Die Simplex-Methode

Lineare Programmierung – Grundlagen und Algorithmus

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Dieses Dokument führt systematisch in die Simplex-Methode ein. Es richtet sich an Studienanfänger ohne Vorkenntnisse in der Optimierung.

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und Motivation **2**

2 Grundbegriffe der linearen Programmierung **2**
2.1 Das allgemeine lineare Programm 2
2.2 Wichtige Begriffe 3

3 Geometrische Interpretation (2 Variablen) **3**
3.1 Beispiel zur geometrischen Lösung 3
3.2 Fundamentalsatz der linearen Programmierung 4

4 Standardform und Schlupfvariablen **5**
4.1 Überführung in Standardform 5
4.2 Basislösungen und Basisvariablen 5

5 Der Simplex-Algorithmus **6**
5.1 Das Simplex-Tableau 6
5.2 Pivot-Regeln 6
5.2.1 Wahl der Pivotspalte (eintretende Variable) 6
5.2.2 Wahl der Pivotzeile (austretende Variable) 7
5.2.3 Pivotoperation 7
5.3 Vollständiges Algorithmus-Schema 7

6 Vollständiges Beispiel: 2 Variablen **8**

7 Großes Beispiel: 5 Variablen, 4 Nebenbedingungen **9**

8 Dualität **9**
8.1 Das duale lineare Programm 9
8.2 Schwacher und starker Dualitätssatz 10
8.3 Komplementäre Schlupfbedingung 10

9 Schattenpreise **11**
9.1 Wirtschaftliche Interpretation der dualen Variablen 11
9.2 Gültigkeitsbereich der Schattenpreise 11

10 Dualer Simplex-Algorithmus **12**
10.1 Motivation 12
10.2 Algorithmus 12
10.3 Vollständiges Beispiel: Dualer Simplex 13

11 Spezialfälle **14**
11.1 Unbeschränktes Problem 14
11.2 Unzulässiges Problem 14
11.3 Entartung 15

12 Komplexität und praktische Hinweise **15**
12.1 Theoretische Komplexität 15
12.2 Dualität 15
12.3 Praktische Hinweise 15

13 Zusammenfassung **16**

1 Einführung und Motivation

Viele Entscheidungsprobleme lassen sich mathematisch als **lineare Optimierungsprobleme** formulieren: Wir suchen die beste Lösung – gemessen an einer linearen Zielfunktion – unter der Bedingung, dass bestimmte lineare Ungleichungen und Gleichungen erfüllt sind.

Typische Anwendungsbeispiele

- **Produktion:** Welche Mengen verschiedener Produkte sollen hergestellt werden, um den Gewinn zu maximieren, wenn Kapazitätsgrenzen beachtet werden müssen?
- **Logistik:** Wie werden Transportwege so geplant, dass die Kosten minimal sind?
- **Finanzwesen:** Wie wird ein Portfolio zusammengestellt, das bei gegebenem Risiko die Rendite maximiert?
- **Ernährungsplanung:** Wie werden Nahrungsmittel so kombiniert, dass alle Nährstoffbedarfe gedeckt sind und die Kosten minimal bleiben?

Die **Simplex-Methode** (englisch: *Simplex Algorithm*), entwickelt von George B. Dantzig im Jahr 1947, ist das klassische Verfahren zur Lösung solcher Probleme. Sie ist bis heute eines der am häufigsten eingesetzten Optimierungsverfahren in der Praxis.

2 Grundbegriffe der linearen Programmierung

2.1 Das allgemeine lineare Programm

Definition: Lineares Programm (LP)

Ein **lineares Programm** (LP) hat die Form:

$$\text{Maximiere (oder Minimiere)} \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1}$$

$$\text{unter den Nebenbedingungen} \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \tag{3}$$

wobei $c_j, a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ gegebene Konstanten sind und $x_j \geq 0$ die **Entscheidungsvariablen** bezeichnen.

In Matrixschreibweise lautet das LP:

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{unter} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

mit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

2.2 Wichtige Begriffe

Definition: Zulässiger Bereich und Optimallösung

- Eine Belegung $(x_1, \ldots, x_n)$ heißt **zulässig**, wenn sie alle Nebenbedingungen (2) und die Nichtnegativitätsbedingungen (3) erfüllt.
- Die Menge aller zulässigen Belegungen heißt **zulässiger Bereich** $\mathcal{F}$.
- Eine zulässige Belegung $\mathbf{x}^*$ heißt **Optimallösung**, falls $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ (bei Maximierung).

