Aufgabensammlung

Mehrzieloptimierung – Pareto-Front und Lösungsmethoden

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Stufe 1: Leicht **2**
Aufgabe 1.1 2
Aufgabe 1.2 3

2 Stufe 2: Mittel **5**
Aufgabe 2.1 5
Aufgabe 2.2 6

3 Stufe 3: Schwer **8**
Aufgabe 3.1 8
Aufgabe 3.2 9

1 Stufe 1: Leicht

Aufgabe 1.1 – Dominanzprüfung und Pareto-Menge

Aufgabe 1.1

Gegeben sind sechs Lösungen mit zwei Zielfunktionen (beide zu minimieren):

Lsung	z_1	z_2	Pareto-optimal?
A	2	8	?
B	4	5	?
C	6	3	?
D	3	7	?
E	5	5	?
F	1	9	?

Aufgaben:

(a) Bestimme für jedes Paar, ob eine Lösung die andere dominiert.

(b) Identifiziere die Pareto-optimalen Lösungen.

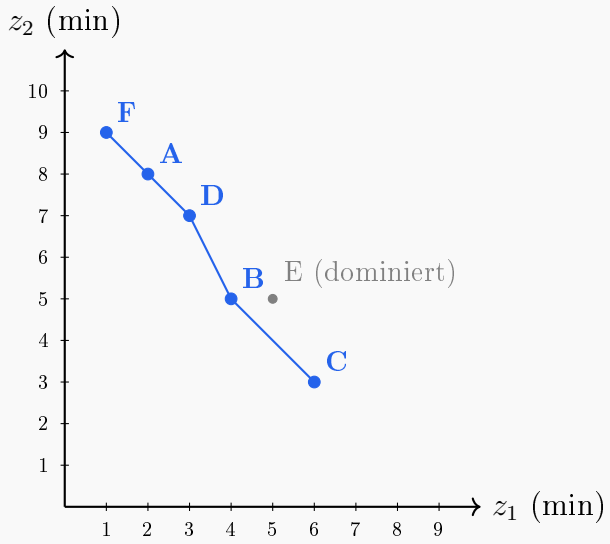
(c) Zeichne die Lösungen in einem (z_1, z_2)-Diagramm und markiere die Pareto-Front.

(d) Bestimme Ideal- und Nadir-Punkt der Pareto-Front.

Lösung: Aufgabe 1.1

(a) Dominanzprüfung:
D dominiert A? $z_1(D) = 3 > z_1(A) = 2$ – nein (D ist in z_1 schlechter).
A dominiert D? $z_1(A) = 2 \leq 3$, $z_2(A) = 8 > 7$ – nein (A ist in z_2 schlechter).
B dominiert E? $z_1(B) = 4 \leq 5$, $z_2(B) = 5 \leq 5$ und z_1 strikt kleiner – **ja, B dominiert E.**
B dominiert D? $z_1(B) = 4 > 3$ – nein.
C dominiert B? $z_1(C) = 6 > 4$ – nein.
A dominiert F? $z_1(A) = 2 > 1$ – nein. F dominiert A? $z_1(F) = 1 < 2$, $z_2(F) = 9 > 8$ – nein (F schlechter in z_2).
(b) Pareto-optimale Lösungen:
E wird von B dominiert $\Rightarrow$ E ist **nicht** Pareto-optimal. Alle anderen (A, B, C, D, F) werden von keiner anderen Lösung dominiert $\Rightarrow$ **Pareto-Menge: {A, B, C, D, F}**.

(c) Diagramm:



(d) Ideal- und Nadir-Punkt:

$$\mathbf{z}^{\text{id}} = (\min z_1, \min z_2) = (1, 3), \qquad \mathbf{z}^{\text{nad}} = (\max z_1, \max z_2)|_{\mathcal{P}} = (6, 9)$$

Pareto-Menge: {A, B, C, D, F}, Ideal: (1,3), Nadir: (6,9)

Aufgabe 1.2 – Gewichtungsmethode (einfach)

Aufgabe 1.2

$$\max\ z_1 = 3x_1 + 2x_2, \qquad \max\ z_2 = x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Aufgaben:

(a) Löse für die Gewichte $\mathbf{w} = (1, 0)$, $(0{,}5, 0{,}5)$ und $(0, 1)$.

(b) Bestimme den Ideal-Punkt.

(c) Welche Ecken des zulässigen Bereichs sind Pareto-optimal?

