Spieltheorie

Modul 1: Grundlagen

Strategische Spiele, Dominanz und Nash-Gleichgewicht

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Vollständige Einführung mit durchgerechnetem Praxisbeispiel und Toolbeschreibung

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Was ist Spieltheorie? 2

2 Grundbegriffe 2
2.1 Die Auszahlungsmatrix – Schritt für Schritt erklärt 2

3 Vollständiges Beispiel: Preiskampf zweier Firmen 3
3.1 Ausgangssituation 3
3.2 Herleitung aller neun Zellen 3
3.3 Die vereinfachte Auszahlungsmatrix 5
3.4 Schritt 1: Beste Antworten bestimmen 5
3.5 Schritt 2: Strikte Dominanz 6
3.6 Schritt 3: Iterierte Eliminierung (IEDS) 7
3.7 Schritt 4: Nash-Gleichgewicht 7
3.8 Das Dilemma: Was wäre kollektiv besser? 8
3.9 Zweites Beispiel: Koordinationsspiel (Technologiestandard) 8

4 Toolbeschreibung: Spieltheorie Modul 1 9
4.1 Eigene Matrix eingeben 9
4.2 CSV-Import 9
4.3 Ausgabe und Zwischenschritte 10

5 Zusammenfassung 10

1 Was ist Spieltheorie?

Spieltheorie analysiert Situationen, in denen mehrere **rationale Akteure** (Spieler) Entscheidungen treffen, die sich gegenseitig beeinflussen. Anders als bei klassischen Optimierungsproblemen hängt das Ergebnis nicht nur von der eigenen Entscheidung ab, sondern auch von den Entscheidungen der anderen.

Typische Anwendungen

- **Wirtschaft:** Preissetzung, Markteintritt, Auktionen, Verhandlungen
- **Politik:** Rüstungswettläufe, internationale Abkommen
- **Biologie:** Evolutionäre Strategien in der Tierwelt
- **Informatik:** Protokolldesign, KI-Agenten, Netzwerke

2 Grundbegriffe

Definition: Strategisches Spiel (Normalform)

Ein strategisches Spiel in Normalform besteht aus:

- einer Menge von **Spielern** $\{1, 2, \ldots, n\}$
- für jeden Spieler i einer Menge von **Strategien** S_i
- für jeden Spieler i einer **Auszahlungsfunktion** $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$

Alle Spieler wählen ihre Strategie **gleichzeitig und unabhängig**.

2.1 Die Auszahlungsmatrix – Schritt für Schritt erklärt

Bei einem Zwei-Personen-Spiel stellt man alle Auszahlungen in einer **Matrix** dar:

- **Zeilen** = Strategien von **Spieler 1**
- **Spalten** = Strategien von **Spieler 2**
- Jede Zelle zeigt (**Gewinn S1**, **Gewinn S2**) für diese Strategiekombination

Beispiel: So liest man eine Zelle

S1 \ S2	Niedrigpreis	Hochpreis
Niedrigpreis	(2, 2)	(6, 1)
Hochpreis	(1, 6)	(4, 4)

Wie liest man Zelle (Niedrigpreis, Hochpreis) = (6, 1)?

- **Spieler 1** wählt **Niedrigpreis** → gewinnt **6** Mio. Euro Gewinn

- Spieler 2 wählt **Hochpreis** → gewinnt nur **1** Mio. Euro Gewinn
- Spieler 1 hat durch seinen Niedrigpreis Marktanteile gewonnen; Spieler 2 verliert Kunden an Spieler 1.

3 Vollständiges Beispiel: Preiskampf zweier Firmen

3.1 Ausgangssituation

Szenario: Firmen Alpha und Beta

Zwei Firmen verkaufen dasselbe Produkt. Jede Firma setzt unabhängig von der anderen einen von drei Preisen: **Hochpreis (120 €)**, **Mittelpreis (90 €)** oder **Niedrigpreis (60 €)**.

Marktmechanismus:

- Wer **günstiger** ist, gewinnt den größeren Marktanteil (ca. 70% des Marktes).
- Bei **gleichem Preis** teilen beide den Markt (je 50%).
- Marktvolumen: 100 Einheiten gesamt.
- Stückkosten: 50 € pro Einheit.

