Aufgabensammlung

Spieltheorie – Module 1 bis 4

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Modul 1 – Grundlagen der Spieltheorie **2**
Aufgaben 1.1 und 1.2 (Leicht) 2
Aufgaben 1.3 und 1.4 (Mittel) 4
Aufgaben 1.5 und 1.6 (Schwer) 6

2 Modul 2 – Nullsummenspiele **9**
Aufgaben 2.1 und 2.2 (Leicht) 9
Aufgaben 2.3 und 2.4 (Mittel) 10
Aufgaben 2.5 und 2.6 (Schwer) 12

3 Modul 3 – Nicht-Nullsummenspiele **15**
Aufgaben 3.1 und 3.2 (Leicht) 15
Aufgaben 3.3 und 3.4 (Mittel) 16
Aufgaben 3.5 und 3.6 (Schwer) 18

4 Modul 4 – Kooperative Spieltheorie **21**
Aufgaben 4.1 und 4.2 (Leicht) 21
Aufgaben 4.3 und 4.4 (Mittel) 22
Aufgaben 4.5 und 4.6 (Schwer) 25

1 Modul 1 – Grundlagen der Spieltheorie

Stufe 1: Leicht

Aufgabe 1.1 – Matrix lesen und beste Antworten

Aufgabe 1.1

Zwei Unternehmen, Alpha und Beta, entscheiden gleichzeitig über ihre Werbestrategie: **Intensiv** oder **Minimal**. Die Auszahlungsmatrix zeigt den Gewinn in Mio. Euro (Alpha, Beta):

Alpha \ Beta	Intensiv	Minimal
Intensiv	(3, 3)	(5, 1)
Minimal	(1, 5)	(4, 4)

(a) Lesen Sie die Zelle (Intensiv, Minimal): Was erhält jedes Unternehmen?

(b) Bestimmen Sie die beste Antwort von Alpha auf jede Strategie von Beta.

(c) Bestimmen Sie die beste Antwort von Beta auf jede Strategie von Alpha.

(d) Gibt es ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien?

Lösung: Aufgabe 1.1

(a) Zelle (Intensiv, Minimal) = (5, 1): Alpha erhält 5 Mio. €, Beta erhält 1 Mio. €.

(b) Beste Antworten Alpha:

- Wenn Beta Intensiv: $\max(3, 1) = 3 \Rightarrow$ Alpha wählt **Intensiv**
- Wenn Beta Minimal: $\max(5, 4) = 5 \Rightarrow$ Alpha wählt **Intensiv**

Intensiv ist für Alpha **strikt dominant**.

(c) Beste Antworten Beta:

- Wenn Alpha Intensiv: $\max(3, 1) = 3 \Rightarrow$ Beta wählt **Intensiv**
- Wenn Alpha Minimal: $\max(5, 4) = 5 \Rightarrow$ Beta wählt **Intensiv**

Intensiv ist für Beta **strikt dominant**.

(d) Nash-Gleichgewicht: (Intensiv, Intensiv) = (3, 3). Beide haben Intensiv als dominante Strategie. Prüfung: Alpha kann nicht verbessern $(3 > 1)$ ✓; Beta kann nicht verbessern $(3 > 1)$ ✓.

Nash-GG: (Intensiv, Intensiv) = (3, 3).

Hinweis: (Minimal, Minimal) = (4, 4) wäre für beide besser – klassisches Gefangenendilemma.

Aufgabe 1.2 – Dominanz und IEDS

Aufgabe 1.2

Gegeben ist folgende 3×3-Auszahlungsmatrix (Spieler A, Spieler B):

A \ B	Links	Mitte	Rechts
Oben	(4, 2)	(3, 3)	(1, 4)
Mitte	(2, 4)	(2, 2)	(3, 1)
Unten	(1, 1)	(1, 3)	(2, 2)

(a) Zeigen Sie, dass Unten für A dominiert ist.

(b) Eliminieren Sie Unten und bestimmen Sie danach, welche Strategie für B dominiert wird.

(c) Führen Sie IEDS vollständig durch.

(d) Was ist das Nash-Gleichgewicht?

Lösung: Aufgabe 1.2

(a) Unten wird von Oben dominiert:

- Gegen Links: $4 > 1$ ✓; Gegen Mitte: $3 > 1$ ✓; Gegen Rechts: $1 = 1$ – nicht strikt.

Unten wird von Mitte dominiert: Links $2 > 1$, Mitte $2 > 1$, Rechts $3 > 2$ ✓ – strikt dominiert.

(b) Nach Streichen von Unten: verbleibende Matrix:

	Links	Mitte	Rechts
Oben	(4, 2)	(3, 3)	(1, 4)
Mitte	(2, 4)	(2, 2)	(3, 1)

Für B: Links vs Rechts: $2 < 4$ (gegen Oben) und $4 > 1$ (gegen Mitte) – keine Dominanz. Mitte wird von Links dominiert? Links: 2, 4; Mitte: 3, 2 – nein. Rechts wird dominiert: gegen Oben $4 > 1$, gegen Mitte $4 > 1$ – Links dominiert Rechts schwach; prüfe strikt: $2 > 4$? Nein. Keine strikte Dominanz.
Genauere Prüfung: Mitte vs Rechts: Oben $3 > 1$, Mitte $2 > 1$ ⇒ Mitte dominiert Rechts strikt!

(c) IEDS: Runde 1: Unten (dominiert durch Mitte) → streichen. Runde 2: Rechts (dominiert durch Mitte) → streichen. Runde 3: Verbleibend 2×2:

	Links	Mitte
Oben	(4, 2)	(3, 3)
Mitte	(2, 4)	(2, 2)

Runde 3: **Oben** dominiert **Mitte**: $4 > 2$, $3 > 2$ ✓. Runde 4: **Mitte** dominiert **Links**: $3 > 2$ ✓.
(d) IEDS-Lösung und Nash-GG: **(Oben, Mitte) = (3, 3).**

Stufe 2: Mittel

Aufgabe 1.3 – Nash-Gleichgewichte finden

Aufgabe 1.3

Zwei Mobilfunkanbieter (X, Y) entscheiden über ihr Netzausbau-Engagement: **Stark**, **Mittel** oder **Schwach**.

X \ Y	Stark	Mittel	Schwach
Stark	(2, 2)	(4, 1)	(6, 0)
Mittel	(1, 4)	(3, 3)	(5, 1)
Schwach	(0, 6)	(1, 5)	(4, 4)

(a) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte.

(b) Ist das Spiel ein Koordinationsproblem, ein Gefangenendilemma oder keines von beidem?

(c) Identifizieren Sie alle Pareto-effizienten Ergebnisse.

(d) Welches Ergebnis würden Sie einem kooperationswilligen Entscheider empfehlen?

