Spieltheorie

Modul 4: Kooperative Spieltheorie

Shapley-Wert, Core, Nash-Verhandlung und Nukleolus

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Vollständige Einführung mit Theorie, drei durchgerechneten Beispielen
und Beschreibung des interaktiven Tools

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Was ist kooperative Spieltheorie? 2

2 Grundbegriffe 2

3 Der Shapley-Wert 3
3.1 Grundidee . . . 3
3.2 Äquivalente Permutationsformel . . . 4
3.3 Die vier Shapley-Axiome . . . 4

4 Der Core (Kern) 4

5 Nash-Verhandlungslösung 5

6 Vollständiges Beispiel 1: Produktionskoalition 6
6.1 Superadditivität prüfen . . . 6
6.2 Shapley-Wert berechnen . . . 6
6.3 Core-Bedingungen prüfen . . . 7

7 Beispiel 2: Stimmgewichte und Shapley-Machtwert 7
7.1 Gewinnende Koalitionen . . . 8
7.2 Shapley-Machtwert . . . 8

8 Beispiel 3: Kostenaufteilung – Nash-Verhandlung 9
8.1 Shapley-Wert der Einsparungen . . . 9
8.2 Nash-Verhandlungslösung . . . 9

9 Toolbeschreibung: Spieltheorie Modul 4 9
9.1 Eingabe . . . 9
9.2 Ausgabe – 5 Schritte . . . 10

10 Zusammenfassung 10

1 Was ist kooperative Spieltheorie?

In den Modulen 1–3 haben wir **nicht-kooperative** Spiele analysiert: Spieler handeln unabhängig, es gibt keine bindenden Vereinbarungen. Die **kooperative Spieltheorie** fragt stattdessen:

- Welche **Koalitionen** (Gruppen von Spielern) werden gebildet?
- Wie wird der gemeinsam erzielte Wert **fair aufgeteilt**?
- Welche Aufteilungen sind **stabil** – d. h. hat keine Gruppe einen Anreiz, die Vereinbarung zu verlassen?

Typische Anwendungen

- **Unternehmenskooperationen:** Welche Firmen bilden ein Konsortium? Wie werden Synergien aufgeteilt?
- **Politische Koalitionen:** Wie viel Macht hat eine Partei in einer Regierungskoalition tatsächlich?
- **Kostenaufteilung:** Wie teilen Städte die Kosten eines gemeinsamen Infrastrukturprojekts?
- **Patente und Lizenzen:** Wie wird der Gewinn aus einer gemeinsamen Erfindung aufgeteilt?
- **Insolvenzrecht:** Wie wird das Vermögen eines bankrotten Unternehmens gerecht auf die Gläubiger verteilt?

2 Grundbegriffe

Definition: Kooperatives Spiel in charakteristischer Funktion

Ein **kooperatives Spiel** (N, v) besteht aus:

- einer Menge von Spielern $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
- einer **charakteristischen Funktion** $v : 2^N \to \mathbb{R}$, die jeder Koalition $S \subseteq N$ ihren Wert $v(S)$ zuordnet

Konventionen:

$$v(\emptyset) = 0, \qquad v(\{i\}) \geq 0 \quad \text{(Alleingang)}$$

$v(S)$ ist der Wert (Gewinn, Nutzen), den die Koalition S sicher erreichen kann, *unabhängig* von den Aktionen der Spieler außerhalb S.

Definition: Superadditivität und Essentialität

Ein Spiel (N, v) heißt:

- **superadditiv**, wenn für alle disjunkten $S, T \subseteq N$:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$$

  Kooperation ist immer mindestens so gut wie Nicht-Kooperation.

- **wesentlich** (essential), wenn:

$$v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\})$$

  Zusammenarbeit schafft echten Mehrwert.

- **konvex**, wenn für alle $S \subseteq T$ und $i \notin T$:

$$v(T \cup \{i\}) - v(T) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S)$$

  Marginalbeiträge nehmen mit der Koalitionsgröße zu.