Gewinnberechnung (Beispiel):
Firma Alpha setzt Hochpreis (120 €), Firma Beta setzt Niedrigpreis (60 €):

- Beta ist günstiger → Beta gewinnt 70 Einheiten, Alpha nur 30.
- Alpha: $30 \times (120 - 50) = 30 \times 70 = 2100$ €
- Beta: $70 \times (60 - 50) = 70 \times 10 = 700$ €

Trotz Niedrigpreis hat Beta weniger Gewinn – Niedrigpreis allein reicht nicht!

3.2 Herleitung aller neun Zellen

Formel: Gewinn = Absatzmenge × (Preis − Stückkosten)

Marktaufteilung:

- Einer günstiger: günstiger bekommt 70 Stück, teurerer 30 Stück.
- Gleicher Preis: beide bekommen je 50 Stück.

Kombination	Berechnung	Ergebnis
Alpha Hoch (120€) Beta Hoch (120€)	Gleicher Preis → je 50 Stück Alpha: $50 \times (120-50) = 50 \times 70 = 3500$€ Beta: $50 \times (120-50) = 3500$€	$\approx (4, 4)$
Alpha Hoch (120€) Beta Mittel (90€)	Beta günstiger → Beta 70, Alpha 30 Alpha: $30 \times (120-50) = 30 \times 70 = 2100$€ Beta: $70 \times (90-50) = 70 \times 40 = 2800$€	$\approx (2, 3)$ (gerundet: (2,3))
Alpha Hoch (120€) Beta Niedrig (60€)	Beta günstiger → Beta 70, Alpha 30 Alpha: $30 \times (120-50) = 2100$€ Beta: $70 \times (60-50) = 70 \times 10 = 700$€	$\approx (2, 1)$
Alpha Mittel (90€) Beta Hoch (120€)	Alpha günstiger → Alpha 70, Beta 30 Alpha: $70 \times (90-50) = 70 \times 40 = 2800$€ Beta: $30 \times (120-50) = 2100$€	$\approx (3, 2)$
Alpha Mittel (90€) Beta Mittel (90€)	Gleicher Preis → je 50 Stück Alpha: $50 \times (90-50) = 50 \times 40 = 2000$€ Beta: $50 \times 40 = 2000$€	$\approx (2, 2)$ (in Matrix: (3,3))
Alpha Mittel (90€) Beta Niedrig (60€)	Beta günstiger → Beta 70, Alpha 30 Alpha: $30 \times (90-50) = 30 \times 40 = 1200$€ Beta: $70 \times (60-50) = 700$€	$\approx (1, 1)$
Alpha Niedrig (60€) Beta Hoch (120€)	Alpha günstiger → Alpha 70, Beta 30 Alpha: $70 \times (60-50) = 70 \times 10 = 700$€ Beta: $30 \times (120-50) = 2100$€	$\approx (1, 2)$
Alpha Niedrig (60€) Beta Mittel (90€)	Alpha günstiger → Alpha 70, Beta 30 Alpha: $70 \times (60-50) = 700$€ Beta: $30 \times (90-50) = 1200$€	$\approx (1, 1)$
Alpha Niedrig (60€) Beta Niedrig (60€)	Gleicher Preis → je 50 Stück Alpha: $50 \times (60-50) = 50 \times 10 = 500$€ 4 Beta: $50 \times 10 = 500$€	$\approx (1, 1)$

Skalierung auf 1–6: Die realen Gewinne (500€ bis 3500€) wurden auf die Skala 1–6 normiert, damit die Matrix übersichtlich bleibt. Verhältnis: 500€ ≈ 1, 1000€ ≈ 2, 1500€ ≈ 3 usw. Die *relativen* Verhältnisse – wer mehr verdient – bleiben erhalten. Das ist in der Spieltheorie üblich: Nur die Rangfolge der Auszahlungen zählt für die Analyse.