Lösung: Aufgabe 1.3

(a) Beste Antworten:
X: Gegen Stark: $\max(2, 1, 0) = 2 \rightarrow$ Stark. Gegen Mittel: $\max(4, 3, 1) = 4 \rightarrow$ Stark. Gegen Schwach: $\max(6, 5, 4) = 6 \rightarrow$ Stark. $\Rightarrow$ **Stark** ist strikt dominant für X.
Y: Symmetrisch (Matrix ist symmetrisch): **Stark** ist strikt dominant für Y.
Nash-GG: (Stark, Stark) = (2, 2). Eindeutig.
(b) Das Spiel ist ein **Gefangenendilemma**: Das Nash-GG (2,2) ist Pareto-inferior. (Schwach, Schwach) = (4,4) wäre für beide besser.
(c) Pareto-effiziente Ergebnisse (nicht dominiert): $(6, 0)$, $(4, 1)$, $(3, 3)$, $(1, 4)$, $(0, 6)$, $(5, 1)$, $(1, 5)$, $(4, 4)$ – alle Ergebnisse auf der Pareto-Grenze. Streng Pareto-effizient: $(4, 4)$ dominiert $(2, 2)$ und $(3, 3)$ dominiert $(2, 2)$.
Pareto-dominated: $(2, 2)$ wird von $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(4, 1)$, $(1, 4)$ dominiert.
(d) Empfehlung: (Schwach, Schwach) = (4,4). Beide profitieren maximal bei beidseitiger Kooperation. Benötigt bindende Vereinbarung oder wiederholtes Spiel.

Aufgabe 1.4 – Koordinationsspiel mit Focal Point

Aufgabe 1.4

Zwei Unternehmen müssen sich ohne Kommunikation auf ein gemeinsames IT-Format einigen: **Format A**, **Format B** oder **Format C**. Nur bei Übereinstimmung gibt es einen Gewinn.

Firm 1 \ Firm 2	Format A	Format B	Format C
Format A	(5, 5)	(0, 0)	(0, 0)
Format B	(0, 0)	(3, 3)	(0, 0)
Format C	(0, 0)	(0, 0)	(2, 2)

(a) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte.

(b) Sind alle Nash-Gleichgewichte Pareto-effizient?

(c) Was ist ein Focal Point (Schelling-Punkt) und welcher würde hier wahrscheinlich gewählt?

(d) Wie lässt sich das Koordinationsproblem lösen?

Lösung: Aufgabe 1.4

(a) Beste Antworten: Wenn Y Format A wählt, antwortet X mit Format A (5>0). Analog für B und C. Alle drei Diagonaleinträge sind Nash-GG:

- **(A,A) = (5,5)**, **(B,B) = (3,3)**, **(C,C) = (2,2)**

(b) Alle drei sind Pareto-effizient (kein anderes GG übertrifft sie für beide). Allerdings: (A,A) dominiert (B,B) und (C,C) – alle werden *unter den GG* nach Pareto geordnet.

(c) Focal Point: Ein Focal Point ist ein Gleichgewicht, das ohne Kommunikation als "naheliegend" erkannt wird – durch Symmetrie, Prominenz oder Konvention. Hier: **Format A** mit Auszahlung (5,5) ist der Focal Point – es ist das beste Gleichgewicht für beide.

(d) Lösungsansätze:

- Direkte Kommunikation: Absprache auf Format A
- Industrienorm: Branchenverband legt Format A fest
- First-Mover: Eine Firma kündigt Format A öffentlich an
- Marktdominanz: Die größere Firma setzt Standard

Stufe 3: Schwer

Aufgabe 1.5 – Vollständige Analyse mit IEDS und Nash

Aufgabe 1.5

Drei Supermarktketten (A, B) konkurrieren mit je drei Preisstrategien.

A \ B	Hoch	Mittel	Niedrig
Hoch	(6, 6)	(2, 8)	(1, 9)
Mittel	(8, 2)	(4, 4)	(2, 7)
Niedrig	(9, 1)	(7, 2)	(3, 3)

(a) Zeigen Sie vollständig, dass "Niedrig" für beide Spieler strikt dominant ist (Beweis mit Ungleichungen).

(b) Führen Sie IEDS durch und bestimmen Sie das Nash-Gleichgewicht.

(c) Berechnen Sie den Pareto-Verlust: Wie viel verlieren beide Spieler gemeinsam gegenüber der Pareto-effizienten Alternative?

(d) Beschreiben Sie zwei konkrete Maßnahmen, die das Dilemma lösen könnten.

Lösung: Aufgabe 1.5

(a) Dominanznachweis für A:

Bs Wahl	Niedrig	Mittel	Hoch	Niedrig besser?
B wählt Hoch	**9**	**8**	**6**	$9 > 8 > 6$ ✓
B wählt Mittel	**7**	**4**	**2**	$7 > 4 > 2$ ✓
B wählt Niedrig	**3**	**2**	**1**	$3 > 2 > 1$ ✓

Niedrig dominiert Mittel und Hoch für A strikt. Symmetrisch für B (transponierte Matrix).
(b) IEDS: Runde 1: Hoch und Mittel für A dominiert → streichen. Analog für B. Lösung: **(Niedrig, Niedrig) = (3, 3).**
(c) Pareto-Verlust: Nash-GG: $(3, 3)$, Gesamtwohlfahrt = 6. Pareto-Optimum (Hoch, Hoch) = $(6, 6)$, Gesamtwohlfahrt = 12. **Pareto-Verlust:** $12 - 6 = 6$ **Einheiten** – beide verlieren je 3 gegenüber der kooperativen Lösung.
(d) Lösungsmaßnahmen:

1. *Kartellrecht (staatlich):* Preisabsprachen sind in der Praxis illegal, aber eine Regulierungsbehörde könnte Mindestpreise setzen oder Preistransparenz einschränken.

2. *Reputation und Wiederholung:* Im wiederholten Spiel könnte eine "Tit-for-Tat"-Strategie Kooperation erzwingen: Setze Hoch; falls Gegner abweicht, spiele Niedrig als Strafe.

Aufgabe 1.6 – Gemischte Strategien im Grundlagenmodul

Aufgabe 1.6

Ein Arbeitnehmer (AN) entscheidet sich täglich: **Arbeiten** oder **Shirken**. Der Arbeitgeber (AG) entscheidet: **Kontrollieren** oder **Nicht kontrollieren**.

AN \ AG	Kontrollieren	Nicht kontrollieren
Arbeiten	(3, 2)	(3, 4)
Shirken	(−2, 1)	(5, 0)

(a) Zeigen Sie, dass kein reines Nash-Gleichgewicht existiert.

(b) Berechnen Sie die gemischte Strategie des AG, bei der AN indifferent ist (Wahrscheinlichkeit q für Kontrollieren).

(c) Berechnen Sie die gemischte Strategie des AN, bei der AG indifferent ist (Wahrscheinlichkeit p für Arbeiten).

(d) Interpretieren Sie das Gleichgewicht: Was bedeutet es praktisch, dass AN mit Wahrscheinlichkeit p arbeitet?

Lösung: Aufgabe 1.6

(a) Kein reines Nash-GG:

- (Arbeiten, Kontrollieren): AG könnte auf Nicht-Kontrollieren wechseln (4>2) → kein GG.
- (Arbeiten, Nicht-Kontrollieren): AN könnte auf Shirken wechseln (5>3) → kein GG.
- (Shirken, Nicht-Kontrollieren): AG könnte auf Kontrollieren wechseln (1>0) → kein GG.
- (Shirken, Kontrollieren): AN könnte auf Arbeiten wechseln (3>−2) → kein GG.

(b) Gemischte Strategie AG (q = Wahrsch. Kontrollieren): AN ist indifferent zwischen Arbeiten und Shirken:

$$3q + 3(1-q) = -2q + 5(1-q) \;\Rightarrow\; 3 = 5 - 7q \;\Rightarrow\; \mathbf{q = \tfrac{2}{7} \approx 0{,}286}$$

(c) Gemischte Strategie AN (p = Wahrsch. Arbeiten): AG ist indifferent zwischen Kontrollieren und Nicht-Kontrollieren:

$$2p + 1(1-p) = 4p + 0(1-p) \;\Rightarrow\; 1 + p = 4p \;\Rightarrow\; \mathbf{p = \tfrac{1}{3} \approx 0{,}333}$$

(d) Interpretation: Im Gleichgewicht arbeitet der AN zu $\frac{1}{3}$ der Zeit und shirkt zu $\frac{2}{3}$. Der AG kontrolliert zu $\frac{2}{7}$ der Zeit.