Definition: Konvexe Menge und Ecke

- Eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F}$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt: $\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in \mathcal{F}$.
- Ein Punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ heißt **Ecke** (oder Extrempunkt), wenn er nicht als echte Konvexkombination zweier anderer Punkte aus $\mathcal{F}$ dargestellt werden kann.

Der zulässige Bereich eines LP ist stets ein **konvexes Polytop** – der Durchschnitt endlich vieler Halbräume.

3 Geometrische Interpretation (2 Variablen)

Für den Fall $n = 2$ lässt sich das LP anschaulich in der Ebene darstellen.

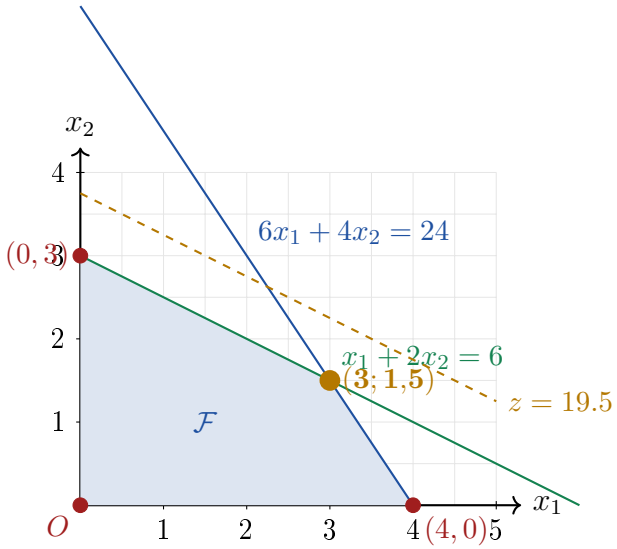
3.1 Beispiel zur geometrischen Lösung

Beispiel 1: Produktionsplanung

Ein Unternehmen stellt zwei Produkte P_1 und P_2 her. Der Deckungsbeitrag beträgt 5 GE pro Einheit P_1 und 4 GE pro Einheit P_2. Es gelten folgende Kapazitätsbeschränkungen:

$$\max \; z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \qquad \text{(Maschinenkapazität)} \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \qquad \text{(Lagerkapazität)} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Die Ecken des zulässigen Bereichs $\mathcal{F}$ sind $O = (0, 0)$, $(4, 0)$, $(3; 1{,}5)$ und $(0, 3)$. Das Optimum liegt in der Ecke $(3; 1{,}5)$ mit $z^* = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1{,}5 = 19{,}5$.

3.2 Fundamentalsatz der linearen Programmierung

Satz 1: Fundamentalsatz der LP

Sei das LP zulässig und beschränkt. Dann gilt:

1. Der zulässige Bereich $\mathcal{F}$ ist eine konvexe Menge.
2. Es existiert stets eine Optimallösung in einer Ecke von $\mathcal{F}$.
3. Ist $\mathcal{F}$ nichtleer und beschränkt, so besitzt das LP eine endliche Optimallösung.

Proof. **zu (1):** Jede Nebenbedingung $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq b_i$ definiert einen konvexen Halbraum. Der Durchschnitt konvexer Mengen ist konvex.

zu (2): Sei $\mathbf{x}^*$ eine Optimallösung, aber kein Extrempunkt. Dann existieren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{F}$ mit $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ und $\lambda \in (0, 1)$, sodass $\mathbf{x}^* = \lambda\mathbf{u} + (1 - \lambda)\mathbf{v}$. Wegen der Linearität der Zielfunktion gilt:

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{c}^\top \mathbf{u} + (1 - \lambda)\mathbf{c}^\top \mathbf{v}$$

Also ist mindestens einer der Werte $\mathbf{c}^\top \mathbf{u}$ oder $\mathbf{c}^\top \mathbf{v}$ mindestens so groß wie $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^*$ – damit existiert auch in einem Extrempunkt eine genauso gute Lösung. Durch Wiederholung dieses Arguments gelangt man stets zu einem Extrempunkt.

zu (3): Da $\mathcal{F}$ nichtleer und $\mathcal{F}$ als konvexes Polytop nur endlich viele Extrempunkte hat, ist das Maximum des linearen Zielfunktionals über $\mathcal{F}$ stets angenommen. □

Schlussfolgerung für den Algorithmus: Da das Optimum stets in einer Ecke liegt und ein konvexes Polytop nur *endlich viele* Ecken hat, genügt es, systematisch von Ecke zu Ecke zu wandern und dabei die Zielfunktion zu verbessern. Genau das ist die Grundidee der Simplex-Methode.