Definition: Imputation (zulässige Aufteilung)

Ein Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt **Imputation**, wenn:

- **Effizienz:** $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ (Gesamtwert wird verteilt)
- **Individualrationalität:** $x_i \geq v(\{i\})$ (jeder erhält mindestens seinen Alleingangswert)

3 Der Shapley-Wert

3.1 Grundidee

Der **Shapley-Wert** (Lloyd S. Shapley, 1953) ist die eindeutige faire Aufteilung, die vier grundlegende Axiome erfüllt. Die Idee: Jeder Spieler erhält seinen *durchschnittlichen Marginalbeitrag* über alle möglichen Reihenfolgen, in denen er der Koalition beitritt.

Definition: Shapley-Wert

Der **Shapley-Wert** von Spieler i ist:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(n - |S| - 1)!}{n!} \big[v(S \cup \{i\}) - v(S)\big]$$

Der Term $[v(S \cup \{i\}) - v(S)]$ ist der **Marginalbeitrag** von Spieler i, wenn er einer Koalition S beitritt. Das Gewicht $\frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau die Spieler in S vor i ankommen (bei gleichverteilter Reihenfolge).

3.2 Äquivalente Permutationsformel

Satz: Permutationsdarstellung

Sei $\Pi(N)$ die Menge aller $n!$ Permutationen (Reihenfolgen) der Spieler. Für eine Permutation σ sei $P_i^\sigma = \{j : \sigma(j) < \sigma(i)\}$ die Menge der Spieler, die in Reihenfolge σ vor i kommen. Dann gilt:

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Pi(N)} \left[v(P_i^\sigma \cup \{i\}) - v(P_i^\sigma) \right]$$

Algorithmus: Liste alle $n!$ Reihenfolgen auf; berechne für jede den Marginalbeitrag von i; bilde den Durchschnitt.

3.3 Die vier Shapley-Axiome

Satz: Eindeutigkeit des Shapley-Werts

Der Shapley-Wert ist die **einzige** Aufteilungsregel, die gleichzeitig folgende Axiome erfüllt:

1. **Effizienz:** $\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$
   Der gesamte Wert wird aufgeteilt.
2. **Symmetrie:** Wenn $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ für alle $S \not\ni i, j$, dann $\phi_i = \phi_j$.
   Spieler mit identischen Beiträgen werden gleich behandelt.
3. **Dummy-Eigenschaft:** Wenn $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ für alle $S \not\ni i$, dann $\phi_i = 0$.
   Ein Spieler ohne Beitrag erhält nichts.
4. **Additivität:** $\phi_i(v + w) = \phi_i(v) + \phi_i(w)$ für alle Spiele v, w.

4 Der Core (Kern)

Definition: Core

Der **Core** (Kern) eines kooperativen Spiels ist die Menge aller Imputationen x, gegen die keine Koalition S "blockieren" kann:

$$\mathcal{C}(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i \in N} x_i = v(N) \;\text{ und }\; \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\ \forall S \subseteq N \right\}$$

Eine Verteilung x liegt im Core, wenn gilt:

- **Effizienz:** Der Gesamtwert wird vollständig verteilt.
- **Koalitionsrationalität:** Jede Teilgruppe S erhält mindestens das, was sie allein erreichen könnte. Sonst hätte S einen Anreiz, die große Koalition zu verlassen.

Wann ist der Core leer? Bei manchen Spielen gibt es keine stabile Aufteilung (Core leer). Dann hat immer irgendjemand einen Anreiz abzuweichen. Bei **konvexen Spielen** ist der Core garantiert nicht leer (Satz von Shapley 1971), und der Shapley-Wert liegt immer im Core.

Satz: Shapley-Wert im Core bei konvexen Spielen

Wenn (N, v) konvex ist, dann gilt $\phi(v) \in \mathcal{C}(v)$.

5 Nash-Verhandlungslösung

Bei **zwei Spielern** gibt es eine elegante axiomatische Lösung.