- Keiner kann durch Ändern seiner Strategie profitieren.
- Mehr Kontrollieren würde den AN zum Übergang auf rein Arbeiten bewegen.
- Weniger Kontrollieren würde den AN zum reinen Shirken verleiten.

Praktisch: Häufigere Kontrollen führen zu mehr Arbeitseinsatz – ein deterministisches Kontrollschema wäre jedoch vorhersehbar und leicht zu umgehen.

2 Modul 2 – Nullsummenspiele

Stufe 1: Leicht

Aufgabe 2.1 – Sattelpunkt erkennen

Aufgabe 2.1

Gegeben ist folgende Auszahlungsmatrix eines Nullsummenspiels (Auszahlung für Spieler 1, Zeilenmaximierer):

S1 \ S2	Links	Mitte	Rechts
Oben	3	-1	4
Mitte	2	5	1
Unten	-2	3	2

(a) Berechnen Sie das Maximin (S1) und das Minimax (S2).

(b) Existiert ein Sattelpunkt?

(c) Was ist der Spielwert?

(d) Welche reinen Strategien spielen S1 und S2 im Gleichgewicht?

Lösung: Aufgabe 2.1

(a) Zeilenminima (Maximin S1):

- Oben: $\min(3, -1, 4) = -1$
- Mitte: $\min(2, 5, 1) = 1$
- Unten: $\min(-2, 3, 2) = -2$

Maximin $= \max(-1, 1, -2) = \mathbf{1}$ (Strategie: Mitte)
Spaltenmax (Minimax S2):

- Links: $\max(3, 2, -2) = 3$
- Mitte: $\max(-1, 5, 3) = 5$
- Rechts: $\max(4, 1, 2) = 4$

Minimax $= \min(3, 5, 4) = \mathbf{3}$ (Strategie: Links)
(b) Maximin $= 1 \neq 3 =$ Minimax $\Rightarrow$ **Kein Sattelpunkt.**
Hmm – prüfen wir erneut. Zelle (Mitte, Links) = 2: Ist das ein Sattelpunkt? Zeilenminimum Mitte = 1 (nicht 2). Kein Sattelpunkt bestätigt.
(c) Spielwert liegt zwischen 1 und 3; gemischte Strategien erforderlich.
(d) Kein reines Gleichgewicht; S1 wählt Mitte als Maximin-Sicherheitsstrategie, S2 wählt Links als Minimax-Sicherheitsstrategie.

Aufgabe 2.2 – 2×2-Sattelpunkt

Aufgabe 2.2

Ein Angreifer (A) und ein Verteidiger (V) in einem Planspiel. Auszahlung für A (Angreifer gewinnt positiv):

A \ V	Nord verteidigen	Süd verteidigen
Nord angreifen	-1	3
Süd angreifen	4	-2

(a) Berechnen Sie Maximin und Minimax.

(b) Existiert ein Sattelpunkt?

(c) Berechnen Sie die optimale gemischte Strategie für A (p = Wahrsch. Nord angreifen).

(d) Berechnen Sie die optimale gemischte Strategie für V (q = Wahrsch. Nord verteidigen) und den Spielwert.

Lösung: Aufgabe 2.2

(a) Maximin A: $\min(-1,3) = -1$; $\min(4,-2) = -2$. Maximin $= \max(-1,-2) = -1$. Minimax V: $\max(-1,4) = 4$; $\max(3,-2) = 3$. Minimax $= \min(4,3) = 3$.
(b) $-1 \neq 3 \Rightarrow$ **Kein Sattelpunkt.**
(c) Gemischte Strategie A: V indifferent:

$$-1 \cdot p + 4(1-p) = 3p + (-2)(1-p) \;\Rightarrow\; 4 - 5p = 5p - 2 \;\Rightarrow\; 10p = 6 \;\Rightarrow\; \mathbf{p = 0{,}6}$$

(d) Gemischte Strategie V: A indifferent:

$$-1 \cdot q + 3(1-q) = 4q + (-2)(1-q) \;\Rightarrow\; 3 - 4q = 6q - 2 \;\Rightarrow\; 10q = 5 \;\Rightarrow\; \mathbf{q = 0{,}5}$$

Spielwert: $v = -1 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}4 = -0{,}6 + 1{,}6 = \mathbf{1{,}0}$
Kontrolle: $3 \cdot 0{,}6 + (-2) \cdot 0{,}4 = 1{,}8 - 0{,}8 = 1{,}0$ ✓

Stufe 2: Mittel

Aufgabe 2.3 – Dominanz im Nullsummenspiel

Aufgabe 2.3

Gegeben ist folgendes 3×4-Nullsummenspiel (Auszahlung für Zeilemspieler):

	S1	S2	S3	S4
Z1	4	2	6	3
Z2	1	5	3	2
Z3	3	3	4	4

(a) Eliminieren Sie dominierte Strategien des Spaltenspielers (Minimierer).

(b) Eliminieren Sie dominierte Strategien des Zeilenspielers.

(c) Lösen Sie das verbleibende Spiel (Sattelpunkt oder gemischte Strategien).

(d) Berechnen Sie den Spielwert.

Lösung: Aufgabe 2.3

(a) Spaltenspieler minimiert. Vergleiche Spalten (Spaltenspieler zieht kleinere Werte vor):
S1 vs S4: $4 > 3$, $1 < 2$, $3 < 4$ – keine Dominanz. S2 vs S4: $2 < 3$, $5 > 2$, $3 < 4$ – keine Dominanz. S3 vs S1: $6 > 4$, $3 > 1$, $4 > 3$ – S3 ist schlechter für Spalte als S1 (S1 dominiert S3 für Spalte). Spaltenspieler bevorzugt niedrige Werte: S1 $\leq$ S3 in allen Zeilen? $4 < 6$, $1 < 3$, $3 < 4$ ✓ – **S3 wird von S1 dominiert** (für Spalte). Streiche S3.
(b) Verbleibend (ohne S3):

	S1	S2	S4
Z1	4	2	3
Z2	1	5	2
Z3	3	3	4

Zeilenspieler maximiert: Z2 vs Z3: $1 < 3$, $5 > 3$, $2 < 4$ – keine Dominanz. Z1 vs Z3: $4 > 3$, $2 < 3$, $3 < 4$ – keine Dominanz.
(c) Maximin: Z1: min=2; Z2: min=1; Z3: min=3. Maximin = 3 (Z3). Minimax: S1: max=4; S2: max=5; S4: max=4. Minimax = 4 (S1 oder S4).
$3 \neq 4$ – kein Sattelpunkt. Gemischte Strategien nötig (im Tool lösbar).
(d) Spielwert liegt zwischen 3 und 4.

Aufgabe 2.4 – Elfmeter-Szenario

Aufgabe 2.4

Neymar schießt Elfmeter gegen Torwart Ter Stegen. Auszahlung = Torwahrscheinlichkeit für Neymar in %:

Neymar \ Ter Stegen	Links springen	Rechts springen
Schuss links	30	80
Schuss rechts	75	25

(a) Zeigen Sie, dass kein reines Nash-GG existiert.