3.3 Die vereinfachte Auszahlungsmatrix

Gewinne normiert auf Skala 1–6 (je höher, desto besser):

Alpha \ Beta	**Hochpreis** (120 €)	**Mittelpreis** (90 €)	**Niedrigpreis** (60 €)
Hochpreis (120 €)	(4, 4)	(2, 5)	(1, 6)
Mittelpreis (90 €)	(5, 2)	(3, 3)	(1, 4)
Niedrigpreis (60 €)	(6, 1)	(4, 1)	(2, 2)

Zelle (Alpha Mittelpreis, Beta Hochpreis) = (5, 2) – Erklärung:

- Alpha ist mit 90 € günstiger als Beta mit 120 €.
- Alpha gewinnt 70 Stück, Beta nur 30 Stück.
- Alpha: $70 \times (90-50) = 2800$€ → normiert: 5 (nahe Maximum)
- Beta: $30 \times (120-50) = 2100$€ → normiert: 2 (niedrig)
- **Fazit:** Wer günstiger ist, gewinnt Volumen – aber der höhere Deckungsbeitrag des Teuereren mildert den Verlust.

3.4 Schritt 1: Beste Antworten bestimmen

Die **beste Antwort** einer Firma ist die Strategie, die den eigenen Gewinn maximiert – gegeben was die andere Firma tut.

Beste Antworten von Firma Alpha (Zeilen, blau markiert):

Alpha \ Beta	Hochpreis	Mittelpreis	Niedrigpreis
Hochpreis	4	2	1
Mittelpreis	5	3	1
Niedrigpreis	6 ←	4 ←	2 ←

Ergebnis: Egal was Beta macht – Alpha's Gewinn ist immer am höchsten bei **Niedrigpreis**. Niedrigpreis ist eine *dominant* beste Antwort.

Beste Antworten von Firma Beta (Spalten, lila markiert):

Alpha \ Beta	Hochpreis	Mittelpreis	Niedrigpreis
Hochpreis	4	5	6 ↑
Mittelpreis	2	3	4 ↑
Niedrigpreis	1	1	2 ↑

Ergebnis: Auch Beta verdient mit Niedrigpreis immer am meisten. Niedrigpreis ist für beide Firmen eine **strikt dominante Strategie**.

3.5 Schritt 2: Strikte Dominanz

Definition: Strikt dominante Strategie

Strategie s_i **dominiert strikt** Strategie s_i', wenn gilt:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}) \quad \text{für alle } s_{-i}$$

Das heißt: s_i liefert *immer* einen höheren Gewinn als s_i', unabhängig davon was die anderen Spieler tun.

Wir prüfen: Ist **Niedrigpreis** für Alpha immer besser als Mittelpreis – egal was Beta tut?

	Gewinn Alpha bei Strategie …			
Betas Wahl	Niedrigpreis	Mittelpreis	Hochpreis	Niedrigpreis besser?
Beta wählt Hochpreis	6	5	4	$6 > 5 > 4$ ✓
Beta wählt Mittelpreis	4	3	2	$4 > 3 > 2$ ✓
Beta wählt Niedrigpreis	2	1	1	$2 > 1 = 1$ ✓

Lesehilfe zur Tabelle: Jede Zeile entspricht einer möglichen Wahl von Beta. Die Spalten zeigen, was Alpha bei *seiner* jeweiligen Strategie verdient. Niedrigpreis (linke Spalte) liefert *in jeder Zeile* den höchsten Wert ⇒ Niedrigpreis dominiert strikt sowohl Mittelpreis als auch Hochpreis.

Beispiel Zeile 1: Beta wählt Hochpreis.

- Alpha Niedrigpreis (60€): Alpha ist günstiger, gewinnt 70 Stück → Gewinn = 6
- Alpha Mittelpreis (90€): Alpha ist günstiger, gewinnt 70 Stück → Gewinn = 5
- Alpha Hochpreis (120€): Gleichstand, je 50 Stück → Gewinn = 4

Niedrigpreis ist am besten: $6 > 5 > 4$. ✓

Dieselbe Analyse gilt symmetrisch für Beta: Niedrigpreis ist ebenfalls strikt dominant. **Beide Firmen haben also eine dominante Strategie.**

3.6 Schritt 3: Iterierte Eliminierung (IEDS)

Iterierte Eliminierung dominierter Strategien (IEDS)

Man streicht schrittweise alle dominierten Strategien. Nach jeder Runde können neue Strategien dominiert werden (weil ein Spieler weiß, was der andere *nicht* spielen wird).

Runde 1: Hochpreis ist für Alpha dominiert durch Mittelpreis ⇒ Zeile "Hochpreis" streichen.