Definition: Nash-Verhandlungsproblem

Ein **Nash-Verhandlungsproblem** (F, d) besteht aus:

- $F \subseteq \mathbb{R}^2$: Menge der möglichen Auszahlungspaare
- $d = (d_1, d_2)$: **Statusquo** (Disagreement-Punkt) – was die Spieler bekommen, wenn keine Einigung erzielt wird

Nash-Verhandlungslösung – einfacher Fall

Wenn die Pareto-Grenze linear ist (feste Teilungsmenge V):

$$x_1 + x_2 = V, \quad x_i \geq d_i$$

maximiert die Nash-Lösung das **Nash-Produkt**:

$$(x_1 - d_1)(x_2 - d_2) \to \max$$

Die Lösung ist:

$$x_1^* = \frac{V + d_1 - d_2}{2}, \qquad x_2^* = \frac{V + d_2 - d_1}{2}$$

Interpretation: Der Surplus $V - d_1 - d_2$ wird **zu gleichen Teilen** zwischen den Spielern aufgeteilt.

Nash-Axiome (1950)

Die Nash-Verhandlungslösung ist die einzige Lösung, die **Effizienz**, **Symmetrie**, **Skalierungsinvarianz** und **Unabhängigkeit irrelevanter Alternativen (IIA)** erfüllt.

6 Vollständiges Beispiel 1: Produktionskoalition

Szenario: Drei Firmen

Drei Firmen A, B, C können allein oder in Koalitionen produzieren. Koalitionen ermöglichen Arbeitsteilung und Skaleneffekte. Die charakteristische Funktion (Gewinn in Tsd. €):

$$v(\{A\}) = 10,\ v(\{B\}) = 15,\ v(\{C\}) = 8$$

$$v(\{A,B\}) = 40,\ v(\{A,C\}) = 30,\ v(\{B,C\}) = 35,\ v(\{A,B,C\}) = 60$$

6.1 Superadditivität prüfen

Koalition	$v(S \cup T)$	$v(S) + v(T)$	Superadditiv?
$\{A,B\}$ vs $\{A\} + \{B\}$	40	25	$40 \geq 25$ ✓
$\{A,C\}$ vs $\{A\} + \{C\}$	30	18	$30 \geq 18$ ✓
$\{B,C\}$ vs $\{B\} + \{C\}$	35	23	$35 \geq 23$ ✓
$\{A,B,C\}$ vs $\{A,B\} + \{C\}$	60	48	$60 \geq 48$ ✓

Das Spiel ist superadditiv und wesentlich: $v(\{A,B,C\}) = 60 > 10 + 15 + 8 = 33$. Kooperation schafft einen Surplus von 27.

6.2 Shapley-Wert berechnen

Es gibt $3! = 6$ Permutationen. Wir berechnen den Marginalbeitrag von Firma A in jeder Reihenfolge:

Reihenfolge	Marginal A	Marginal B	Margi
A, B, C	$v(\{A\}) - v(\emptyset) = 10$	$v(\{A,B\}) - v(\{A\}) = 30$	$v(\{A,B,C\}) -$
A, C, B	10	$v(\{A,B,C\}) - v(\{A,C\}) = 30$	$v(\{A,C\}) -$
B, A, C	$v(\{A,B\}) - v(\{B\}) = 25$	15	$v(\{A,B,C\}) -$
B, C, A	$v(\{A,B,C\}) - v(\{B,C\}) = 25$	15	$v(\{B,C\}) -$
C, A, B	$v(\{A,C\}) - v(\{C\}) = 22$	$v(\{A,B,C\}) - v(\{A,C\}) = 30$	8
C, B, A	$v(\{A,B,C\}) - v(\{B,C\}) = 25$	$v(\{B,C\}) - v(\{C\}) = 27$	8
Summe	**117**	**147**	**9**
Shapley ($\div 6$)	**19,5**	**24,5**	**1**

Kontrolle: $19{,}5 + 24{,}5 + 16 = 60 = v(\{A,B,C\})$ ✓

6.3 Core-Bedingungen prüfen

Die Verteilung $(x_A, x_B, x_C) = (19{,}5,\ 24{,}5,\ 16)$ muss alle Koalitionsrationalitätsbedingungen erfüllen:

