Spieltheorie

Modul 2: Nullsummenspiele

Minimax-Theorem, Sattelpunkt und gemischte Strategien

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Vollständige Einführung mit Herleitung der Auszahlungsmatrix,
Schritt-für-Schritt-Analyse und zwei durchgerechneten Beispielen

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Was ist ein Nullsummenspiel? 2

2 Vollständiges Beispiel 1: Elfmeter 2
- 2.1 Die Spielsituation . . . 2
- 2.2 Herleitung der Auszahlungsmatrix . . . 2
- 2.3 Die Auszahlungsmatrix . . . 3
- 2.4 Schritt 1: Maximin und Minimax berechnen . . . 4
- 2.5 Schritt 2: Sattelpunkt prüfen . . . 4
- 2.6 Schritt 3: Gemischte Strategien berechnen . . . 5
- 2.7 Ergebnis . . . 6

3 Beispiel 2: Sattelpunkt – Schere-Stein-Papier 6
- 3.1 Die Auszahlungsmatrix . . . 6
- 3.2 Maximin und Minimax . . . 6
- 3.3 Gemischte Strategie . . . 7

4 Theorie: Minimax-Theorem 7

5 Toolbeschreibung: Spieltheorie Modul 2 7
- 5.1 Eingabe . . . 7
- 5.2 Ausgabe – 5 Schritte . . . 7

6 Zusammenfassung 8

1 Was ist ein Nullsummenspiel?

In einem **Nullsummenspiel** ist der Gewinn eines Spielers genau gleich dem Verlust des anderen. Was einer gewinnt, verliert der andere – die Summe der Auszahlungen ist immer null.

Definition: Nullsummenspiel

Ein Zwei-Personen-Spiel heißt **Nullsummenspiel**, wenn für alle Strategiekombinationen gilt:

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_2 = -u_1$$

Man gibt daher nur die Auszahlung von **Spieler 1** an. Spieler 1 *maximiert*, Spieler 2 *minimiert* diese Auszahlung.

Typische Nullsummenspiele

- Sport: Elfmeter (Angreifer vs. Torwart), Tennis-Aufschlag
- Militär: Angriff vs. Verteidigung
- Poker, Schach, Schere-Stein-Papier
- Verhandlungen bei festem Gesamtkuchen

2 Vollständiges Beispiel 1: Elfmeter

2.1 Die Spielsituation

Szenario: Angreifer gegen Torwart

Ein Angreifer tritt einen Elfmeter. Beide Spieler entscheiden **gleichzeitig** – der Angreifer schießt, der Torwart springt im selben Moment.

Strategien:

- **Angreifer**: Schuss **Links** oder Schuss **Rechts**
- **Torwart**: Sprung **Links**, **Mitte bleiben** oder Sprung **Rechts**

Auszahlung: positiver Wert = Vorteil für Angreifer, negativer Wert = Vorteil für Torwart.

2.2 Herleitung der Auszahlungsmatrix

Wir schätzen die Torwahrscheinlichkeit (in %) je nach Kombination und wandeln sie in Auszahlungswerte um:

Kombination	Was passiert?	Wert
Links – Links	Torwart springt richtig. Schwierig für Angreifer, aber er ist auf der richtigen Seite – 40% Torchance.	+3
Links – Mitte	Torwart bleibt. Schuss geht an ihm vorbei, aber er kann reagieren. Moderate Chance – 20% Torchance für Angreifer.	−1
Links – Rechts	Torwart springt falsch (weg vom Ball). Angreifer trifft fast sicher – 75% Torchance.	+2
Rechts – Links	Torwart springt falsch. Angreifer hat 80% Torchance.	−2
Rechts – Mitte	Torwart bleibt. Schuss geht an ihm vorbei – 70% Torchance.	+4
Rechts – Rechts	Torwart springt richtig – 55% Torchance für Angreifer.	+1

Warum negative Werte? Wert −2 bei (Rechts, Links) bedeutet: Torwart springt falsch – aber das ist gut für den *Torwart* (er hat den Angreifer überlistet). Da wir aus Sicht des Angreifers messen: negativer Wert = schlechtes Ergebnis für Angreifer.
In einem Nullsummenspiel steht −2 für den Angreifer gleichzeitig +2 für den Torwart.