(b) Berechnen Sie Neymars optimale Mischstrategie (p = Wahrsch. links schießen).

(c) Berechnen Sie Ter Stegens optimale Mischstrategie (q = Wahrsch. links springen).

(d) Was ist der erwartete Spielwert (erwartete Torwahrscheinlichkeit)?

(e) Was passiert, wenn Neymar immer links schießt?

Lösung: Aufgabe 2.4

(a) Prüfung reine GG: (Links, Links)=30: Neymar wechselt zu Rechts (75>30) → kein GG. (Rechts, Links)=75: Ter Stegen wechselt zu Rechts (25<75, Minimierung) → kein GG. (Links, Rechts)=80: Ter Stegen wechselt zu Links (30<80) → kein GG. (Rechts, Rechts)=25: Neymar wechselt zu Links (80>25) → kein GG.
(b) Neymars Mischstrategie (Ter Stegen indifferent):

$$30p+75(1-p) = 80p+25(1-p) \;\Rightarrow\; 75-45p = 25+55p \;\Rightarrow\; 100p = 50 \;\Rightarrow\; \mathbf{p = 0{,}5}$$

(c) Ter Stegens Mischstrategie (Neymar indifferent):

$$30q+80(1-q) = 75q+25(1-q) \;\Rightarrow\; 80-50q = 25+50q \;\Rightarrow\; 100q = 55 \;\Rightarrow\; \mathbf{q = 0{,}55}$$

(d) $v = 30 \cdot 0{,}5 + 80 \cdot 0{,}5 = \mathbf{55\%}$ Torwahrscheinlichkeit.
(e) Wenn Neymar immer links schießt: Ter Stegen springt immer links, Torwahrscheinlichkeit nur noch 30% – deutlich schlechter als 55%. Das zeigt: Vorhersehbarkeit schadet im Nullsummenspiel.

Stufe 3: Schwer

Aufgabe 2.5 – 3×3-Nullsummenspiel

Aufgabe 2.5

Zwei Finanzhändler konkurrieren in einem Markt. Auszahlung für Händler 1 (in Tsd. €):

H1 \ H2	Aggressiv	Neutral	Defensiv
Aggressiv	0	6	8
Neutral	−6	0	4
Defensiv	−8	−4	0

(a) Zeigen Sie, dass Defensiv für H1 dominiert ist.

(b) Zeigen Sie nach Eliminierung, dass Defensiv für H2 dominiert ist.

(c) Lösen Sie das verbleibende 2×2-Spiel.

(d) Berechnen Sie Spielwert und optimale Mischstrategien.

(e) Was zeigt dieses Spiel über den Vorteil von aggressivem Verhalten?

Lösung: Aufgabe 2.5

(a) Defensiv vs Neutral für H1: $-8 < -6$, $-4 < 0$, $0 < 4$ – Defensiv dominiert durch Neutral strikt.
(b) Nach Streichen von H1-Defensiv:

	Aggressiv	Neutral	Defensiv
Aggressiv	0	6	8
Neutral	-6	0	4

H2 minimiert. H2-Defensiv vs H2-Neutral: $8 > 4$ und $4 > 0$ – H2 bevorzugt Neutral (niedriger). H2-Aggressiv vs H2-Neutral: $0 < 6$, $-6 < 0$ – H2 bevorzugt Aggressiv (niedriger). H2-Defensiv dominiert? Defensiv für H2: H2 möchte minimieren – Aggressiv liefert für H2: $0, -6$ (H2 bekommt $0, +6$ gespiegelt).
Das Spiel ist antisymmetrisch: $a_{ij} = -a_{ji}$. Defensiv von H2 ist schlechter als Aggressiv für H2 (da $8 > 4 > 0$). H2-Defensiv dominiert durch H2-Neutral: $8 > 4$, $4 > 0$ ✓.
(c) 2×2-Restspiel:

	Aggressiv	Neutral
Aggressiv	0	6
Neutral	-6	0

Maximin H1: $\min(0, 6) = 0$; $\min(-6, 0) = -6$. Maximin $= 0$ (Aggressiv). Minimax H2: $\max(0, -6) = 0$; $\max(6, 0) = 6$. Minimax $= 0$.
(d) Maximin = Minimax $= 0 \Rightarrow$ **Sattelpunkt!** Zelle (Aggressiv, Aggressiv) $= 0$. Spielwert $v^* = \mathbf{0}$. Beide spielen Aggressiv im Gleichgewicht.
(e) Das Spiel zeigt: Aggressives Verhalten garantiert mindestens Unentschieden (0). Defensives Verhalten führt zu negativen Ergebnissen. In Nullsummenspielen ohne Kooperationsmöglichkeit lohnt sich Aggression.

Aufgabe 2.6 – Minimax-Theorem und Sensitivität

Aufgabe 2.6

Gegeben ist folgendes 2×2-Nullsummenspiel mit Parameter k:

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

(a) Für welche Werte von k existiert ein Sattelpunkt?

(b) Für $k = 3$: Berechnen Sie die optimale gemischte Strategie und den Spielwert.

(c) Für $k = 0$: Berechnen Sie die optimale gemischte Strategie.

(d) Zeigen Sie, dass der Spielwert für alle $k \in (1, 2)$ zwischen 1 und 2 liegt.

Lösung: Aufgabe 2.6

(a) Sattelpunkt: Maximin: $\min(k, 2)$ und $\min(1, k)$. Minimax: $\max(k, 1)$ und $\max(2, k)$.
Sattelpunkt existiert, wenn Maximin = Minimax.

- $k \geq 2$: Maximin $= \min(k, 2), \min(1, k) = 2, 1$. Max $= 2$. Minimax $= \min(\max(k, 1), \max(2, k)) = \min(k, k) = k$. GG wenn $2 = k$, also $k = 2$.
- $k \leq 1$: Maximin $= k$. Minimax $= \min(1, 2) = 1$. GG wenn $k = 1$.

Sattelpunkt: $k = 1$ (Zelle 1,2 oder 2,1) oder $k = 2$ (Zelle 1,1 oder 2,2).
(b) $k = 3$: Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. p (Wahrsch. Zeile 1): $3p+1(1-p) = 2p+3(1-p) \Rightarrow 1 + 2p = 3 - p \Rightarrow 3p = 2 \Rightarrow \mathbf{p = 2/3}$. Spielwert: $v = 3 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{7}{3}}$.
(c) $k = 0$: Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $0 \cdot p+1(1-p) = 2p+0(1-p) \Rightarrow 1-p = 2p \Rightarrow \mathbf{p=1/3}$.
Spielwert: $v = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \mathbf{2/3}$.
(d) Allgemeiner Spielwert für $k \in (1, 2)$: $kp + (1 - p) = 2p + k(1 - p) \Rightarrow k - 1 = (k + 1 - 1)p \Rightarrow v = \frac{k \cdot k-2}{k-1+k-2} \ldots$
Einfacher: $v = \frac{k^2-2}{2k-3}$ für $k \neq 3/2$. Bei $k = 1$: $v = \frac{-1}{-1} = 1$. Bei $k = 2$: $v = \frac{2}{1} = 2$.
Da v stetig in k, gilt $v \in (1, 2)$ für $k \in (1, 2)$.

3 Modul 3 – Nicht-Nullsummenspiele

Stufe 1: Leicht

Aufgabe 3.1 – Nash-GG und Pareto im einfachen Spiel

Aufgabe 3.1

Zwei Nachbarn entscheiden, ob sie den gemeinsamen Garten pflegen (**Pflegen**) oder nicht (**Ignorieren**).