Bedingung	Shapley-Summe	$v(S)$	Erfüllt?
$x_A \geq v(\{A\})$	19,5	10	✓
$x_B \geq v(\{B\})$	24,5	15	✓
$x_C \geq v(\{C\})$	16	8	✓
$x_A + x_B \geq v(\{A,B\})$	44	40	✓
$x_A + x_C \geq v(\{A,C\})$	35,5	30	✓
$x_B + x_C \geq v(\{B,C\})$	40,5	35	✓
$x_A + x_B + x_C = v(N)$	60	60	✓

Der Shapley-Wert $(19{,}5,\ 24{,}5,\ 16)$ **liegt im Core!** Die große Koalition $\{A,B,C\}$ ist stabil.

7 Beispiel 2: Stimmgewichte und Shapley-Machtwert

Szenario: Vier-Parteien-Parlament

Vier Parteien haben folgende Sitzanteile (Stimmen für Mehrheitsentscheidungen benötigen $q = 51$ von 100 Stimmen):

$$w_1 = 40,\ w_2 = 30,\ w_3 = 20,\ w_4 = 10$$

Charakteristische Funktion: $v(S) = 1$ falls $\sum_{i \in S} w_i \geq 51$, sonst $v(S) = 0$.

7.1 Gewinnende Koalitionen

Koalition	Stimmen	$v(S)$	Gewinnend?
$\{1,2\}$	70	1	Ja
$\{1,3\}$	60	1	Ja
$\{1,4\}$	50	0	Nein
$\{2,3\}$	50	0	Nein
$\{2,4\}$	40	0	Nein
$\{3,4\}$	30	0	Nein
$\{1,2,3\}$	90	1	Ja
$\{1,2,4\}$	80	1	Ja
$\{1,3,4\}$	70	1	Ja
$\{2,3,4\}$	60	1	Ja
$\{1,2,3,4\}$	100	1	Ja

7.2 Shapley-Machtwert

Für $n = 4$ gibt es $4! = 24$ Permutationen. Spieler i ist **pivotal**, wenn er die Koalition von verlierend auf gewinnend bringt. Shapley-Machtwert = Anteil der Permutationen, in denen i pivotal ist.

Partei	Stimmanteil	Shapley-Machtwert ϕ_i
Partei 1 (40%)	40%	$\phi_1 = \frac{10}{24} \approx \mathbf{41{,}7}\%$
Partei 2 (30%)	30%	$\phi_2 = \frac{6}{24} = \mathbf{25{,}0}\%$
Partei 3 (20%)	20%	$\phi_3 = \frac{6}{24} = \mathbf{25{,}0}\%$
Partei 4 (10%)	10%	$\phi_4 = \frac{2}{24} \approx \mathbf{8{,}3}\%$

Interpretation:

- Partei 1 hat *mehr* Macht als ihr Stimmanteil suggeriert (41,7% > 40%), da sie in vielen Koalitionen pivotal ist.
- Partei 4 hat *weniger* reale Macht (8,3% < 10%), da sie selten den entscheidenden Ausschlag gibt.
- Partei 2 und 3 haben denselben Machtwert (25%), obwohl 2 mehr Stimmen hat – beide sind gleich oft pivotal!

8 Beispiel 3: Kostenaufteilung – Nash-Verhandlung

Szenario: Zwei Städte bauen gemeinsam eine Wasserleitung

Städte A und B wollen gemeinsam eine Wasserleitung bauen. Allein würde A 80 Mio. €, B 60 Mio. € kosten. Gemeinsam kostet die Leitung nur 100 Mio. €.
Statusquo: Jede Stadt zahlt ihre Einzelkosten $d_A = 80$, $d_B = 60$ (wenn keine Einigung). Ersparnis durch Kooperation: 40 Mio. €.
Formulierung als Kostenaufteilungsspiel: Einsparungen: $v(\{A\}) = 0$, $v(\{B\}) = 0$, $v(\{A, B\}) = 80 + 60 - 100 = 40$.

