Spieltheorie

Modul 3: Nicht-Nullsummenspiele

Nash-Gleichgewicht, Pareto-Effizienz und soziale Dilemmata

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Vollständige Einführung mit Herleitung der Auszahlungsmatrizen,
Schritt-für-Schritt-Analyse und drei durchgerechneten Beispielen

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Was ist ein Nicht-Nullsummenspiel? 2

2 Grundbegriffe 2

3 Beispiel 1: Gefangenendilemma 3
- 3.1 Die Spielsituation . . . 3
- 3.2 Herleitung der Auszahlungsmatrix . . . 3
- 3.3 Die Auszahlungsmatrix . . . 4
- 3.4 Schritt 1: Beste Antworten . . . 4
- 3.5 Schritt 2: Nash-Gleichgewicht . . . 4
- 3.6 Schritt 3: Pareto-Analyse . . . 4

4 Beispiel 2: Koordinationsspiel – Technologiestandard 5
- 4.1 Die Spielsituation . . . 5
- 4.2 Herleitung der Auszahlungsmatrix . . . 5
- 4.3 Die Auszahlungsmatrix . . . 6
- 4.4 Schritt 1: Beste Antworten . . . 6
- 4.5 Schritt 2: Nash-Gleichgewichte . . . 6
- 4.6 Schritt 3: Pareto-Analyse . . . 6

5 Beispiel 3: Preisverhandlung 7
- 5.1 Die Spielsituation . . . 7
- 5.2 Herleitung der Auszahlungsmatrix . . . 8
- 5.3 Die Auszahlungsmatrix . . . 8
- 5.4 Pareto-Analyse . . . 9

6 Theorie: Auszahlungsraum und Pareto-Grenze 9

7 Toolbeschreibung: Spieltheorie Modul 3 10
- 7.1 Eingabe . . . 10
- 7.2 Ausgabe – 5 Schritte . . . 10

8 Zusammenfassung 11

1 Was ist ein Nicht-Nullsummenspiel?

In einem **Nicht-Nullsummenspiel** hängen die Gewinne beider Spieler voneinander ab – aber was einer gewinnt, muss der andere *nicht* verlieren. Es gibt Situationen, in denen beide gewinnen, beide verlieren, oder einer gewinnt mehr als der andere verliert.

Definition: Nicht-Nullsummenspiel

Ein Zwei-Personen-Spiel heißt **Nicht-Nullsummenspiel**, wenn für mindestens eine Strategiekombination gilt:

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) \neq 0$$

Die Gesamtauszahlung variiert je nach Strategiekombination. Beide Spieler können gleichzeitig gewinnen oder verlieren.

Unterschied zu Nullsummenspielen

	Nullsummenspiel	**Nicht-Nullsummenspiel**
Summe	immer 0	variiert
Interessen	vollständig entgegengesetzt	teils entgegengesetzt, teils gemeinsam
Kooperation	unmöglich	möglich und oft vorteilhaft
Beispiele	Schach, Poker	Handel, Preisverhandlung, Umwelt

Die zentralen Fragen in Nicht-Nullsummenspielen:

- Wo liegt das **Nash-Gleichgewicht** – und ist es stabil?
- Ist das Nash-GG **Pareto-effizient**, oder gibt es bessere Ergebnisse für beide?
- Gibt es ein **soziales Dilemma** – individuelle Rationalität führt zum kollektiv schlechten Ergebnis?
- Gibt es ein **Koordinationsproblem** – mehrere GG, und wie einigen sich die Spieler?

2 Grundbegriffe

Definition: Pareto-Dominanz und Pareto-Effizienz

Ein Ergebnis (s_1, s_2) **Pareto-dominiert** (s_1', s_2'), wenn:

$$u_1(s_1, s_2) \geq u_1(s_1', s_2') \quad \text{und} \quad u_2(s_1, s_2) \geq u_2(s_1', s_2')$$

mit mindestens einer strikten Ungleichung.
Ein Ergebnis ist **Pareto-effizient** (Pareto-optimal), wenn es von keinem anderen Ergebnis Pareto-dominiert wird: kein Spieler kann bessergestellt werden, ohne den anderen schlechterzustellen.

Definition: Soziales Dilemma

Ein **soziales Dilemma** liegt vor, wenn das Nash-Gleichgewicht *nicht* Pareto-effizient ist: individuelle Rationalität führt zu einem kollektiv suboptimalen Ergebnis.