2.3 Die Auszahlungsmatrix

Angreifer \ Torwart	Sprung Links	Mitte bleiben	Sprung Rechts
Schuss Links	+3	−1	+2
Schuss Rechts	−2	+4	+1

Lesehilfe:

- Jede Zahl = Auszahlung für den **Angreifer**
- Der **Torwart** erhält den *negativen* Wert (Nullsumme: +3 für Angreifer = −3 für Torwart)
- **Angreifer** wählt Zeile und will *maximieren*
- **Torwart** wählt Spalte und will *minimieren*

2.4 Schritt 1: Maximin und Minimax berechnen

Strategie des Angreifers – Maximin:

Der Angreifer überlegt: "Was ist das *Mindeste*, das ich erzielen kann, wenn ich diese Strategie wähle?" Er wählt die Strategie mit dem *höchsten* Minimum.

Angreifer	Links	Mitte	Rechts	Zeilen-Min
Schuss Links	$+3$	-1	$+2$	$\mathbf{-1}$
Schuss Rechts	-2	$+4$	$+1$	$\mathbf{-2}$

Maximin $= \max(-1,\ -2) = \mathbf{-1}$
$\Rightarrow$ Schuss Links garantiert dem Angreifer mindestens -1.

Strategie des Torwarts – Minimax:

Der Torwart überlegt: "Was ist das *Maximum*, das der Angreifer erzielen kann, wenn ich diese Spalte wähle?" Er wählt die Spalte mit dem *kleinsten* Maximum.

	Sprung Links	Mitte bleiben	Sprung Rechts
Schuss Links	$+3$	-1	$+2$
Schuss Rechts	-2	$+4$	$+1$
Spalten-Max	$\mathbf{+3}$	$\mathbf{+4}$	$\mathbf{+2}$

Minimax $= \min(+3,\ +4,\ +2) = \mathbf{+2}$
$\Rightarrow$ Sprung Rechts begrenzt den maximalen Schaden auf $+2$.

2.5 Schritt 2: Sattelpunkt prüfen

Definition: Sattelpunkt

Eine Zelle (i^*, j^*) heißt **Sattelpunkt**, wenn:

$$a_{i^*j^*} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

Das heißt: Maximin = Minimax. Die Zelle ist gleichzeitig Zeilenminimum und Spaltenmaximum.

Im Elfmeter-Beispiel: Maximin $= -1$, Minimax $= +2$.
$-1 \neq +2 \Rightarrow$ **Kein Sattelpunkt!**

Das Spiel hat kein Gleichgewicht in reinen Strategien. Würde der Angreifer immer links schießen, würde der Torwart immer links springen. Würde der Torwart immer links springen, würde der Angreifer rechts schießen – und so weiter.

$\Rightarrow$ Beide müssen **gemischte Strategien** spielen.

2.6 Schritt 3: Gemischte Strategien berechnen

Optimale gemischte Strategie

Spieler 1 mischt mit Wahrscheinlichkeit p die erste Zeile und $(1-p)$ die zweite. Der optimale Wert von p macht Spieler 2 **indifferent** zwischen seinen Strategien – er kann durch keine Wahl mehr profitieren.

Da der Torwart drei Spalten hat, das Spiel aber 2×3 ist, reduzieren wir zunächst durch Dominanz.

Dominanzreduktion: Vergleiche Spalte "Links" mit "Rechts" aus Sicht des Torwarts (Torwart minimiert):

- Gegen Links: Links $= 3$, Rechts $= 2$. Torwart bevorzugt Rechts $(2 < 3)$.
- Gegen Rechts: Links $= -2$, Rechts $= 1$. Torwart bevorzugt Links $(-2 < 1)$.