A \ B	Pflegen	Ignorieren
Pflegen	(4, 4)	(1, 5)
Ignorieren	(5, 1)	(2, 2)

(a) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte.

(b) Ist das Ergebnis Pareto-effizient?

(c) Welcher Spieltyp liegt vor?

(d) Welche Auszahlung wäre für beide am besten?

Lösung: Aufgabe 3.1

(a) Beste Antworten: Gegen Pflegen: $\max(4, 5) = 5 \rightarrow$ Ignorieren. Gegen Ignorieren: $\max(1, 2) = 2 \rightarrow$ Ignorieren. Ignorieren ist dominant für A (und symmetrisch für B). **Nash-GG: (Ignorieren, Ignorieren) = (2, 2).**
(b) (Ignorieren, Ignorieren) = (2,2) wird von (Pflegen, Pflegen) = (4,4) Pareto-dominiert. $\Rightarrow$ **Nicht Pareto-effizient.**
(c) Gefangenendilemma: Individuell rational $\rightarrow$ kollektiv suboptimal.
(d) (Pflegen, Pflegen) = **(4, 4)** – beide profitieren. Benötigt Koordination oder Vertrag.

Aufgabe 3.2 – Mehrere Nash-Gleichgewichte

Aufgabe 3.2

Zwei Fahrer (A, B) an einer Kreuzung ohne Ampel. Jeder entscheidet: **Fahren** oder **Warten**.

A \ B	Fahren	Warten
Fahren	(−10, −10)	(3, 1)
Warten	(1, 3)	(0, 0)

(a) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte.

(b) Sind beide Gleichgewichte Pareto-effizient?

(c) Warum ist dies ein Koordinationsproblem und kein Gefangenendilemma?

(d) Wie könnte man dieses Problem in der Praxis lösen?

Lösung: Aufgabe 3.2

(a)

- (Fahren, Warten) = (3,1): A kann nicht verbessern ($3 > 1$), B kann nicht verbessern ($1 > -10$) ✓ – **Nash-GG 1**.
- (Warten, Fahren) = (1,3): A kann nicht verbessern ($1 > -10$), B kann nicht verbessern ($3 > 0$) ✓ – **Nash-GG 2**.
- (Fahren, Fahren): A wechselt zu Warten ($1 > -10$) → kein GG.
- (Warten, Warten): A wechselt zu Fahren ($3 > 0$) → kein GG.

(b) Beide Nash-GG (3,1) und (1,3) sind Pareto-effizient (kein Ergebnis macht beide besser).
(c) Kein Gefangenendilemma, weil kein Spieler eine dominante Strategie hat. Es ist ein Koordinationsproblem: Die Spieler müssen sich koordinieren, aber haben entgegengesetzte Präferenzen über die Gleichgewichte.
(d) Präktische Lösungen: Vorfahrtsregeln (rechts vor links), Verkehrsampeln, "Wer zuerst ankommt, fährt zuerst" als Focal Point.

Stufe 2: Mittel

Aufgabe 3.3 – Verhandlungsspiel

Aufgabe 3.3

Käufer (K) und Verkäufer (V) verhandeln über ein Haus. K hat Wertschätzung 500, V hat Mindestpreis 300 (alle Werte in Tsd. €). Beide wählen gleichzeitig ein Angebot: **300**, **400** oder **500**. Einigung bei gleichen Angeboten; bei verschiedenen Angeboten gilt: kein Handel. Auszahlung bei Einigung: K erhält (500 − Preis), V erhält (Preis − 300).

(a) Erstellen Sie die vollständige Auszahlungsmatrix.

(b) Identifizieren Sie alle Nash-Gleichgewichte.

(c) Sind alle Nash-GG Pareto-effizient?

(d) Welches Nash-GG würden Sie als fairstes bezeichnen und warum?

Lösung: Aufgabe 3.3

(a) Bei Übereinstimmung: Preis 300 → (200, 0); Preis 400 → (100, 100); Preis 500 → (0, 200). Bei Nicht-Übereinstimmung: (0, 0).

K \ V	300	400	500
300	(200, 0)	(0, 0)	(0, 0)
400	(0, 0)	(100, 100)	(0, 0)
500	(0, 0)	(0, 0)	(0, 200)

(b) Alle drei Diagonaleinträge sind Nash-GG: **(300,300)=(200,0)**, **(400,400)=(100,100)**, **(500,500)=(0,200)**.
(c) Alle drei sind Pareto-effizient (Nicht-Einigung (0,0) wäre für beide schlechter). Aber untereinander: (100,100) ist fairer, (200,0) und (0,200) sind extreme Verteilungen.
(d) **(400, 400) = (100, 100)** ist das fairste Nash-GG:

- Symmetrische Aufteilung des Handelsgewinns (200 Tsd. total, je 100 für K und V)
- Entspricht dem Nash-Verhandlungsgleichgewicht (Produkt maximiert: $100 \times 100 = 10000$)

Aufgabe 3.4 – Pareto-Analyse und soziales Optimum

Aufgabe 3.4

Zwei Firmen (X, Y) entscheiden über Umweltschutz-Investitionen: **Hoch**, **Mittel** oder **Niedrig**.

X \ Y	Hoch	Mittel	Niedrig
Hoch	(4, 4)	(2, 5)	(0, 6)
Mittel	(5, 2)	(3, 3)	(1, 4)
Niedrig	(6, 0)	(4, 1)	(2, 2)

(a) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte.

(b) Erstellen Sie eine vollständige Pareto-Tabelle.

(c) Berechnen Sie die soziale Wohlfahrt (Summe der Auszahlungen) für alle Ergebnisse.

(d) Welches Ergebnis maximiert die Gesamtwohlfahrt und wie weicht es vom Nash-GG ab?

Lösung: Aufgabe 3.4

(a) Niedrig ist dominant für beide. Nash-GG: **(Niedrig, Niedrig) = (2, 2).**
(b/c) Pareto-Tabelle mit Wohlfahrt:

Ergebnis	X	Y	Wohlfahrt	Pareto
(Hoch, Hoch)	4	4	8	effizient
(Hoch, Mittel)	2	5	7	dominiert
(Hoch, Niedrig)	0	6	6	effizient
(Mittel, Hoch)	5	2	7	dominiert
(Mittel, Mittel)	3	3	6	dominiert
(Mittel, Niedrig)	1	4	5	dominiert
(Niedrig, Hoch)	6	0	6	effizient
(Niedrig, Mittel)	4	1	5	dominiert
(Niedrig, Niedrig)	2	2	4	dominiert – **Nash-GG!**

(d) Wohlfahrtsmaximum: **(Hoch, Hoch) = (4, 4), Wohlfahrt = 8.** Nash-GG (2,2) hat Wohlfahrt 4 – nur halb so viel! ⇒ Regulierung (Umweltsteuer, Subventionen) könnte die Firmen in das soziale Optimum lenken.

Stufe 3: Schwer

Aufgabe 3.5 – Wiederholtes Spiel und Tit-for-Tat

Aufgabe 3.5

Zwei Oligopolisten (A, B) spielen das folgende Preisspiel:

A \ B	Hoch	Niedrig
Hoch	(8, 8)	(0, 12)
Niedrig	(12, 0)	(3, 3)

Das Spiel wird **unendlich oft** wiederholt. Beide Spieler nutzen den Diskontfaktor $\delta \in (0, 1)$.

(a) Bestimmen Sie das Nash-GG des einmaligen Spiels.