Lösung: Aufgabe 1.2

(a) Gewichtungsmethode:
Skalarisiert: $\max\ w(3x_1+2x_2)+(1-w)(x_1+4x_2) = \max\ (2w+1)x_1+(4-2w)x_2$

$w = 1$**:** $\max\ 3x_1 + 2x_2$. Ecken: $(0,0)$, $(3,0)$, $(2,2)$, $(0,4)$.
Zielfunktionswerte: 0, 9, 10, 8. **Optimum:** $(2,2)$**,** $z_1 = 10$**,** $z_2 = 10$.
$w = 0{,}5$**:** $\max\ 2x_1 + 3x_2$.

Werte: 0, 6, 10, 12. **Optimum:** $(0,4)$**,** $z_1 = 8$**,** $z_2 = 16$.
$w = 0$**:** $\max\ x_1 + 4x_2$.
Werte: 0, 3, 10, 16. **Optimum:** $(0,4)$**,** $z_1 = 8$**,** $z_2 = 16$.
(b) Ideal-Punkt:
$z_1^{\max} = 10$ (bei $(2,2)$), $z_2^{\max} = 16$ (bei $(0,4)$).

$$\mathbf{z}^{\mathrm{id}} = (10,\ 16) \quad \text{(nicht gleichzeitig erreichbar)}$$

(c) Pareto-optimale Ecken:
Ecke $(0,0)$: $z = (0,0)$ – wird von allen anderen dominiert.
Ecke $(3,0)$: $z = (9,3)$ – wird von $(2,2)$ mit $z = (10,10)$ dominiert.
Ecke $(2,2)$: $z = (10,10)$ – Pareto-optimal (beste z_1).
Ecke $(0,4)$: $z = (8,16)$ – Pareto-optimal (beste z_2).
Pareto-optimale Ecken: $(2,2)$ **und** $(0,4)$**. Die Kante zwischen ihnen ist ebenfalls Pareto-optimal.**

2 Stufe 2: Mittel

Aufgabe 2.1 – Gewichtungsmethode vs. ε-Constraint

Aufgabe 2.1

$$\max\ z_1 = 5x_1 + 4x_2, \qquad \min\ z_2 = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dies ist das Beispiel aus dem Theorieteil.

(a) Berechne drei Pareto-Punkte mit der Gewichtungsmethode (Wähle $w \in \{0{,}2;\ 0{,}5;\ 0{,}8\}$).

(b) Berechne drei Pareto-Punkte mit der ε-Constraint-Methode ($\varepsilon \in \{0,\ 5,\ 10{,}5\}$, primäres Ziel: max z_1).

(c) Vergleiche die Ergebnisse beider Methoden.

(d) Berechne Ideal- und Nadir-Punkt.

Lösung: Aufgabe 2.1

(a) Gewichtungsmethode:
Umformung: max z_1, min $z_2 \Leftrightarrow$ max $(-z_2)$. Gewichtet: max $w \cdot z_1 + (1-w) \cdot (-z_2)$.

$$\max\ w(5x_1 + 4x_2) - (1-w)(3x_1 + x_2) = \max\ (8w-3)x_1 + (5w-1)x_2$$

$w = 0{,}2$: Koeffizienten $(-1{,}4;\ 0)$. Optimum bei $x_1 = 0$: Teste $(0, 3)$: $z_1 = 12$, $z_2 = 3$.
$w = 0{,}5$: Koeffizienten $(1;\ 1{,}5)$. Maximierung an Ecken: $(0, 3)$: $0 + 4{,}5 = 4{,}5$; $(3, 1{,}5)$: $3 + 2{,}25 = 5{,}25$. Optimum: $(3, 1{,}5)$, $z_1 = 21$, $z_2 = 10{,}5$.
$w = 0{,}8$: Koeffizienten $(3{,}4;\ 3)$. Optimum bei $(3, 1{,}5)$: $z_1 = 21$, $z_2 = 10{,}5$.

w	(x_1^*, x_2^*)	z_1	z_2
0,2	$(0, 3)$	12	3
0,5	$(3, 1{,}5)$	21	10,5
0,8	$(3, 1{,}5)$	21	10,5

(b) ε-Constraint: Primär: max z_1, Nebenziel: $z_2 = 3x_1 + x_2 \leq \varepsilon$.
$\varepsilon = 0$: $3x_1 + x_2 \leq 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$. $z_1 = 0$, $z_2 = 0$.
$\varepsilon = 5$: Zusatz-NB $3x_1 + x_2 \leq 5$. LP liefert $x_1 = 1{,}5$, $x_2 = 0{,}5$: $z_1 = 9{,}5$, $z_2 = 5$.
$\varepsilon = 10{,}5$: Gleichung $3x_1 + x_2 = 10{,}5$ mit $6x_1 + 4x_2 = 24$ und $x_1 + 2x_2 = 6$: $x_1 = 3$, $x_2 = 1{,}5$. $z_1 = 21$, $z_2 = 10{,}5$.

