ \to (2,3)^-$. $\theta = \min(30, 40) = 30$.
$x_{13} = 30$, $x_{12} = 0$ (raus), $x_{22} = 70$, $x_{23} = 10$. $\Delta K = -3 \cdot 30 = -90$. $K_1 = \mathbf{920}$.
MODI-Iteration 2:
Neue Basis: $x_{11} = 90, x_{13} = 30, x_{22} = 70, x_{23} = 10, x_{33} = 40, x_{34} = 60$.
Potentiale: $u_1 = 0$, $v_1 = 2$, $v_3 = 1$, $u_2 = 3$, $v_2 = 0$, $u_3 = 6$, $v_4 = -3$.
Reduzierte Kosten (Auswahl): $\delta_{12} = 3$, $\delta_{14} = 8$, $\delta_{21} = 2$, $\delta_{24} = 6$, $\delta_{31} = -3$, $\delta_{32} = -2$.
Eintretend: $(3,1)$ mit $\delta = -3$.
Schleife: $(3,1)^+ \to (3,3)^- \to (1,3)^+ \to (1,1)^-$. $\theta = \min(40, 90) = 40$.
$x_{31} = 40$, $x_{33} = 0$ (raus), $x_{13} = 70$, $x_{11} = 50$. $\Delta K = -3 \cdot 40 = -120$. $K_2 = \mathbf{800}$.
(c) Optimalität prüfen:
Neue Basis: $x_{11} = 50, x_{13} = 70, x_{22} = 70, x_{23} = 10, x_{31} = 40, x_{34} = 60$.

Potentiale: $u_1 = 0$, $v_1 = 2$, $v_3 = 1$, $u_2 = 3$, $v_2 = 0$, $u_3 = 3$, $v_4 = 0$.
Alle reduzierten Kosten:

$$\delta_{12} = 3-0-0 = 3 \geq 0 \qquad \delta_{14} = 5-0-0 = 5 \geq 0$$
$$\delta_{21} = 7-3-2 = 2 \geq 0 \qquad \delta_{24} = 6-3-0 = 3 \geq 0$$
$$\delta_{32} = 4-3-0 = 1 \geq 0 \qquad \delta_{33} = 7-3-1 = 3 \geq 0$$

Alle $\delta_{ij} \geq 0 \Rightarrow$ **Optimallösung erreicht!**
Optimale Lösung:

	N_1	N_2	N_3	N_4	Angebot
A_1	**50**(2)	(3)	**70**(1)	(5)	120
A_2	(7)	**70**(3)	**10**(4)	(6)	80
A_3	**40**(5)	(4)	(7)	**60**(3)	100
Nachfrage	90	70	80	60	

$K^* = 50{\cdot}2+70{\cdot}1+70{\cdot}3+10{\cdot}4+40{\cdot}5+60{\cdot}3 = 100+70+210+40+200+180 =$ **800**
(d) Kostenreduktion: $\frac{1010-800}{1010} \cdot 100\% = \frac{210}{1010} \cdot 100\% \approx$ **20,8%**

Aufgabe 3.2 – Unausgeglichenes Problem und Entartung

Aufgabe 3.2

Gegeben ist folgendes **unausgeglichenes** Transportproblem:

	N_1	N_2	N_3	Angebot
A_1	3	5	2	80
A_2	6	1	4	70
A_3	4	3	7	60
Nachfrage	50	90	40	

(a) Stelle fest, ob Angebot oder Nachfrage überwiegt, und ergänze einen fiktiven Anbieter oder Nachfrager mit Kosten 0.

(b) Bestimme eine Startlösung mit der Minimalen-Kosten-Methode.

(c) Erkläre, was **Entartung** bedeutet, und beschreibe, wann sie auftritt.

(d) Tritt in der Startlösung Entartung auf? Begründe.

(e) Führe eine MODI-Iteration durch und berechne die optimalen Kosten (ohne fiktive Transportmengen).