4 Standardform und Schlupfvariablen

4.1 Überführung in Standardform

Die Simplex-Methode arbeitet mit der **Standardform** des LP, in der alle Nebenbedingungen als Gleichungen vorliegen.

Definition: Standardform

Ein LP in Standardform lautet:

$$\max \ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{unter} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

Überführung einer Ungleichung in eine Gleichung:
Für jede $\leq$-Nebenbedingung $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq b_i$ führen wir eine **Schlupfvariable** $s_i \geq 0$ ein:

$$\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} + s_i = b_i, \quad s_i \geq 0$$

Die Schlupfvariable s_i gibt an, wie weit die Nebenbedingung von ihrer Grenze entfernt ist.

Beispiel 1 (Fortsetzung): Einführung der Schlupfvariablen

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + s_1 &= 24 \\ x_1 + 2x_2 + s_2 &= 6 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Das LP hat nun $n + m = 2 + 2 = 4$ Variablen und $m = 2$ Gleichungen.

4.2 Basislösungen und Basisvariablen

Definition: Basis – Basisvariablen – Basislösung

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \leq n$.

- Eine **Basis** B ist eine Auswahl von m linear unabhängigen Spalten aus $\mathbf{A}$.
- Die zugehörigen Variablen heißen **Basisvariablen** x_B, die übrigen **Nichtbasisvariablen** x_N.
- Setzt man $x_N = \mathbf{0}$, so ergibt sich die **Basislösung**: $x_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$.
- Eine Basislösung mit $x_B \geq \mathbf{0}$ heißt **zulässige Basislösung** (ZB-Lösung).

Satz 2: Ecken und zulässige Basisklösungen

Jede Ecke des zulässigen Bereichs $\mathcal{F}$ entspricht einer zulässigen Basislösung, und umgekehrt.

Beweisidee. Ein Punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ ist genau dann eine Ecke, wenn die aktiven Ungleichungen (d. h. jene mit $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} = b_i$) zusammen mit $x_j = 0$ für ausreichend viele j ein eindeutiges Gleichungssystem bilden – was exakt der Definition einer Basislösung entspricht. □

Die **Startzulässige Basislösung** ergibt sich für unser Beispiel durch $x_1 = x_2 = 0$, $s_1 = 24$, $s_2 = 6$ (Ursprung).

5 Der Simplex-Algorithmus

5.1 Das Simplex-Tableau

Das Simplex-Tableau fasst das LP kompakt zusammen. Es enthält die Koeffizientenmatrix, die rechte Seite und die Zielfunktionszeile.

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	b
s_1	6	4	1	0	24
s_2	1	2	0	1	6
z	-5	-4	0	0	0

Konvention: Die Zielfunktionszeile enthält die **reduzierten Kosten** $\bar{c}_j$. Bei negativen Werten $\bar{c}_j < 0$ kann die Zielfunktion noch verbessert werden.

5.2 Pivot-Regeln

Definition: Reduzierte Kosten und Optimalitätskriterium

Die **reduzierten Kosten** der Nichtbasisvariablen x_j sind:

$$\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{a}_j$$

Eine ZB-Lösung ist optimal, falls $\bar{c}_j \leq 0$ für alle Nichtbasisvariablen x_j (bei Maximierung).

5.2.1 Wahl der Pivotspalte (eintretende Variable)

Regel: Dantzig-Regel (größte Verbesserung pro Variable)

Wähle als eintretende Variable x_s jene Nichtbasisvariable mit dem **kleinsten** (negativsten) reduzierten Kosten:

$$s = \arg\min_j \bar{c}_j$$

Begründung: Erhöht man x_s um eine Einheit, verbessert sich die Zielfunktion um $|\bar{c}_s|$. Die Dantzig-Regel wählt die Variable mit der stärksten Verbesserungsrate.

5.2.2 Wahl der Pivotzeile (austretende Variable)

Regel: Minimales Quotienten-Kriterium

Für die eintretende Variable x_s berechne das **minimale Verhältnis**:

$$r = \arg\min_{i:\, a_{is} > 0} \frac{b_i}{a_{is}}$$

Die Basisvariable in Zeile r tritt aus der Basis aus.