(c) Vergleich: Beide Methoden erreichen die Extrempunkte $(0,0)$ mit $z = (0,0)$, $(0,3)$ mit $z = (12,3)$ und $(3,1{,}5)$ mit $z = (21,10{,}5)$. Die ε-Constraint-Methode findet zusätzlich Zwischenpunkte auf der Pareto-Front. Die Gewichtungsmethode liefert bei $w = 0{,}5$ und $w = 0{,}8$ denselben Punkt, da die Front in diesem Bereich stückweise linear ist.

(d) Ideal- und Nadir-Punkt:

$$\mathbf{z}^{\text{id}} = (21,\ 0), \qquad \mathbf{z}^{\text{nad}} = (0,\ 10{,}5)$$

Pareto-Front: Liniensegment von $(z_1, z_2) = (0,0)$ über $(12,3)$ bis $(21,10{,}5)$.

Aufgabe 2.2 – Normalisierung und Kompromisslösung

Aufgabe 2.2

Gegeben ist die Pareto-Front eines bikriterien LP (beide Ziele zu maximieren) mit folgenden Pareto-optimalen Punkten:

Punkt	z_1	z_2
P_1	20	5
P_2	15	10
P_3	10	16
P_4	4	18

(a) Bestimme Ideal- und Nadir-Punkt.

(b) Normalisiere die Zielfunktionswerte auf $[0,1]$.

(c) Berechne für jeden Pareto-Punkt den euklidischen Abstand zum Ideal-Punkt (im normalisierten Raum).

(d) Welcher Punkt ist die beste Kompromisslösung (minimaler Abstand)?

(e) Berechne alternativ die Tschebyscheff-Metrik (L_∞-Distanz) und vergleiche.

Lösung: Aufgabe 2.2

(a) Ideal- und Nadir-Punkt:

$$\mathbf{z}^{\text{id}} = (20, 18), \qquad \mathbf{z}^{\text{nad}} = (4, 5)$$

(b) Normalisierung: $\tilde{z}_i = \frac{z_i - z_i^{\text{nad}}}{z_i^{\text{id}} - z_i^{\text{nad}}}$

Punkt	$\tilde{z}_1 = \frac{z_1-4}{16}$	$\tilde{z}_2 = \frac{z_2-5}{13}$
P_1	$\frac{16}{16} = 1{,}000$	$\frac{0}{13} = 0{,}000$
P_2	$\frac{11}{16} = 0{,}688$	$\frac{5}{13} = 0{,}385$
P_3	$\frac{6}{16} = 0{,}375$	$\frac{11}{13} = 0{,}846$
P_4	$\frac{0}{16} = 0{,}000$	$\frac{13}{13} = 1{,}000$

(c) Euklidischer Abstand zum Ideal-Punkt $\tilde{\mathbf{z}}^{\text{id}} = (1, 1)$:

$$d_2(P_i) = \sqrt{(1-\tilde{z}_1)^2 + (1-\tilde{z}_2)^2}$$

$$d_2(P_1) = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1{,}000$$
$$d_2(P_2) = \sqrt{0{,}312^2 + 0{,}615^2} = \sqrt{0{,}097 + 0{,}378} = \sqrt{0{,}475} \approx \mathbf{0{,}689}$$
$$d_2(P_3) = \sqrt{0{,}625^2 + 0{,}154^2} = \sqrt{0{,}391 + 0{,}024} = \sqrt{0{,}415} \approx 0{,}644$$
$$d_2(P_4) = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1{,}000$$

(d) Beste Kompromisslösung: P_3 mit $d_2 \approx 0{,}644$ (kleinster Abstand zum Ideal).

(e) Tschebyscheff-Metrik: $d_\infty(P_i) = \max(1-\tilde{z}_1, 1-\tilde{z}_2)$

Punkt	$1-\tilde{z}_1$	$1-\tilde{z}_2$	d_∞
P_1	0,000	1,000	1,000
P_2	0,312	0,615	0,615
P_3	0,625	0,154	0,625
P_4	1,000	0,000	1,000

Tschebyscheff wählt P_2 ($d_\infty = 0{,}615$), euklidisch P_3. Die Methode beeinflusst die Lösungsauswahl!

Euklidisch: P_3; Tschebyscheff: P_2. Empfehlung: P_2 oder P_3 je nach Präferenz.