(b) A nutzt Tit-for-Tat: Starte mit Hoch; kopiere in jeder Folgeperiode die Entscheidung des Gegners in der Vorperiode. Berechnen Sie den Barwert bei beidseitiger Kooperation (Hoch/Hoch) für A.

(c) Berechnen Sie den Barwert von einseitigem Abweichen (Niedrig in $t = 0$, dann Nash-Strafe ab $t = 1$) für A.

(d) Zeigen Sie, dass Kooperation möglich ist, wenn $\delta \geq \frac{4}{9}$.

Lösung: Aufgabe 3.5

(a) Nash-GG einmalig: Niedrig ist dominant (12>8 und 3>0). **(Niedrig, Niedrig) = (3, 3).**

(b) Barwert Kooperation (Hoch/Hoch forever):

$$V_K = 8 + 8\delta + 8\delta^2 + \cdots = \frac{8}{1-\delta}$$

(c) Barwert Abweichen (Niedrig in $t = 0$, dann Nash ab $t = 1$):

$$V_A = 12 + 3\delta + 3\delta^2 + \cdots = 12 + \frac{3\delta}{1-\delta}$$

(d) Kooperation stabil, wenn $V_K \geq V_A$:

$$\frac{8}{1-\delta} \geq 12 + \frac{3\delta}{1-\delta}$$

$$\frac{8-3\delta}{1-\delta} \geq 12 \;\Rightarrow\; 8-3\delta \geq 12(1-\delta) \;\Rightarrow\; 8-3\delta \geq 12-12\delta \;\Rightarrow\; 9\delta \geq 4 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\delta \geq \frac{4}{9}}$$

Bei $\delta \geq 4/9$ ist Tit-for-Tat eine Nash-GG-Strategie des wiederholten Spiels. Praktisch: Beide Firmen müssen die Zukunft hinreichend wertschätzen.

Aufgabe 3.6 – Gemischte Strategien im Nicht-Nullsummenspiel

Aufgabe 3.6

Zwei Spieler (R = Rows, C = Columns) spielen folgendes Spiel:

R \ C	Links	Rechts
Oben	(2, 1)	(0, 0)
Unten	(0, 0)	(1, 2)

(a) Bestimmen Sie alle reinen Nash-Gleichgewichte.

(b) Zeigen Sie, dass es ein gemischtes Nash-GG gibt, und berechnen Sie p^* (R spielt Oben mit Wahrsch. p) und q^* (C spielt Links mit Wahrsch. q).

(c) Berechnen Sie die Auszahlungen im gemischten Gleichgewicht für beide Spieler.

(d) Warum nennt man dieses Spiel ein "Battle of the Sexes"? Vergleichen Sie die drei Nash-Gleichgewichte.

Lösung: Aufgabe 3.6

(a) Reine Nash-GG:

- (Oben, Links) = (2,1): R kann nicht verbessern ($2 > 0$), C kann nicht verbessern ($1 > 0$) ✓
- (Unten, Rechts) = (1,2): R kann nicht verbessern ($1 > 0$), C kann nicht verbessern ($2 > 0$) ✓

(b) Gemischtes GG: C indifferent (q = Wahrsch. Links): $2q + 0(1-q) = 0 \cdot q + 1(1-q) \Rightarrow 2q = 1 - q \Rightarrow \mathbf{q^* = 1/3}$. R indifferent ($p$ = Wahrsch. Oben): $1 \cdot p + 0(1-p) = 0 \cdot p + 2(1-p) \Rightarrow p = 2 - 2p \Rightarrow \mathbf{p^* = 2/3}$.

(c) Auszahlungen im gemischten GG:

- R: $2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \mathbf{\frac{2}{3}}$
- C: $1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \mathbf{\frac{2}{3}}$

(d) Battle of the Sexes: Koordinationsspiel mit entgegengesetzten Präferenzen: R bevorzugt (Oben, Links) = (2,1), C bevorzugt (Unten, Rechts) = (1,2). Beide möchten sich koordinieren, aber auf unterschiedliche Gleichgewichte. Vergleich der drei GG:

- (Oben, Links): gut für R (2), schlecht für C (1)
- (Unten, Rechts): schlecht für R (1), gut für C (2)
- Gemischt: beide erhalten nur 2/3 – schlechtestes Ergebnis für beide!

4 Modul 4 – Kooperative Spieltheorie

Stufe 1: Leicht

Aufgabe 4.1 – Shapley-Wert: 3 Spieler

Aufgabe 4.1

Drei Firmen (1, 2, 3) können gemeinsam ein Projekt durchführen. Die charakteristische Funktion lautet:

$$v(\emptyset) = 0, \quad v(\{1\}) = 0, \quad v(\{2\}) = 0, \quad v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1,2\}) = 60, \quad v(\{1,3\}) = 40, \quad v(\{2,3\}) = 30, \quad v(\{1,2,3\}) = 90$$

(a) Berechnen Sie den Shapley-Wert für alle drei Spieler.

(b) Prüfen Sie: Erfüllt die Shapley-Verteilung Effizienz und Individualrationalität?

(c) Welcher Spieler hat den größten Beitrag zur großen Koalition?

Lösung: Aufgabe 4.1

(a) Shapley-Wert: $\phi_i = \sum_{S \ni i} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}[v(S) - v(S \setminus \{i\})]$
Für $n = 3$: Gewicht für $|S| = 1$: $\frac{0!\cdot 2!}{6} = \frac{2}{6}$; für $|S| = 2$: $\frac{1!\cdot 1!}{6} = \frac{1}{6}$; für $|S| = 3$: $\frac{2!\cdot 0!}{6} = \frac{2}{6}$.
Spieler 1:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \tfrac{2}{6}[v(\{1\}) - v(\emptyset)] + \tfrac{1}{6}[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] + \tfrac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{3\})] + \tfrac{2}{6}[v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})] \\ &= \tfrac{2}{6}\cdot 0 + \tfrac{1}{6}\cdot 60 + \tfrac{1}{6}\cdot 40 + \tfrac{2}{6}\cdot 60 \\ &= 0 + 10 + \tfrac{40}{6} + 20 = 10 + 6{,}67 + 20 = \mathbf{36{,}67}\end{aligned}$$

Spieler 2: $\phi_2 = \frac{2}{6}\cdot 0 + \frac{1}{6}\cdot 60 + \frac{1}{6}\cdot 30 + \frac{2}{6}\cdot 50 = 0 + 10 + 5 + 16{,}67 = \mathbf{31{,}67}$
Spieler 3: $\phi_3 = 90 - 36{,}67 - 31{,}67 = \mathbf{21{,}67}$
Kontrolle: $36{,}67 + 31{,}67 + 21{,}67 = 90$ ✓
(b) Effizienz: $\sum \phi_i = 90 = v(\{1,2,3\})$ ✓ Individualrationalität: $36{,}67 > 0$, $31{,}67 > 0$, $21{,}67 > 0$ – alle erhalten mehr als allein ✓.
(c) Spieler 1 hat den größten Beitrag ($\phi_1 = 36{,}67$) – er schafft den größten Mehrwert in Koalitionen.

Aufgabe 4.2 – Core und Stabilität

Aufgabe 4.2

Drei Spieler (1, 2, 3) mit charakteristischer Funktion:

$$v(\{1\}) = 10, \; v(\{2\}) = 20, \; v(\{3\}) = 15$$

$$v(\{1,2\}) = 50, \; v(\{1,3\}) = 40, \; v(\{2,3\}) = 45, \; v(\{1,2,3\}) = 70$$

(a) Was ist der Core (Kern) eines kooperativen Spiels?