Beweis der Zulässigkeitserhaltung. Erhöht man x_s von 0 auf $\theta > 0$, so ändern sich die Basisvariablen gemäß:

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - a_{is} \cdot \theta, \quad i = 1, \ldots, m$$

Damit alle $x_{B_i} \geq 0$ bleiben, muss gelten:

$$\theta \leq \frac{\bar{b}_i}{a_{is}} \quad \text{für alle } i \text{ mit } a_{is} > 0$$

Der maximal mögliche Wert ist $\theta^* = \min_{i:\, a_{is}>0} \frac{\bar{b}_i}{a_{is}}$. Die Zeile, die dieses Minimum erreicht, wird zur Pivotzeile – die dort stehende Basisvariable wird 0 und tritt aus. □

5.2.3 Pivotoperation

Sei (r, s) das Pivotelement a_{rs}. Die **Pivotoperation** transformiert das Tableau:

1. **Normierung der Pivotzeile:** Dividiere Zeile r durch a_{rs}:

$$\text{Zeile}_r \leftarrow \frac{1}{a_{rs}} \cdot \text{Zeile}_r$$

2. **Elimination in allen anderen Zeilen:** Für $i \neq r$:

$$\text{Zeile}_i \leftarrow \text{Zeile}_i - a_{is} \cdot \text{Zeile}_r$$

3. **Elimination in der Zielfunktionszeile:**

$$\text{Zeile}_z \leftarrow \text{Zeile}_z - \bar{c}_s \cdot \text{Zeile}_r$$

Nach der Pivotoperation steht x_s in der Basis (Einheitsvektor in Spalte s).

5.3 Vollständiges Algorithmus-Schema

Algorithmus: Simplex-Methode

1. **Initialisierung:** Stelle das Starttableau auf (Schlupfvariablen als Basisvariablen).
2. **Optimalitätstest:** Sind alle reduzierten Kosten $\bar{c}_j \leq 0$? Dann ist die aktuelle ZB-Lösung optimal. STOPP.

3. **Pivotspalte:** Wähle $s = \arg\min_j \bar{c}_j < 0$.
4. **Unbeschränktheitstest:** Gilt $a_{is} \leq 0$ für alle i? Dann ist das LP unbeschränkt. STOPP.
5. **Pivotzeile:** Wähle $r = \arg\min_{i:\, a_{is}>0} \bar{b}_i / a_{is}$.
6. **Pivotoperation:** Führe den Basiswechsel durch (x_s tritt ein, x_{B_r} tritt aus).
7. Gehe zu Schritt 2.

6 Vollständiges Beispiel: 2 Variablen

Wir lösen Beispiel 1 vollständig mit der Simplex-Methode.

Starttableau:

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	b
s_1	6	4	1	0	24
s_2	1	2	0	1	6
z	-5	-4	0	0	0

Iteration 1: $\bar{c}_1 = -5$ ist kleinstes Element $\Rightarrow$ x_1 tritt ein. Quotienten: $24/6 = 4$, $6/1 = 6$. Minimum: $4 \Rightarrow$ s_1 tritt aus. Pivotelement: **6**.

Pivotoperation: Zeile 1 $\div 6$; dann Zeile 2 $-1\cdot$ Zeile 1; Zeile z $+5\cdot$ Zeile 1.

Tableau nach Iteration 1:

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	1	2/3	1/6	0	4
s_2	0	4/3	$-1/6$	1	2
z	0	$-2/3$	5/6	0	20

Iteration 2: $\bar{c}_2 = -2/3 < 0 \Rightarrow$ x_2 tritt ein. Quotienten: $4/(2/3) = 6$, $2/(4/3) = 3/2$. Minimum: $3/2 \Rightarrow$ s_2 tritt aus. Pivotelement: **4/3**.

Pivotoperation: Zeile 2 $\cdot\frac{3}{4}$; dann Zeile 1 $-\frac{2}{3}\cdot$ Zeile 2; Zeile z $+\frac{2}{3}\cdot$ Zeile 2.