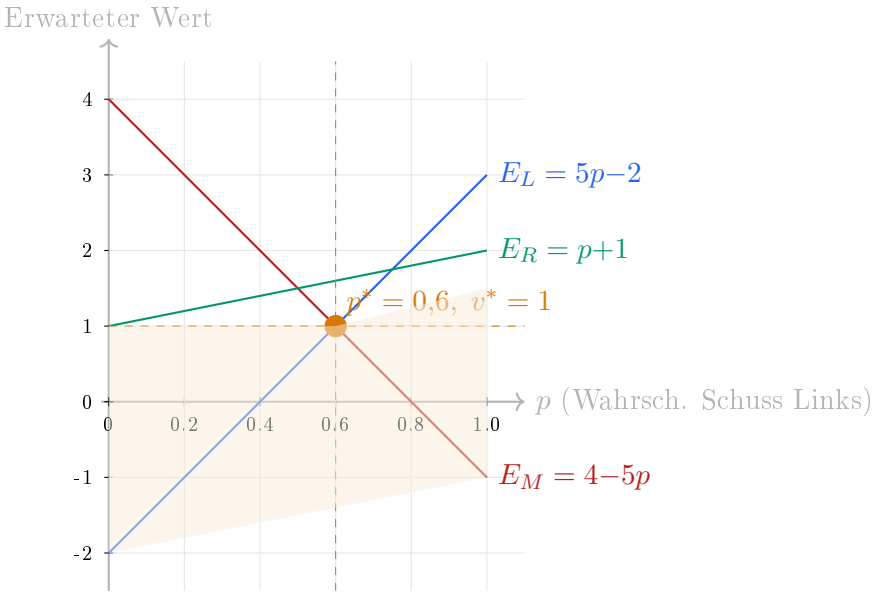
Keine klare Dominanz. Wir prüfen "Mitte" gegen die anderen:

- Mitte gegen Links: $-1 < 3$ und $4 > -2$ – Mitte ist nicht dominant.

Kein direktes Eliminieren möglich. Grafische Analyse für 2×3:
Erwartete Auszahlung als Funktion von p (Wahrsch. Schuss Links):

$$\begin{aligned} \text{EW gegen Sprung Links:} \quad & E_L(p) = 3p + (-2)(1-p) = 5p - 2 \\ \text{EW gegen Mitte bleiben:} \quad & E_M(p) = (-1)p + 4(1-p) = 4 - 5p \\ \text{EW gegen Sprung Rechts:} \quad & E_R(p) = 2p + 1 \cdot (1-p) = p + 1 \end{aligned}$$

Der Angreifer maximiert das Minimum dieser drei Linien.



Optimum: $E_L(p) = E_M(p)$:

$$5p - 2 = 4 - 5p \quad \Rightarrow \quad 10p = 6 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p^* = 0{,}6}$$

Kontrolle: $E_R(0{,}6) = 0{,}6 + 1 = 1{,}6 > 1$ – Sprung Rechts ist für den Torwart bei $p^* = 0{,}6$ die schlechteste Wahl, also irrelevant im Gleichgewicht. (Der Torwart mischt nur Links und Mitte.)

Optimale Strategie des Torwarts:

Torwart macht Angreifer indifferent zwischen Links (E_L) und Mitte (E_M):

$$E_L: \quad 3q + (-2)(1-q) = 5q - 2 \quad \text{(mit Sprung Links mit Wahrsch. } q\text{)}$$

$$E_M: \quad (-1)q + 4(1-q) = 4 - 5q$$

Indifferenz $E_L = E_M$ aus Sicht des Angreifers gibt die Mischstrategie: aber das ist die gleiche Gleichung: $5q - 2 = 4 - 5q \Rightarrow q^* = 0{,}6$.

Also: Torwart springt mit Wahrsch. 0,6 links, bleibt mit 0,4 in der Mitte (und springt nie rechts).

2.7 Ergebnis

Optimale gemischte Strategien	
Angreifer:	Schuss Links mit $p^* = 0{,}6$, Schuss Rechts mit $1 - p^* = 0{,}4$
Torwart:	Sprung Links mit $q^* = 0{,}6$, Mitte mit $1 - q^* = 0{,}4$, Rechts nie
Spielwert:	$v^* = E_L(0{,}6) = 5 \cdot 0{,}6 - 2 = +1$

Bedeutung: Im Gleichgewicht erzielt der Angreifer im Erwartungswert $+1$ – ein leichter Vorteil. Keiner kann durch Abweichen von seiner gemischten Strategie profitieren.