(b) Formulieren Sie alle Bedingungen, die eine Verteilung (x_1, x_2, x_3) erfüllen muss, um im Core zu liegen.

(c) Prüfen Sie, ob $(20, 25, 25)$ im Core liegt.

(d) Berechnen Sie den Shapley-Wert und prüfen Sie, ob er im Core liegt.

Lösung: Aufgabe 4.2

(a) Core: Die Menge aller Verteilungen, die kein Subkollektiv durch Abspaltung verbessern kann. Eine Verteilung liegt im Core, wenn keine Teilgruppe von Spielern durch Abweichen mehr erhalten kann.
(b) Core-Bedingungen:

- Effizienz: $x_1 + x_2 + x_3 = 70$
- Individualrationalität: $x_1 \geq 10$, $x_2 \geq 20$, $x_3 \geq 15$
- Koalitionsrationalität: $x_1 + x_2 \geq 50$, $x_1 + x_3 \geq 40$, $x_2 + x_3 \geq 45$

(c) Prüfung $(20, 25, 25)$: Effizienz: $70 = 70$ ✓. Individual: $20 > 10$, $25 > 20$, $25 > 15$ ✓. Koalitionen: $20 + 25 = 45 < 50$ **VERLETZT!** $\Rightarrow$ $(20, 25, 25)$ liegt **nicht im Core**.
(d) Shapley-Wert: $\phi_1 = \frac{2}{6}(10) + \frac{1}{6}(30) + \frac{1}{6}(25) + \frac{2}{6}(25) = 3{,}33 + 5 + 4{,}17 + 8{,}33 = 20{,}83$ $\phi_2 = \frac{2}{6}(20) + \frac{1}{6}(30) + \frac{1}{6}(30) + \frac{2}{6}(25) = 6{,}67 + 5 + 5 + 8{,}33 = 25$ $\phi_3 = 70 - 20{,}83 - 25 = 24{,}17$
Prüfung Core: $\phi_1 + \phi_2 = 45{,}83 < 50$ **VERLETZT** – Shapley-Wert liegt **nicht im Core** (Core kann leer sein).

Stufe 2: Mittel

Aufgabe 4.3 – Shapley-Wert: Stimmgewichte

Aufgabe 4.3

Ein Aufsichtsrat hat 4 Mitglieder mit Stimmgewichten: $w_1 = 3$, $w_2 = 2$, $w_3 = 2$, $w_4 = 1$. Entscheidungen benötigen eine Mehrheit von $q = 5$ Stimmen. Die charakteristische Funktion ist:

$$v(S) = 1 \text{ falls } \sum_{i \in S} w_i \geq 5, \quad v(S) = 0 \text{ sonst.}$$

(a) Berechnen Sie $v(S)$ für alle Koalitionen.

(b) Berechnen Sie den Shapley-Wert für alle vier Spieler.

(c) Interpretieren Sie: Hat Spieler 4 (mit 1 Stimme) tatsächlich keinen Einfluss?

(d) Vergleichen Sie Stimmgewichte mit Shapley-Machtwert.

Lösung: Aufgabe 4.3

(a) Gewinnende Koalitionen (Summe ≥ 5):

- 2er: $\{1,2\} = 5$✓, $\{1,3\} = 5$✓, $\{2,3\} = 4$×, $\{1,4\} = 4$×, $\{2,4\} = 3$×, $\{3,4\} = 3$×
- 3er: $\{1,2,3\} = 7$✓, $\{1,2,4\} = 6$✓, $\{1,3,4\} = 6$✓, $\{2,3,4\} = 5$✓
- $\{1,2,3,4\} = 8$✓

(b) Shapley-Werte (über alle $4! = 24$ Permutationen):
Spieler i erhält $1/24$ für jede Reihenfolge, in der er die Koalition zum Sieg bringt.
Pivotpositionen: ϕ_1: In Permutationen, wo Spieler 1 pivotal ist (macht die Koalition gewinnend): Koalitionen, die ohne 1 verlieren, mit 1 gewinnen: $\{1\}$ wird $\{1\}$ (allein:3<5), $\{1,2\} = 5$ (pivotal wenn 2 schon da); $\{1,3\} = 5$ (pivotal wenn 3 schon da); $\{1,2,4\}$ wenn 2,4 schon da; $\{1,3,4\}$ wenn 3,4 schon da.
Ergebnis (standardmäßig berechnet): $\phi_1 = \frac{10}{24} \approx 0{,}417$; $\phi_2 = \phi_3 = \frac{6}{24} = 0{,}250$; $\phi_4 = \frac{2}{24} \approx 0{,}083$. Kontrolle: $0{,}417 + 0{,}250 + 0{,}250 + 0{,}083 = 1$ ✓
(c) Spieler 4 hat Shapley-Wert 8,3% – er hat tatsächlich Einfluss, nämlich in Situationen wo $\{2,3,4\}$ gewinnend wird. Ohne Spieler 4 wäre $\{2,3\} = 4 < 5$ – er ist in dieser Koalition pivotal.
(d) Stimmgewichte: $3:2:2:1 = 37{,}5\% : 25\% : 25\% : 12{,}5\%$. Shapley: 41,7% : 25% : 25% : 8,3%. Spieler 1 hat mehr Macht als sein Stimmanteil, Spieler 4 weniger.

Aufgabe 4.4 – Nash-Verhandlungslösung

Aufgabe 4.4

Zwei Parteien (A, B) verhandeln über die Aufteilung eines Gewinns von 100 Tsd. €. Der Disagreement-Punkt (Statusquo) ist $(d_A, d_B) = (10, 20)$.

(a) Was ist die Nash-Verhandlungslösung? Formulieren Sie das Optimierungsproblem.

(b) Berechnen Sie die Nash-Lösung (x_A^*, x_B^*).

(c) Wie verändert sich die Lösung, wenn der Statusquo auf $(20, 20)$ steigt?

(d) Interpretieren Sie die Axiome der Nash-Verhandlungslösung (Effizienz, Symmetrie, Skalierungsinvarianz, Unabhängigkeit irrelevanter Alternativen).

Lösung: Aufgabe 4.4

(a) Nash-Verhandlungslösung maximiert das Nash-Produkt:

$$\max_{x_A, x_B} (x_A - d_A)(x_B - d_B) \quad \text{u.d.B.} \quad x_A + x_B = 100,\ x_A \geq d_A,\ x_B \geq d_B$$

(b) Mit $x_B = 100 - x_A$:

$$\max_{x_A} (x_A - 10)(90 - x_A)$$

FOB: $(90 - x_A) - (x_A - 10) = 0 \Rightarrow 100 - 2x_A = 0 \Rightarrow x_A^* = 50$, $x_B^* = 50$.
Hmm – berücksichtige Statusquo: $\max (x_A - 10)(x_B - 20)$, $x_A + x_B = 100$. $(x_A - 10)(80 - x_A) \rightarrow$ FOB: $(80 - x_A) - (x_A - 10) = 0 \Rightarrow 90 = 2x_A \Rightarrow x_A = 45$. $x_A^* = 45$, $x_B^* = 55$.
Interpretation: B hat höheren Statusquo ($20 > 10$) und erhält mehr ($55 > 45$).
(c) Statusquo $(20, 20)$: $\max (x_A - 20)(x_B - 20)$, $x_A + x_B = 100$. $(x_A - 20)(80 - x_A) \rightarrow 60 = 2x_A - 20 \Rightarrow x_A = 40$? FOB: $(80 - x_A) - (x_A - 20) = 0 \Rightarrow 100 - 2x_A = 0 \Rightarrow x_A^* = 50, x_B^* = 50$. Symmetrischer Statusquo $\Rightarrow$ symmetrische Aufteilung.
(d) Axiome:

- *Effizienz:* Die Lösung liegt auf der Pareto-Grenze.
- *Symmetrie:* Bei symmetrischem Spiel erhalten beide gleich viel.
- *Skalierungsinvarianz:* Lineare Transformationen ändern die Lösung nicht.
- *IIA:* Irrelevante Alternativen verändern die Lösung nicht.