Tableau nach Iteration 2 (Optimaltableau):

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	1	0	1/4	$-1/2$	3
x_2	0	1	$-1/8$	3/4	3/2
z	0	0	3/4	1/2	**19,5**

Alle reduzierten Kosten ≥ 0: **Optimalität erreicht.**

$$\boxed{x_1^* = 3, \quad x_2^* = 1{,}5, \quad z^* = 19{,}5}$$

7 Großes Beispiel: 5 Variablen, 4 Nebenbedingungen

Beispiel 2: Produktionsprogrammplanung

$$\max\ z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 2x_5$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 &\leq 240 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 &\leq 270 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 &\leq 420 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 &\leq 350 \\ x_1, \ldots, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nach Einführung der Schlupfvariablen $s_1, \ldots, s_4$ ergibt sich ein LP mit 9 Variablen und 4 Gleichungen. Das Simplex-Tool berechnet die optimale Lösung (zur Kontrolle der maschinellen Berechnung).

Hinweis: Bei 5 Variablen und 4 Nebenbedingungen kann der Simplex-Algorithmus bis zu $\binom{9}{4} = 126$ Basislösungen durchlaufen. In der Praxis sind es deutlich weniger Iterationen.

8 Dualität

8.1 Das duale lineare Programm

Zu jedem linearen Programm – dem **Primalproblem** – existiert ein zugehöriges **Dualproblem**. Die Dualität ist eines der fundamentalsten Konzepte der linearen Programmierung.

Definition: Primal- und Dualproblem

Sei das **Primalproblem** gegeben als:

$$\text{(P)} \quad \max\ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{unter} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Dann ist das zugehörige **Dualproblem**:

$$\text{(D)} \quad \min\ \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \quad \text{unter} \quad \mathbf{A}^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

Die Variablen $y_i \geq 0$ heißen **duale Variablen** oder **Schattenpreise**.

Konstruktionsregeln:

- Das Dual hat so viele Variablen y_i, wie das Primal Nebenbedingungen hat (m Stück).
- Das Dual hat so viele Nebenbedingungen, wie das Primal Variablen hat (n Stück).
- Die Koeffizientenmatrix des Duals ist die **Transponierte** $\mathbf{A}^\top$ des Primals.
- Primal max $\rightarrow$ Dual min; Primal $\leq \rightarrow$ Dual $\geq$.

Beispiel 1 (Fortsetzung): Dualproblem

Das Primal lautet:

$$\max\ z = 5x_1 + 4x_2 \quad \text{u.d.N.} \quad 6x_1 + 4x_2 \leq 24, \quad x_1 + 2x_2 \leq 6, \quad x_1, x_2 \geq 0$$

Das zugehörige Dual:

$$\min\ w = 24y_1 + 6y_2 \quad \text{u.d.N.} \quad 6y_1 + y_2 \geq 5, \quad 4y_1 + 2y_2 \geq 4, \quad y_1, y_2 \geq 0$$

8.2 Schwacher und starker Dualitätssatz

Satz 3: Schwacher Dualitätssatz

Sei $\mathbf{x}$ eine zulässige Lösung von (P) und $\mathbf{y}$ eine zulässige Lösung von (D). Dann gilt:

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$$

Proof. Da $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ und $\mathbf{A}^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$:

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq (\mathbf{A}^\top \mathbf{y})^\top \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{y}^\top \mathbf{b} = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$$

□

Folgerung: Jede duale zulässige Lösung liefert eine **obere Schranke** für den primalen Optimalwert. Der optimale Primalwert liegt also stets im Intervall $[\mathbf{c}^\top \mathbf{x}, \mathbf{b}^\top \mathbf{y}]$ für beliebige zulässige $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

Satz 4: Starker Dualitätssatz

Wenn (P) eine endliche Optimallösung $\mathbf{x}^*$ besitzt, dann besitzt auch (D) eine endliche Optimallösung $\mathbf{y}^*$, und es gilt:

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}^*$$

Beweisidee. Im Optimaltableau des Simplex steht in der Zielfunktionszeile unter den Schlupfvariablen s_i genau der Wert y_i^* (mit korrektem Vorzeichen). Da alle reduzierten Kosten ≥ 0 und alle rechten Seiten ≥ 0, ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1}$ sowohl dual zulässig als auch optimal. Die Gleichheit $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}^*$ folgt aus den Complementary-Slackness-Bedingungen. □

8.3 Komplementäre Schlupfbedingung

Satz 5: Komplementäre Schlupfbedingung (KSB)

$\mathbf{x}^*$ und $\mathbf{y}^*$ sind genau dann gleichzeitig optimal für (P) und (D), wenn:

$$y_i^* \cdot (b_i - \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, m \tag{4}$$

$$x_j^* \cdot (\mathbf{a}_j^\top \mathbf{y}^* - c_j) = 0 \quad \forall\, j = 1, \ldots, n \tag{5}$$

Interpretation:

- (4): Wenn $y_i^* > 0$ (duale Variable aktiv), dann muss die i-te primale Nebenbedingung **bindend** sein ($b_i - \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}^* = 0$, kein Schlupf).
- (5): Wenn $x_j^* > 0$ (primale Variable aktiv), dann muss die j-te duale Nebenbedingung bindend sein.