3 Beispiel 2: Sattelpunkt – Schere-Stein-Papier

3.1 Die Auszahlungsmatrix

A \ B	Schere	Stein	Papier
Schere	0	-1	$+1$
Stein	$+1$	0	-1
Papier	-1	$+1$	0

Herleitung: Schere gegen Schere = Gleichstand (0). Schere gegen Stein = Schere verliert (-1 für A). Schere gegen Papier = Schere gewinnt ($+1$). usw.

3.2 Maximin und Minimax

Zeilenminima: Schere $= -1$, Stein $= -1$, Papier $= -1$. Maximin $= -1$.

Spaltenmax: Schere $= 1$, Stein $= 1$, Papier $= 1$. Minimax $= 1$.

$-1 \neq 1 \Rightarrow$ **Kein Sattelpunkt.**

3.3 Gemischte Strategie

Aus Symmetrie: alle drei Strategien gleich wahrscheinlich, $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$.
Spielwert: $v^* = 0$ (faires Spiel – symmetrisches Nullsummenspiel).

4 Theorie: Minimax-Theorem

Minimax-Theorem – von Neumann 1928

Jedes endliche Zwei-Personen-Nullsummenspiel hat einen **Spielwert** v^* in gemischten Strategien:

$$v^* = \max_p \min_q \sum_{i,j} p_i \cdot a_{ij} \cdot q_j = \min_q \max_p \sum_{i,j} p_i \cdot a_{ij} \cdot q_j$$

Beide Spieler haben optimale gemischte Strategien p^* und q^* mit $\sum p_i = \sum q_j = 1$, $p_i, q_j \geq 0$.

Intuition: Spieler 1 maximiert den garantierten Mindestgewinn (Maximin). Spieler 2 minimiert den maximalen Schaden (Minimax). Das Theorem besagt: Diese beiden Werte stimmen überein. Man muss nur *eine* Gleichung lösen.

5 Toolbeschreibung: Spieltheorie Modul 2

Nullsummenspiel-Tool

Das Tool berechnet Maximin, Minimax, Sattelpunkt und gemischte Strategien für Nullsummenspiele.

5.1 Eingabe

In der Matrix steht nur die Auszahlung von **Spieler 1** (Zeilenmaximierer). Der Kopfbereich erklärt:

- **Zeilen (↓)** = Strategien von Spieler 1 (wählt Zeile, maximiert)
- **Spalten (→)** = Strategien von Spieler 2 (wählt Spalte, minimiert)
- Positive Zahl = gut für Spieler 1; negative Zahl = gut für Spieler 2

5.2 Ausgabe – 5 Schritte

1. **Maximin und Minimax:** Zeilenminima und Spaltenmax mit Tabellen; welche Zeile/Spalte optimal?
2. **Sattelpunkt:** Ist Maximin = Minimax? Falls ja: reines GG. Falls nein: gemischte Strategien nötig.
3. **Dominanzreduktion:** Eliminierung dominierter Strategien.

4. **Gemischte Strategien:** Analytische Lösung für 2×2; grafischer Explorer mit Schieberegler.

5. **Spielwert und Interpretation:** Wer hat Vorteil? Minimax-Theorem.

Grafischer Explorer (nur 2×2): Ein Schieberegler zeigt, wie sich der erwartete Spielwert mit p ändert. Man sieht: am Optimum p^* schneiden sich die beiden EW-Linien – kein Spieler kann durch Abweichen profitieren.

6 Zusammenfassung

Kernpunkte: Modul 2 – Nullsummenspiele

1. In einem **Nullsummenspiel** gewinnt einer genau das, was der andere verliert. Nur Auszahlung von S1 wird angegeben.
2. **S1 maximiert** (Zeilen), **S2 minimiert** (Spalten).
3. **Maximin** (S1): höchstes Zeilenminimum – garantierter Mindestgewinn.
4. **Minimax** (S2): kleinstes Spaltenmaximum – begrenzter Schaden.
5. **Sattelpunkt:** Maximin = Minimax $\Rightarrow$ reines GG.
6. **Kein Sattelpunkt:** Gemischte Strategien nötig.
7. Optimale gemischte Strategie: macht den Gegner *indifferent* – er kann durch keine Strategiewahl mehr profitieren.
8. **Spielwert** v^*: garantierter EW im Gleichgewicht. Minimax-Theorem (von Neumann): $\max\min = \min\max = v^*$.