Lösung: Aufgabe 3.2

(a) Ausgeglichenheit: $\sum a_i = 80+70+60 = 210$, $\sum b_j = 50+90+40 = 180$. Angebot > Nachfrage: Überschuss von 30. Füge fiktiven Nachfrager N_4 mit $b_4 = 30$ und $c_{i4} = 0$ für alle i hinzu.

(b) Minimale-Kosten-Methode (mit N_4):

Günstigste Zellen: $c_{22} = 1$, $c_{13} = 2$, $c_{23} = 4$ wäre nach $c_{31} = 4$... Reihenfolge: $(2,2) = 1$, $(1,3) = 2$, $(3,1) = 4$ wäre nach fiktiver Spalte $c_{i4} = 0$.

Mit $c_{i4} = 0$: zuerst $(1,4)$, $(2,4)$ oder $(3,4)$ – wähle $(1,4)$: $x_{14} = \min(80, 30) = 30$. $b_4 = 0$.

Dann $(2,2) = 1$: $x_{22} = \min(70, 90) = 70$. $a_2 = 0$, $b_2 = 20$. Dann $(1,3) = 2$: $x_{13} = \min(50, 40) = 40$. $b_3 = 0$, $a_1 = 10$. Dann $(1,2) = 5$ oder $(3,2) = 3$: $(3,2) = 3$: $x_{32} = \min(60, 20) = 20$. $b_2 = 0$, $a_3 = 40$. Dann $(1,2) = 5$: $x_{12} = \min(10, 0)$... $b_2 = 0$ erschöpft. $(1,1) = 3$: $x_{11} = 10$. $a_1 = 0$. Schließlich $x_{31} = \min(40, 40) = 40$. Fertig.

Startlösung: $x_{14} = 30$, $x_{11} = 10$, $x_{13} = 40$, $x_{22} = 70$, $x_{32} = 20$, $x_{31} = 40$.

Kosten (ohne N_4): $10{\cdot}3+40{\cdot}2+70{\cdot}1+40{\cdot}4+20{\cdot}3 = 30+80+70+160+60 =$ **400**

(c) Entartung: Eine Basislösung ist **entartet**, wenn die Anzahl der Basisvariablen kleiner als $m+n-1$ ist, d. h. eine Basisvariable den Wert 0 annimmt. Dies tritt auf, wenn beim Zuweisungsschritt gleichzeitig Angebot und Nachfrage einer Zeile/Spalte erschöpft werden. Entartung erfordert das künstliche Einführen einer Basisvariablen mit Wert 0 ("Epsilon-Zuweisung").

(d) Entartung in der Startlösung: Das erweiterte Problem hat $m = 3$, $n = 4$, also $m+n-1 = 6$ Basisvariablen nötig. Die obige Lösung hat 6 Basisvariablen $(x_{14}, x_{11}, x_{13}, x_{22}, x_{32}, x_{31}) \Rightarrow$ **keine Entartung**.

(e) MODI-Iteration:

Basis (erweitertes Problem): Potentiale berechnen, reduzierte Kosten prüfen. $u_1 = 0$: $v_1 = 3$ (aus x_{11}), $v_3 = 2$ (aus x_{13}), $v_4 = 0$ (aus x_{14}). u_2: aus x_{22}: $u_2 = 1 - v_2$... v_2 noch unbekannt. Aus x_{32}: $u_3 + v_2 = 3$. Aus x_{31}: $u_3 + v_1 = 4 \Rightarrow u_3 = 1$. $v_2 = 3-1 = 2$. $u_2 = 1-2 = -1$.

Reduzierte Kosten (reale Zellen): $\delta_{12} = 5-0-2 = 3$, $\delta_{21} = 6-(-1)-3 = 4$, $\delta_{23} = 4-(-1)-2 = 3$, $\delta_{33} = 7-1-2 = 4$.

Alle $\delta_{ij} \geq 0$ für reale Zellen. $\Rightarrow$ Startlösung bereits **optimal!**

Optimale Kosten (ohne fiktive Transporte): **400**

Problem war nicht ausgeglichen; nach Ergänzung N_4 ist die MC-Startlösung bereits optimal mit $K = 400$.