9 Schattenpreise

9.1 Wirtschaftliche Interpretation der dualen Variablen

Definition: Schattenpreis

Der **Schattenpreis** y_i^* der i-ten Nebenbedingung gibt an, um wie viel sich der Optimalwert z^* ändert, wenn die rechte Seite b_i um eine Einheit erhöht wird – unter der Annahme, dass die aktuelle Optimalbasis erhalten bleibt:

$$y_i^* = \frac{\partial z^*}{\partial b_i}$$

Herleitung: Im Optimaltableau gilt $\mathbf{x}_B^* = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$. Eine Änderung $\Delta\mathbf{b}$ führt zu:

$$\Delta z^* = \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \Delta\mathbf{b} = (\mathbf{y}^*)^\top \Delta\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \cdot \Delta b_i$$

Die Schattenpreise lassen sich direkt aus dem Optimaltableau ablesen: Sie stehen in der Zielfunktionszeile unter den Spalten der Schlupfvariablen s_i.

9.2 Gültigkeitsbereich der Schattenpreise

Die lineare Beziehung $\Delta z^* = \mathbf{y}^{*\top} \Delta\mathbf{b}$ gilt nur, solange die **Optimalbasis unverändert** bleibt. Der Gültigkeitsbereich ergibt sich aus der Bedingung $\mathbf{A}_B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) \geq \mathbf{0}$:

$$\Delta b_i \in \left[-\frac{(\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b})_k}{(\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{e}_i)_k}, \ \ldots \right] \quad \text{für alle } k \text{ mit } (\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{e}_i)_k > 0$$

Beispiel 1 (Fortsetzung): Schattenpreise

Im Optimaltableau (nach zwei Iterationen) stehen in der Zielfunktionszeile unter s_1 und s_2:

$$y_1^* = \frac{3}{4}, \qquad y_2^* = \frac{1}{2}$$

Interpretation:

- Eine zusätzliche Maschinenstunde ($b_1 = 25$ statt 24) erhöht z^* um 0,75 GE.
- Eine zusätzliche Lagereinheit ($b_2 = 7$ statt 6) erhöht z^* um 0,5 GE.
- Beide Nebenbedingungen sind **bindend**: $s_1^* = s_2^* = 0$. Daher sind beide Schattenpreise positiv.

Überprüfung mit dem Dualoptimum:

$$w^* = 24 \cdot \tfrac{3}{4} + 6 \cdot \tfrac{1}{2} = 18 + 3 = 21 = z^* \checkmark$$

10 Dualer Simplex-Algorithmus

10.1 Motivation

Der primale Simplex erhält stets **primale Zulässigkeit** (alle $\bar{b}_i \geq 0$) und strebt nach **dualer Zulässigkeit** (alle $\bar{c}_j \geq 0$). Der **duale Simplex** kehrt dies um: Er startet mit einem dual zulässigen, aber primal unzulässigen Tableau und stellt schrittweise primale Zulässigkeit her.

Definition: Dual zulässiges Tableau

Ein Tableau heißt **dual zulässig**, wenn alle reduzierten Kosten nicht-negativ sind: $\bar{c}_j \geq 0$ für alle j. Es ist aber möglicherweise primal unzulässig: $\bar{b}_i < 0$ für mindestens ein i.

Typische Anwendungen:

- Probleme mit $\geq$-Nebenbedingungen (nach Multiplikation mit -1 dual zulässig)
- **Sensitivitätsanalyse:** Nach Änderung der rechten Seite $\mathbf{b}$ kann das bisherige Optimaltableau primal unzulässig werden – der duale Simplex re-optimiert effizient.
- Branch & Bound bei ganzzahliger Programmierung