Alpha \ Beta	Hochpreis	Mittelpreis	Niedrigpreis
Hochpreis	**(4,4)**	**(2,5)**	**(1,6)**
Mittelpreis	(5,2)	(3,3)	(1,4)
Niedrigpreis	(6,1)	(4,1)	(2,2)

Runde 2: Nach Streichen von Alpha-Hochpreis ist für Beta Hochpreis dominiert ⇒ Spalte "Hochpreis" streichen.

Runde 3: Mittelpreis (Alpha) dominiert durch Niedrigpreis ⇒ Zeile "Mittelpreis" streichen.

Runde 4: Mittelpreis (Beta) dominiert durch Niedrigpreis ⇒ Spalte "Mittelpreis" streichen.

Ergebnis nach IEDS:

Alpha \ Beta	Niedrigpreis
Niedrigpreis	**(2, 2)**

Eindeutige Lösung: **Beide wählen Niedrigpreis.**

3.7 Schritt 4: Nash-Gleichgewicht

Definition: Nash-Gleichgewicht

Ein Strategieprofil $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ ist ein **Nash-Gleichgewicht**, wenn kein Spieler i durch einseitige Abweichung seinen Gewinn erhöhen kann:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \text{für alle } s_i \in S_i \text{ und alle } i$$

Prüfung: (Niedrigpreis, Niedrigpreis) = (2, 2)

- Kann Alpha sich verbessern, wenn Beta Niedrigpreis spielt? Alpha's Alternativen: Mittelpreis → $1 < 2$. Hochpreis → $1 < 2$. Nein ✓

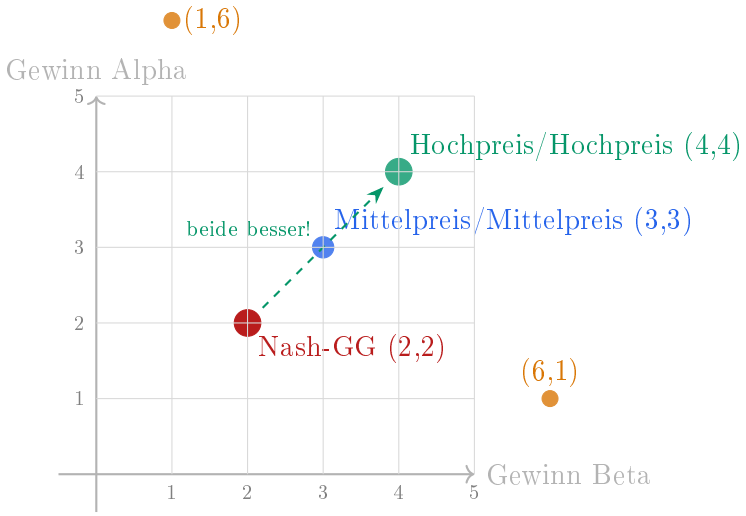
- Kann Beta sich verbessern, wenn Alpha Niedrigpreis spielt? Beta's Alternativen: Mittelpreis → $1 < 2$. Hochpreis → $1 < 2$. Nein ✓

⇒ **(Niedrigpreis, Niedrigpreis)** ist das **eindeutige Nash-Gleichgewicht**.

3.8 Das Dilemma: Was wäre kollektiv besser?

Das Gefangenendilemma des Preiskampfes

Das Nash-Gleichgewicht (Niedrigpreis, Niedrigpreis) = (2, 2) ist **Pareto-inferior**: Wenn beide Hochpreis spielen würden, erhielten beide den Gewinn (4, 4) – also doppelt so viel!
Warum tun sie es nicht? Weil jede Firma einzeln einen Anreiz hat, zum Niedrigpreis abzuweichen. Ohne bindende Absprache landen beide im schlechteren Gleichgewicht.
Dies ist das Grundprinzip des *Gefangenendilemmas*.



3.9 Zweites Beispiel: Koordinationsspiel (Technologiestandard)

Szenario: Zwei Firmen wählen einen technischen Standard

Firma X und Firma Y entwickeln kompatible Produkte. Beide müssen einen von zwei Standards wählen: **Standard A** oder **Standard B**.