3 Beispiel 1: Gefangenendilemma

3.1 Die Spielsituation

Szenario: Zwei Verdächtige

Zwei Verdächtige werden getrennt verhört. Jeder entscheidet ohne Wissen über die Entscheidung des anderen:

- **Schweigen** (kooperieren): keine Aussage gegen den anderen
- **Gestehen** (defektieren): Aussage gegen den anderen machen

3.2 Herleitung der Auszahlungsmatrix

Die Auszahlungen sind Strafjahre (negativ = Strafe, 0 = freigelassen):

Kombination	Was passiert?	Auszahlung (A, B)
Schweigen – Schweigen	Kein Geständnis. Geringe Beweise. Beide kommen mit kleiner Strafe davon.	$(-1, -1)$
Schweigen – Gestehen	B gesteht, A schweigt. B kommt frei (Kronzeuge), A bekommt die volle Strafe.	$(-10, 0)$
Gestehen – Schweigen	A gesteht, B schweigt. A kommt frei, B bekommt die volle Strafe.	$(0, -10)$
Gestehen – Gestehen	Beide gestehen. Gegenseitige Belastung – beide bekommen eine mittlere Strafe.	$(-6, -6)$

3.3 Die Auszahlungsmatrix

Verdächtiger A \ Verdächtiger B	Schweigen	Gestehen
Schweigen	$(-1,\ -1)$	$(-10,\ 0)$
Gestehen	$(0,\ -10)$	$(-6,\ -6)$ ★ Nash-GG

3.4 Schritt 1: Beste Antworten

Beste Antworten von Verdächtigem A:

	B schweigt	B gesteht	Beste Antwort A
A schweigt	-1	-10	
A gesteht	**0**	**−6**	Gestehen (immer besser!)

Egal was B tut: $0 > -1$ (wenn B schweigt) und $-6 > -10$ (wenn B gesteht). ⇒ **Gestehen ist strikt dominant für A.**

Dieselbe Analyse gilt symmetrisch für B. ⇒ **Gestehen ist strikt dominant für B.**

3.5 Schritt 2: Nash-Gleichgewicht

Da Gestehen für beide dominant ist, ist das einzige Nash-GG:

$$\text{Nash-GG:}\quad (\text{Gestehen},\ \text{Gestehen}) = (-6,\ -6)$$

Prüfung: Kann A sich verbessern wenn B gesteht? A Schweigen: $-10 < -6$. Nein. ✓ Kann B sich verbessern wenn A gesteht? B Schweigen: $-10 < -6$. Nein. ✓

3.6 Schritt 3: Pareto-Analyse

Ergebnis	A	B	Summe	Pareto?
(Schweigen, Schweigen)	-1	-1	-2	**Pareto-effizient**
(Schweigen, Gestehen)	-10	0	-10	Pareto-effizient
(Gestehen, Schweigen)	0	-10	-10	Pareto-effizient
(Gestehen, Gestehen)	-6	-6	-12	**Pareto-dominiert!**

Das Nash-GG $(-6, -6)$ wird von $(-1, -1)$ Pareto-dominiert:

$$-1 > -6 \quad \text{(A besser)} \quad \text{und} \quad -1 > -6 \quad \text{(B besser)}$$

Das Dilemma: Das Nash-GG ist *nicht* Pareto-effizient. Beide wären mit (Schweigen, Schweigen) = $(-1, -1)$ besser dran – aber jeder hat einen Anreiz, heimlich zu gestehen und den anderen zu verraten. Ohne Vertrauen landen beide im schlechtesten Ergebnis.

Lösungsansätze:

- *Wiederholtes Spiel:* Bei langfristiger Beziehung entsteht Vertrauen. "Tit-for-Tat": Kooperiere, solange der andere kooperiert.
- *Bindende Vereinbarung:* Vertrag mit Strafe für Verrat.
- *Externe Instanz:* Gemeinsame Anwälte, Gewerkschaft etc.

4 Beispiel 2: Koordinationsspiel – Technologiestandard

4.1 Die Spielsituation

Szenario: Zwei Firmen wählen einen Industriestandard

Firma X und Firma Y bringen neue Geräte auf den Markt. Sie müssen sich für einen technischen Standard entscheiden: **Standard A** oder **Standard B**. Produkte verschiedener Standards sind *inkompatibel* – Kunden kaufen nur, wenn beide Firmen denselben Standard unterstützen.

4.2 Herleitung der Auszahlungsmatrix

Kombination	Was passiert?	Auszahlung (X, Y)
Standard A – Standard A	Vollständige Kompatibilität. Großer Markt. Standard A ist der neuere – höhere Auszahlung.	(4, 4)
Standard A – Standard B	Inkompatibel. Kunden kaufen nicht. Beide leer aus.	(0, 0)
Standard B – Standard A	Inkompatibel. Kein Markt.	(0, 0)
Standard B – Standard B	Kompatibel. Standard B ist älter/günstiger – etwas kleinerer Markt.	(3, 3)

4.3 Die Auszahlungsmatrix

Firma X \ Firma Y	Standard A	Standard B
Standard A	(4, 4) ★ Nash-GG 1	(0, 0)
Standard B	(0, 0)	(3, 3) ★ Nash-GG 2

4.4 Schritt 1: Beste Antworten

Beste Antworten von Firma X:

- Wenn Y Standard A wählt: $4 > 0 \Rightarrow$ X wählt Standard A
- Wenn Y Standard B wählt: $3 > 0 \Rightarrow$ X wählt Standard B

X hat keine dominante Strategie – die beste Antwort hängt davon ab, was Y tut. Dieselbe Analyse gilt symmetrisch für Y.