10.2 Algorithmus

Algorithmus: Dualer Simplex

1. **Initialisierung:** Stelle ein dual zulässiges Starttableau auf ($\bar{c}_j \geq 0$ für alle j).
2. **Primalitätstest:** Gilt $\bar{b}_i \geq 0$ für alle i? Dann ist die Lösung **primal und dual optimal**. STOPP.
3. **Pivotzeile:** Wähle $r = \arg\min_i \bar{b}_i < 0$ (negativste rechte Seite).
4. **Unzulässigkeitstest:** Gilt $a_{rj} \geq 0$ für alle j? Dann ist das LP **unzulässig**. STOPP.
5. **Pivotspalte:** Wähle s durch das **duale Quotienten-Kriterium**:
$$s = \arg\min_{j:\, a_{rj} < 0} \frac{\bar{c}_j}{|a_{rj}|}$$
6. **Pivotoperation:** Führe den Basiswechsel durch.
7. Gehe zu Schritt 2.

Beweis: Duale Zulässigkeit bleibt erhalten. Nach der Pivotoperation mit Pivotelement $a_{rs} < 0$ ändert sich der reduzierte Koeffizient $\bar{c}_j$ zu:

$$\bar{c}'_j = \bar{c}_j - \frac{a_{rj}}{a_{rs}} \cdot \bar{c}_s$$

Da $\bar{c}_s = 0$ (Basisvariable vor dem Pivot), ändert sich $\bar{c}_j$ für Nichtbasisvariablen $j \neq s$ gemäß:

$$\bar{c}'_j = \bar{c}_j - \frac{a_{rj}}{a_{rs}} \cdot \bar{c}_s^{(\text{neu})}$$

Die Pivotspaltenregel $s = \arg\min_{a_{rj}<0} \bar{c}_j/|a_{rj}|$ garantiert $\bar{c}'_j \geq 0$ für alle j. □

10.3 Vollständiges Beispiel: Dualer Simplex

Beispiel 3: Dualer Simplex

$$\max\ z = -2x_1 - 3x_2 \qquad (\text{äquivalent: } \min\ 2x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 \quad \Rightarrow \quad -x_1 - x_2 \leq -4 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 6 \quad \Rightarrow \quad -2x_1 - x_2 \leq -6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Starttableau (nach Umformung; Schlupfvariablen s_1, s_2):

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	b
s_1	-1	-1	1	0	-4
s_2	-2	-1	0	1	-6
z	-2	-3	0	0	0

Dual zulässig? Alle $\bar{c}_j \leq 0$ in der z-Zeile (Vorzeichen beachten: $-(-2) = 2 \geq 0$, $-(-3) = 3 \geq 0$). ✓

Iteration 1: Pivotzeile: $r = 2$ ($\bar{b}_2 = -6$ ist negativster Wert). Duale Quotienten: $\bar{c}_1/|a_{21}| = 2/2 = 1$, $\bar{c}_2/|a_{22}| = 3/1 = 3$. Minimum: $s = 1$ (x_1 tritt ein). Pivotelement: $a_{21} = -2$.

Tableau nach Iteration 1:

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	b
s_1	0	$-1/2$	1	$-1/2$	-1
x_1	1	$1/2$	0	$-1/2$	3
z	0	-2	0	-1	6

Iteration 2: Pivotzeile: $r = 1$ ($\bar{b}_1 = -1$). Duale Quotienten: $\bar{c}_2/|a_{12}| = 2/(1/2) = 4$, $\bar{c}_4/|a_{14}| = 1/(1/2) = 2$. Minimum: $s = 4$ (s_2 tritt ein). Pivotelement: $a_{14} = -1/2$.

Optimaltableau:

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	b
s_2	0	1	-2	1	2
x_1	1	1	-1	0	2
z	0	0	-2	0	**8**

Alle $\bar{b}_i \geq 0$: **Primal und dual optimal.**

$$\boxed{x_1^* = 2, \quad x_2^* = 0, \quad z^* = -8 \ (\min\ 2x_1 + 3x_2 = 4 \Rightarrow z^*_{\min} = 4)}$$

11 Spezialfälle

11.1 Unbeschränktes Problem

Definition: Unbeschränktheit

Ein LP heißt **unbeschränkt**, wenn die Zielfunktion beliebig groß werden kann, d. h. $\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = +\infty$.

Erkennung im Tableau: In Schritt 4 des Algorithmus: Alle Einträge in der Pivotspalte sind ≤ 0 – kein Quotienten-Minimum existiert.

11.2 Unzulässiges Problem

Definition: Unzulässigkeit

Ein LP heißt **unzulässig**, wenn der zulässige Bereich leer ist: $\mathcal{F} = \emptyset$.