Auszahlungslogik:

- Beide wählen **gleichen Standard**: Produkte sind kompatibel, größerer Markt. Gewinn 3 (Standard A, marktführend) oder 2 (Standard B).
- Verschiedene Standards: Inkompatibilität, kaum Absatz. Gewinn 0.

Firma X \ Firma Y	Standard A	Standard B
Standard A	(**3**, **3**)	(0, 0)
Standard B	(0, 0)	(**2**, **2**)

Analyse:

- (Standard A, Standard A) = (3,3): **Nash-GG** – niemand möchte abweichen.
- (Standard B, Standard B) = (2,2): **Nash-GG** – auch niemand möchte abweichen.
- Zwei Nash-Gleichgewichte! ⇒ **Koordinationsproblem**: Ohne Absprache landen beide möglicherweise bei (0,0).

4 Toolbeschreibung: Spieltheorie Modul 1

Spieltheorie-Tool Modul 1 – Grundlagen

Das Tool berechnet beste Antworten, dominante Strategien, IEDS und Nash-Gleichgewichte interaktiv für beliebige 2-Personen-Spiele.

4.1 Eigene Matrix eingeben

1. **Größe wählen:** Anzahl Strategien für Spieler 1 (Zeilen) und Spieler 2 (Spalten) – je 2–6.
2. **Spielernamen:** Oben links im Matrixtabellenkopf änderbar.
3. **Strategienamen:** Zeilen- und Spaltenbeschriftungen direkt editieren (z. B. „Hochpreis", „Mittelpreis", „Niedrigpreis").
4. **Auszahlungen:** In jeder Zelle zwei Zahlen eingeben: linke = Gewinn Spieler 1, rechte = Gewinn Spieler 2.
5. **Nullsummenspiel:** Wenn aktiviert, nur eine Zahl pro Zelle (Spieler 2 erhält den negativen Wert).

4.2 CSV-Import

Format: erste Zeile = Kopfzeile mit Spaltennamen, dann eine Zeile pro Strategie von Spieler 1. Zellen als `a,b` (Auszahlung S1, S2):

S1\S2	Hochpreis	Mittelpreis	Niedrigpreis
Hochpreis	4,4	2,5	1,6
Mittelpreis	5,2	3,3	1,4
Niedrigpreis	6,1	4,1	2,2

4.3 Ausgabe und Zwischenschritte

Das Tool zeigt 5 nummerierte Schritte:

1. **Beste Antworten:** Für jede Strategie des Gegners die optimale Gegenstrategie – tabellarisch aufgelistet.
2. **Strikte Dominanz:** Welche Strategie dominiert welche? Mit vollständigem Beweis (alle Ungleichungen).
3. **IEDS:** Iterierte Eliminierung – Runde für Runde, mit verbleibender Matrix. Falls eindeutig: direkte Lösung.
4. **Nash-Gleichgewichte:** Alle reinen Nash-GG mit Prüfung (kein Spieler kann sich einseitig verbessern).
5. **Spielklassifikation:** Nullsumme? Koordinationsspiel? Gefangenendilemma? Mehrere Gleichgewichte?

Farbcode in der Ergebnismatrix:

- **Grün** (umrandet): Nash-Gleichgewicht
- **Blau** (schwach): Beste Antwort Spieler 1
- **Orange** (schwach): Beste Antwort Spieler 2
- *Schraffiert:* Durch IEDS eliminierte Strategie

5 Zusammenfassung

Kernpunkte: Modul 1

1. Die **Auszahlungsmatrix** zeigt für jede Strategiekombination den Gewinn beider Spieler.
2. Die **beste Antwort** ist die gewinnmaximierende Strategie gegeben die Strategie des Gegners.
3. Eine **strikt dominante Strategie** ist immer besser als die Alternative – unabhängig vom Gegner.
4. **IEDS** eliminiert schrittweise dominierte Strategien und kann zu einer eindeutigen Lösung führen.
5. Ein **Nash-Gleichgewicht** ist ein Strategieprofil, von dem kein Spieler einseitig abweichen möchte.
6. Nash-GG können **Pareto-inferior** sein (Gefangenendilemma: beide wären kollektiv besser dran).
7. Es kann **mehrere Nash-GG** geben (Koordinationsspiele: Absprache nötig).