4.5 Schritt 2: Nash-Gleichgewichte

Es gibt **zwei** Nash-Gleichgewichte:

- **(Standard A, Standard A)** = $(4, 4)$: Keiner will abweichen (Abweichung $\rightarrow 0 < 4$).
- **(Standard B, Standard B)** = $(3, 3)$: Keiner will abweichen (Abweichung $\rightarrow 0 < 3$).

4.6 Schritt 3: Pareto-Analyse

Ergebnis	X	Y	Pareto?
(A, A)	4	4	**Pareto-effizient**
(A, B)	0	0	Pareto-dominiert durch (A,A) und (B,B)
(B, A)	0	0	Pareto-dominiert
(B, B)	3	3	**Pareto-effizient**

Beide Nash-GG sind Pareto-effizient – kein soziales Dilemma. Aber: (A,A) ist *besser* für beide als (B,B).

Das Koordinationsproblem: Beide GG sind stabil, aber eines ist besser ($4 > 3$). Ohne Absprache können beide bei $(0, 0)$ landen – dem schlechtesten Ergebnis. Und selbst wenn beide wissen, dass (A,A) besser ist: Wenn X unsicher ist ob Y Standard A wählt, könnte X lieber Standard B nehmen ("sicherer" wenn Y auch B nimmt).

Lösungsansätze:

- *Kommunikation:* Direkte Absprache – "Wir nehmen Standard A."
- *Focal Point:* Welcher Standard ist "natürlicher"? (Schelling-Punkt: der neuere Standard A)
- *Industrienorm:* Branchenverband legt Standard A als Norm fest.
- *First-Mover:* Wer zuerst öffentlich Standard A ankündigt, zwingt den anderen zur Koordination.

5 Beispiel 3: Preisverhandlung

5.1 Die Spielsituation

Szenario: Käufer und Verkäufer

Ein Käufer und ein Verkäufer verhandeln über den Preis eines Produkts. Beide können **Hohen Preis**, **Mittleren Preis** oder **Keinen Kauf/Kein Verkauf** wählen. Einigen sie sich, entsteht ein Handel – der Gewinn wird unterschiedlich aufgeteilt.

5.2 Herleitung der Auszahlungsmatrix

Kombination	Was passiert?	(Käufer, Verkäufer)
Hoher Preis – Hoher Preis	Einigung zum Hochpreis. Verkäufer gewinnt mehr, Käufer zahlt viel – kleiner Gewinn für Käufer.	(3, 5)
Hoher Preis – Mittlerer Preis	Käufer bietet viel, Verkäufer gibt nach. Einigung zum Mittelwert. Beide gewinnen moderat.	(2, 3)
Mittlerer Preis – Mittlerer Preis	Einigung zum fairen Mittelpreis. Ausgewogene Aufteilung des Handelsgewinns.	(3, 3)
Mittlerer Preis – Hoher Preis	Käufer bietet wenig, Verkäufer besteht auf viel. Dennoch Einigung – Käufer gewinnt mehr.	(4, 2)
Kein Kauf / Kein Verkauf	Kein Handel. Kleiner Alternativgewinn beider (andere Optionen, kein Zeitverlust).	(1, 1)
Hoher/Mittlerer Preis – Kein Verkauf	Verkäufer zieht sich zurück. Kein Handel.	(0, 0)
Kein Kauf – Hoher/Mittlerer Preis	Käufer zieht sich zurück. Kein Handel.	(0, 0)

5.3 Die Auszahlungsmatrix

Käufer \ Verkäufer	Hoher Preis	Mittlerer Preis	Kein Verkauf
Hoher Preis	(3, 5)	(2, 3)	(0, 0)
Mittlerer Preis	(4, 2) ★ Nash-GG 1	(3, 3) ★ Nash-GG 2	(0, 0)
Kein Kauf	(0, 0)	(0, 0)	(1, 1) ★ Nash-GG 3

5.4 Pareto-Analyse

Ergebnis	K	V	Pareto?	Begründung
(Hoch, Hoch) = (3, 5)	3	5	**Pareto-eff.**	Nicht dominiert
(Mittel, Hoch) = (4, 2)	4	2	**Pareto-eff.**	Nash-GG 1
(Hoch, Mittel) = (2, 3)	2	3	Dominiert	durch (4,2) und (3,3)
(Mittel, Mittel) = (3, 3)	3	3	**Pareto-eff.**	Nash-GG 2
(0, 0)-Felder	0	0	Dominiert	durch alle anderen
(Kein, Kein) = (1, 1)	1	1	**Pareto-eff.**	Nash-GG 3