Dies tritt auf, wenn die Nebenbedingungen widersprüchlich sind (z. B. $x_1 \leq 2$ und $x_1 \geq 5$). Bei Problemen mit $\geq$-Nebenbedingungen kann keine offensichtliche Startbasis gefunden werden – man benötigt dann das **Zwei-Phasen-Verfahren** oder die **Big-M-Methode**.

11.3 Entartung

Definition: Entartung

Eine ZB-Lösung heißt **entartet**, wenn eine Basisvariable den Wert 0 annimmt.

Bei Entartung kann das minimale Quotienten-Kriterium ein Verhältnis von 0 liefern, was bedeutet, dass sich die Zielfunktion nicht verbessert (**Degeneration**). Im theoretischen Extremfall kann der Simplex zyklisch werden – in der Praxis wird dies durch **Bland's Regel** (kleinster Index) oder **Lexiko-Regel** verhindert.

Satz: Konvergenz des Simplex (ohne Entartung)

Unter der Annahme, dass keine entarteten ZB-Lösungen auftreten, terminiert der Simplex-Algorithmus nach endlich vielen Schritten mit einer Optimallösung oder dem Nachweis der Unbeschränktheit.

Proof. Da $\mathcal{F}$ nur endlich viele Ecken (ZB-Lösungen) hat und die Zielfunktion bei jedem Schritt *strikt* zunimmt (keine Entartung), kann keine Ecke zweimal besucht werden. Der Algorithmus terminiert daher nach höchstens $\binom{n}{m}$ Schritten. □

12 Komplexität und praktische Hinweise

12.1 Theoretische Komplexität

Die Anzahl der Ecken eines LP kann im schlechtesten Fall exponentiell in n und m sein (Klee-Minty-Beispiel, 1972). Dennoch ist die Simplex-Methode in der Praxis sehr effizient:

- Typische Anzahl Iterationen: $O(m)$ bis $O(3m)$
- **Polynomielle Algorithmen:** Das Ellipsoid-Verfahren (Khachiyan, 1979) und die Innere-Punkte-Methode (Karmarkar, 1984) sind theoretisch polynomiell, aber für viele praktische Probleme langsamer als Simplex.

12.2 Dualität

Zu jedem LP (Primal) existiert ein **duales LP**. Der **starke Dualitätssatz** besagt: Sind Primal und Dual zulässig, so stimmen ihre Optimalwerte überein. Das Simplex-Tableau enthält im Optimum die dualen Variablen direkt in der Zielfunktionszeile (Schattenpreise).

12.3 Praktische Hinweise

- Bei sehr großen Problemen ($n, m > 10^4$) werden **Revised Simplex** oder **Innere-Punkte-Methoden** eingesetzt.
- **Software:** CPLEX, Gurobi, GLPK, SciPy (Python), linprog (MATLAB).
- Für **ganzzahlige** Entscheidungsvariablen ist die Simplex-Methode allein nicht ausreichend – es wird Branch & Bound benötigt (siehe nächstes Kapitel).

13 Zusammenfassung

Kernpunkte der Simplex-Methode

1. Das **Optimum liegt stets in einer Ecke** des zulässigen Bereichs (Fundamentalsatz).
2. Ecken entsprechen **zulässigen Basislösungen** – m Variablen in der Basis, $n - m$ auf 0.
3. Der Simplex wandert von Ecke zu Ecke und **verbessert dabei stets die Zielfunktion**.
4. Die **Pivot-Spalte** wird durch den negativsten reduzierten Kostenkoeffizienten bestimmt.
5. Die **Pivot-Zeile** wird durch das minimale Quotienten-Kriterium bestimmt (Zulässigkeit).
6. **Optimalität**: alle reduzierten Kosten ≥ 0.
7. **Unbeschränktheit**: Pivotspalte ohne positiven Eintrag.
8. Terminierung ist garantiert, wenn keine **Entartung** vorliegt.
9. Zu jedem LP existiert ein **duales LP**. Im Optimum gilt $z^* = w^*$ (starker Dualitätssatz).
10. Die **Schattenpreise** y_i^* messen den Wert einer zusätzlichen Einheit der i-ten Ressource.
11. Der **duale Simplex** startet dual zulässig und stellt primale Zulässigkeit schrittweise her.
12. **Komplementäre Schlupfbedingung:** Bindende primale NB $\Leftrightarrow$ positiver Schattenpreis.