3 Stufe 3: Schwer

Aufgabe 3.1 – Drei Zielfunktionen: Vollständige Analyse

Aufgabe 3.1

$$\max\ z_1 = 5x_1 + 4x_2, \quad \max\ z_2 = 2x_1 + 6x_2, \quad \min\ z_3 = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Berechne die Zielwerte an allen vier Ecken des zulässigen Bereichs: $(0,0)$, $(4,0)$, $(3,1{,}5)$, $(0,3)$.

(b) Prüfe für jedes Eckenpaar, ob Dominanz vorliegt.

(c) Identifiziere die Pareto-optimalen Ecken.

(d) Berechne den Ideal-Punkt.

(e) Welche Ecke ist die beste Kompromisslösung (Tschebyscheff, gleiche Gewichte)?

Lösung: Aufgabe 3.1

(a) Zielwerte an den Ecken:

Ecke	x_1	x_2	(z_1, z_2, z_3)
E_0	0	0	(0, 0, 0)
E_1	4	0	(20, 8, 12)
E_2	3	1,5	(21, 15, 10,5)
E_3	0	3	(12, 18, 3)

(b) Dominanzprüfung (Minimierungssicht: z_3 min, $-z_1$ min, $-z_2$ min):
E_0 vs. E_1: E_1 besser bei z_1 und z_2, schlechter bei z_3. Kein Dominanz.
E_0 vs. E_2: E_2 besser bei z_1 und z_2, schlechter bei z_3 (0 vs. 10,5). Kein Dominanz.
E_0 vs. E_3: E_3 besser bei z_1 und z_2, schlechter bei z_3 (0 vs. 3). Kein Dominanz.
E_1 vs. E_2: z_1: $20 < 21$ (E1 schlechter), z_2: $8 < 15$ (E1 schlechter), z_3: $12 > 10{,}5$ (E1 schlechter). E_2 dominiert E_1!
E_1 vs. E_3: z_1: $20 > 12$ (E1 besser), z_2: $8 < 18$ (E1 schlechter). Kein Dominanz.
E_2 vs. E_3: z_1: $21 > 12$ (E2 besser), z_2: $15 < 18$ (E2 schlechter). Kein Dominanz.
(c) Pareto-optimale Ecken: E_1 wird von E_2 dominiert $\Rightarrow$ **Pareto-Ecken:** E_0, E_2, E_3.
(Hinweis: E_0 mit $z = (0,0,0)$ kann je nach Anwendung sinnvoll ausgeschlossen werden, ist aber formal Pareto-optimal.)

(d) Ideal-Punkt:

$$z_1^{\mathrm{id}} = 21\ (E_2), \quad z_2^{\mathrm{id}} = 18\ (E_3), \quad z_3^{\mathrm{id}} = 0\ (E_0)$$

$$\mathbf{z}^{\mathrm{id}} = (21,\ 18,\ 0) \quad \text{(nicht gleichzeitig erreichbar)}$$

(e) Tschebyscheff-Kompromisslösung: Normalisiere mit Nadir $(0, 0, 12)$:

$$\tilde{z}_1 = z_1/21, \quad \tilde{z}_2 = z_2/18, \quad \tilde{z}_3 = (12 - z_3)/12$$

Ecke	$\tilde{z}_1$	$\tilde{z}_2$	$\tilde{z}_3$	$d_\infty = \max(1 - \tilde{z}_i)$
E_0	0	0	1	1,000
E_2	1	0,833	0,125	0,167
E_3	0,571	1	0,750	0,429

Beste Kompromisslösung: $E_2 = (3, 1{,}5)$ **mit** $d_\infty = 0{,}167$.

Aufgabe 3.2 – Nicht-konvexe Pareto-Front und Methodenvergleich

Aufgabe 3.2

Betrachte ein bikriterielles Problem, dessen Pareto-Front folgende (diskrete) Punkte enthält:

Punkt	z_1 (max)	z_2 (max)
Q_1	0	10
Q_2	3	9
Q_3	7	7
Q_4	9	5
Q_5	10	0

Zusätzlich existiert ein Punkt $Q^* = (5, 8)$, der *nicht* durch die Gewichtungsmethode gefunden wird.

(a) Verifiziere, dass Q^* Pareto-optimal ist.

(b) Zeige, dass kein Gewichtsvektor $\mathbf{w} = (w, 1-w)$ mit $w \in [0, 1]$ die Lösung Q^* erzeugt (nicht-konvexe Front).

(c) Berechne, welchen ε-Wert du wählen musst, um Q^* mit der ε-Constraint-Methode (primär: max z_1, Nebenziel: $z_2 \geq \varepsilon$) zu finden.