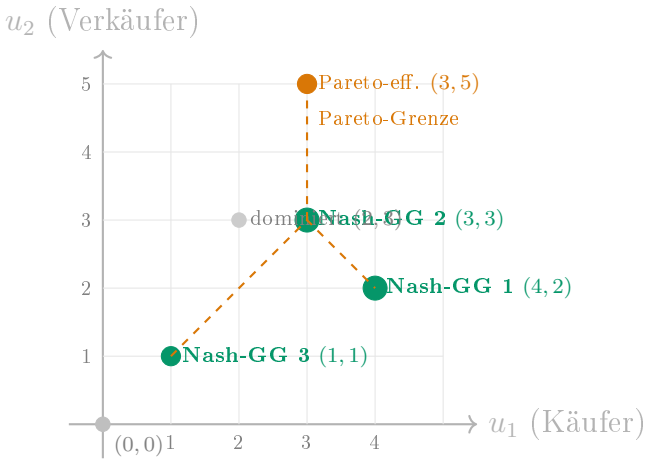
Interpretation:

- Nash-GG 3 (Kein Kauf, Kein Verkauf) = (1, 1) ist Pareto-effizient, aber deutlich schlechter als GG 1 und 2 – Handel wäre für beide besser.
- Das beste Ergebnis für den Verkäufer (3,5) ist kein Nash-GG: Käufer würde zu Mittelpreis wechseln und 4 statt 3 bekommen.
- Das fairste Ergebnis (3,3) ist Nash-GG – stabiles Gleichgewicht bei ausgeglichener Verhandlungsmacht.

6 Theorie: Auszahlungsraum und Pareto-Grenze

Definition: Auszahlungsraum

Der **Auszahlungsraum** zeigt alle möglichen Ergebnispunkte (u_1, u_2) in einem Koordinatensystem. Die Achsen messen den Gewinn beider Spieler.



Die **Pareto-Grenze** (gestrichelt) verbindet alle Pareto-effizienten Punkte. Punkte unterhalb der Grenze sind dominiert – es gibt immer ein besseres Ergebnis für beide.

7 Toolbeschreibung: Spieltheorie Modul 3

Nicht-Nullsummen-Tool

Das Tool berechnet Nash-GG, Pareto-Effizienz und klassifiziert das Spiel.

7.1 Eingabe

- Jede Zelle: (**Gewinn S1**, **Gewinn S2**) – beide Auszahlungen.
- Zeilen = Strategien von Spieler 1, Spalten = Strategien von Spieler 2.
- CSV-Format: `a,b` pro Zelle.

7.2 Ausgabe – 5 Schritte

1. **Beste Antworten:** Für jede Strategie des Gegners die optimale Gegenstrategie – mit konkreten Auszahlungen.
2. **Nash-Gleichgewichte:** Alle reinen Nash-GG mit Prüfung. Hinweis bei mehreren GG (Koordinationsproblem).
3. **Pareto-Effizienz:** Welche Ergebnisse sind effizient? Welche werden dominiert? Erkennt soziale Dilemmata.
4. **Spielklassifikation:** Nullsumme? Dilemma? Koordination?
5. **Interpretation:** Handlungsempfehlungen – Tit-for-Tat, Verträge, Focal Points, First-Mover-Strategie.

Auszahlungsraum-Grafik: Alle Ergebnisse als Punkte im (u_1, u_2)-Raum. Grün = Nash-GG, Orange = Pareto-effizient, Grau = dominiert.

8 Zusammenfassung

Kernpunkte: Modul 3 – Nicht-Nullsummenspiele

1. **Nicht-Nullsumme:** Beide können gleichzeitig gewinnen oder verlieren – Kooperation ist möglich.
2. **Nash-GG** kann eindeutig, mehrfach oder gar nicht existieren (in reinen Strategien).
3. **Pareto-Effizienz:** Ein Ergebnis ist optimal, wenn niemand bessergestellt werden kann ohne den anderen zu schlechterstellen.
4. **Soziales Dilemma:** Nash-GG ist Pareto-inferior – individuelle Rationalität schadet der Gemeinschaft. Lösung: Verträge, Wiederholung, Regulierung.
5. **Koordinationsproblem:** Mehrere Nash-GG – Absprache, Focal Points oder Normen nötig.
6. Das **Gefangenendilemma** ist das bekannteste soziale Dilemma: Gestehen dominiert, aber Schweigen wäre besser.
7. **Auszahlungsraum:** Grafik aller Ergebnisse zeigt Pareto-Grenze und Nash-GG im Vergleich.