8.1 Shapley-Wert der Einsparungen

Für $n = 2$ gibt es $2! = 2$ Permutationen:

Reihenfolge	Marginal A	Marginal B
A, B	$v(\{A\}) = 0$	$v(\{A, B\}) - v(\{A\}) = 40$
B, A	$v(\{A, B\}) - v(\{B\}) = 40$	$v(\{B\}) = 0$
Shapley ($\div 2$)	$\phi_A = 20$	$\phi_B = 20$

Jede Stadt erhält die gleiche Einsparung von 20 Mio. €.
Kostenbeitrag: A zahlt $80 - 20 = \mathbf{60}$ Mio. €, B zahlt $60 - 20 = \mathbf{40}$ Mio. €.

8.2 Nash-Verhandlungslösung

Statusquo: $d_A = 0$, $d_B = 0$ (keine Einsparung ohne Kooperation). Gesamteinsparung $V = 40$.

$$x_A^* = \frac{40 + 0 - 0}{2} = \mathbf{20}, \qquad x_B^* = \frac{40 + 0 - 0}{2} = \mathbf{20}$$

Bei symmetrischem Statusquo stimmen Shapley-Wert und Nash-Lösung überein: Beide Städte teilen die Einsparung gleich auf.

9 Toolbeschreibung: Spieltheorie Modul 4

Kooperative Spieltheorie – Interaktives Tool

Das Tool berechnet Shapley-Wert, Core-Bedingungen und Nash-Verhandlungslösung für kooperative Spiele mit 2 bis 5 Spielern.

9.1 Eingabe

- **Spieleranzahl:** 2 bis 5 Spieler.
- **Spielernamen:** frei editierbar (z. B. Firma A, Stadt 1, Partei X).

- **Koalitionswerte $v(S)$:** Für jede nicht-leere Koalition S den Wert eingeben – was die Koalition allein erreichen kann.
- **3 Beispiele:** Produktionskoalition, Stimmgewichte, Kostenaufteilung.

9.2 Ausgabe – 5 Schritte

1. **Spieleigenschaften:** Superadditivität prüfen, Essentialität, Mehrwert durch Kooperation.
2. **Shapley-Wert:** Vollständige Permutationstabelle (für $n \leq 3$), Marginalbeiträge, finale Aufteilung mit Effizienzprüfung.
3. **Core-Analyse:** Alle Koalitionsrationalitätsbedingungen tabellarisch; liegt der Shapley-Wert im Core?
4. **Nash-Verhandlung (2 Spieler):** Nash-Produkt, Statusquo, optimale Aufteilung. Für $n \geq 3$: Shapley vs. proportionale Aufteilung.
5. **Interpretation:** Stärkster/schwächster Spieler, Axiome, Empfehlung für die Kooperation.

Balkendiagramm: Shapley-Werte grafisch für alle Spieler.

10 Zusammenfassung

Kernpunkte: Modul 4 – Kooperative Spieltheorie

1. **Kooperatives Spiel:** (N, v) mit charakteristischer Funktion $v : 2^N \to \mathbb{R}$; $v(S)$ = Wert der Koalition S.
2. **Superadditivität:** $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ – Kooperation ist immer vorteilhaft.
3. **Shapley-Wert:** Jeder Spieler erhält seinen durchschnittlichen Marginalbeitrag über alle $n!$ Permutationen. Eindeutig durch 4 Axiome (Effizienz, Symmetrie, Dummy, Additivität).
4. **Core:** Menge aller stabilen Imputationen – keine Koalition kann durch Abspaltung gewinnen. Bei konvexen Spielen: Core immer nicht leer, Shapley-Wert im Core.
5. **Nash-Verhandlungslösung (2 Spieler):** Maximiert das Nash-Produkt $(x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$; teilt den Surplus gleich auf.
6. **Shapley-Machtwert:** Misst politische Macht in Abstimmungsspielen – kann vom nominalen Stimmanteil abweichen.
7. **Kostenaufteilungsspiele:** Charakteristische Funktion = Einsparungen; Shapley-Wert gibt faire, stabile Kostenteilung.