(d) Berechne Ideal- und Nadir-Punkt der gesamten Pareto-Front.

(e) Normalisiere alle Punkte und bestimme die beste Kompromisslösung (euklidischer Abstand).

Lösung: Aufgabe 3.2

(a) Pareto-Optimalität von $Q^* = (5, 8)$:
Prüfe alle anderen Punkte: $Q_1 = (0, 10)$: $z_1(Q_1) = 0 < 5 \Rightarrow Q_1$ schlechter in z_1. Kein Dominanz. $Q_2 = (3, 9)$: $z_1(Q_2) = 3 < 5 \Rightarrow$ schlechter in z_1. Kein Dominanz. $Q_3 = (7, 7)$: $z_1(Q_3) = 7 > 5$, $z_2(Q_3) = 7 < 8 \Rightarrow$ nicht vergleichbar. $Q_4 = (9, 5)$: $z_1 > 5$, $z_2 < 8 \Rightarrow$ nicht vergleichbar. $Q_5 = (10, 0)$: $z_2 < 8 \Rightarrow$ nicht vergleichbar.
Kein Punkt dominiert $Q^* \Rightarrow Q^*$ **ist Pareto-optimal.**
(b) Nicht-erreichbarkeit durch Gewichtungsmethode:
Gewichtetes Problem: max $w \cdot z_1 + (1-w) \cdot z_2$. Für Q^* ergibt sich der Wert $5w + 8(1-w) = 8 - 3w$.
Für Q^* optimal zu sein, muss gelten: $8 - 3w \geq$ Wert aller anderen Punkte:

$8 - 3w \geq 10 - 10w \Rightarrow 7w \geq 2 \Rightarrow w \geq 2/7 \approx 0{,}286 \quad (Q_1)$
$8 - 3w \geq 7 + 0 \cdot w = 7 + 7(1-w) + 7w \Rightarrow 8 - 3w \geq 7 + 7 - 7w \Rightarrow 4w \geq 6 \Rightarrow w \geq 1{,}5 \quad (Q_3, \text{unn}$

Für $Q_3 = (7, 7)$: $7w + 7(1-w) = 7$ für alle w. Für Q^*: $5w + 8(1-w) = 8 - 3w$. $8 - 3w > 7 \Rightarrow w < 1/3$. Aber für $Q_4 = (9, 5)$: $9w + 5(1-w) = 5 + 4w > 8 - 3w \Leftrightarrow 7w > 3 \Leftrightarrow w > 3/7$.
Da $w < 1/3 \approx 0{,}333$ und $w > 3/7 \approx 0{,}429$ gleichzeitig nicht erfüllbar, **gibt es kein w, für das Q^* optimal ist.** Die Pareto-Front ist in diesem Bereich

nicht-konvex.
(c) ε-Constraint: Setze $z_2 \geq \varepsilon$ und max z_1.
Q^* hat $z_2 = 8$. Wähle $\varepsilon = 8$: dann wird z_1 maximiert unter $z_2 \geq 8$.
Die Punkte mit $z_2 \geq 8$ sind: $Q_1(0, 10)$, $Q_2(3, 9)$, $Q^*(5, 8)$.
Maximales z_1 darunter: Q^* mit $z_1 = 5$. $\varepsilon = 8$.
(d) Ideal- und Nadir-Punkt (inkl. Q^*):

$$\mathbf{z}^{\text{id}} = (10,\ 10), \qquad \mathbf{z}^{\text{nad}} = (0,\ 0)$$

(e) Normalisierung und Kompromisslösung:
Da Nadir $= (0, 0)$ und Ideal $= (10, 10)$: $\tilde{z}_i = z_i/10$.

Punkt	$\tilde{z}_1$	$\tilde{z}_2$	$1 - \tilde{z}_1$	$1 - \tilde{z}_2$	d_2
Q_1	0,0	1,0	1,0	0,0	1,000
Q_2	0,3	0,9	0,7	0,1	0,707
Q^*	0,5	0,8	0,5	0,2	**0,539**
Q_3	0,7	0,7	0,3	0,3	0,424
Q_4	0,9	0,5	0,1	0,5	0,510
Q_5	1,0	0,0	0,0	1,0	1,000

Beste Kompromisslösung: $Q_3 = (7, 7)$ mit $d_2 = 0{,}424$ – der ausgewogenste Punkt.
Q^* liegt mit $d_2 = 0{,}539$ auf Platz 3, wäre aber nur durch ε-Constraint erreichbar.