Stufe 3: Schwer

Aufgabe 4.5 – Konvexes Spiel und Core

Aufgabe 4.5

Ein Spiel (N, v) mit $N = \{1, 2, 3\}$ und:

$$v(\{1\}) = 2,\ v(\{2\}) = 3,\ v(\{3\}) = 1$$

$$v(\{1,2\}) = 10,\ v(\{1,3\}) = 7,\ v(\{2,3\}) = 8,\ v(\{1,2,3\}) = 15$$

(a) Zeigen Sie, dass das Spiel konvex ist (prüfen Sie die Konvexitätsbedingung für alle Koalitionspaare).

(b) Berechnen Sie den Shapley-Wert.

(c) Zeigen Sie, dass bei konvexen Spielen der Shapley-Wert im Core liegt.

(d) Bestimmen Sie alle Ecken des Core.

Lösung: Aufgabe 4.5

(a) Konvexitätsbedingung: $v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$ für alle S, T.
Prüfung $S = \{1,2\}, T = \{1,3\}$: $v(\{1,2,3\}) + v(\{1\}) \geq v(\{1,2\}) + v(\{1,3\})$: $15 + 2 \geq 10 + 7 \Rightarrow 17 \geq 17$ ✓
$S = \{1,2\}, T = \{2,3\}$: $v(\{1,2,3\}) + v(\{2\}) \geq v(\{1,2\}) + v(\{2,3\})$: $15 + 3 \geq 10 + 8 \Rightarrow 18 \geq 18$ ✓
$S = \{1,3\}, T = \{2,3\}$: $15 + v(\{3\}) \geq 7 + 8$: $15 + 1 = 16 \geq 15$ ✓
Alle weiteren Bedingungen sind trivial (Einzelspieler). **Spiel ist konvex.**
(b) Shapley-Wert: $\phi_1 = \frac{2}{6}(2) + \frac{1}{6}(7) + \frac{1}{6}(6) + \frac{2}{6}(7) = \frac{4}{6} + \frac{7}{6} + \frac{6}{6} + \frac{14}{6} = \frac{31}{6} \approx 5{,}17$
$\phi_2 = \frac{2}{6}(3) + \frac{1}{6}(8) + \frac{1}{6}(7) + \frac{2}{6}(7) = \frac{6}{6} + \frac{8}{6} + \frac{7}{6} + \frac{14}{6} = \frac{35}{6} \approx 5{,}83$ $\phi_3 = 15 - 5{,}17 - 5{,}83 = 4{,}00$
Kontrolle: $5{,}17 + 5{,}83 + 4 = 15$ ✓
(c) Eigenschaft konvexer Spiele: Bei konvexen Spielen liegt der Shapley-Wert immer im Core, weil die Supermodulität garantiert, dass die marginalen Beiträge alle Core-Bedingungen erfüllen. Prüfung: $\phi_1 + \phi_2 = 11 \geq 10$ ✓; $\phi_1 + \phi_3 = 9{,}17 \geq 7$ ✓; $\phi_2 + \phi_3 = 9{,}83 \geq 8$ ✓.
(d) Core-Ecken sind die Shapley-Werte bei verschiedenen Reihenfolgen (bei konvexen Spielen = Ecken des Core): $(2, 8, 5)$, $(2, 7, 6)$, $(7, 3, 5)$, $(6, 8, 1)$, $(7, 7, 1)$, $(9, 5, 1)$ – je nach Permutation. Der Shapley-Wert $(5{,}17, 5{,}83, 4)$ ist der Schwerpunkt (Mittelwert) aller Ecken.

Aufgabe 4.6 – Gerechte Kostenaufteilung

Aufgabe 4.6

Drei Städte (A, B, C) wollen gemeinsam eine Wasserleitung bauen. Die Kosten für einzelne oder kombinierte Leitungen (in Mio. €):

$$c(\{A\}) = 12,\ c(\{B\}) = 10,\ c(\{C\}) = 8$$

$$c(\{A,B\}) = 16,\ c(\{A,C\}) = 15,\ c(\{B,C\}) = 13,\ c(\{A,B,C\}) = 20$$

(a) Zeigen Sie, dass die große Koalition effizient ist (subadditiv).

(b) Definieren Sie die charakteristische Funktion der Einsparungen $v(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S)$ und berechnen Sie alle Werte.

(c) Berechnen Sie den Shapley-Wert der Einsparungen.

(d) Berechnen Sie den Shapley-Kostenbeitrag jeder Stadt und prüfen Sie Rationalität.

Lösung: Aufgabe 4.6

(a) Subadditivität: $c(\{A,B,C\}) = 20 \leq 12 + 10 + 8 = 30$ ✓ (Ersparnis 10 Mio. €). Auch: $c(\{A,B\}) = 16 \leq 12 + 10 = 22$ ✓; $c(\{A,C\}) = 15 \leq 20$ ✓; $c(\{B,C\}) = 13 \leq 18$ ✓.
(b) Einsparungsfunktion:

$$\begin{aligned} v(\{A\}) = 12 - 12 = 0, \quad v(\{B\}) = 0, \quad v(\{C\}) = 0 \\ v(\{A,B\}) = 12 + 10 - 16 = 6 \\ v(\{A,C\}) = 12 + 8 - 15 = 5 \\ v(\{B,C\}) = 10 + 8 - 13 = 5 \\ v(\{A,B,C\}) = 12 + 10 + 8 - 20 = 10 \end{aligned}$$

(c) Shapley-Wert der Einsparungen: $\phi_A = \frac{2}{6}(0) + \frac{1}{6}(6) + \frac{1}{6}(5) + \frac{2}{6}(5) = 0 + 1 + \frac{5}{6} + \frac{10}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$ $\phi_B = \frac{2}{6}(0) + \frac{1}{6}(6) + \frac{1}{6}(5) + \frac{2}{6}(5) = 0 + 1 + \frac{5}{6} + \frac{10}{6} = 3{,}5$ $\phi_C = 10 - 3{,}5 - 3{,}5 = 3{,}0$
(d) Shapley-Kostenbeitrag: Stadt A zahlt: $c(\{A\}) - \phi_A = 12 - 3{,}5 = \mathbf{8{,}5}$ Mio. Stadt B zahlt: $c(\{B\}) - \phi_B = 10 - 3{,}5 = \mathbf{6{,}5}$ Mio. Stadt C zahlt: $c(\{C\}) - \phi_C = 8 - 3{,}0 = \mathbf{5{,}0}$ Mio.
Kontrolle: $8{,}5 + 6{,}5 + 5{,}0 = 20$ Mio. $= c(\{A,B,C\})$ ✓
Rationalität: Jede Stadt zahlt weniger als ihre Einzelkosten ($8{,}5 < 12$, $6{,}5 < 10$, $5{,}0 < 8$) ✓.