Entscheidungsbaum

Theorie, Rollback-Verfahren und Toolbeschreibung

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Entscheidungstheorie unter Risiko – sequenzielle Entscheidungen mit Erwartungswerten

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **2**

2 Grundbegriffe **2**

3 Rollback-Verfahren (Rückwärtsinduktion) **3**

4 Vollständiges Beispiel **3**
4.1 Problemstellung 3
4.2 Rollback-Berechnung 4
4.3 Grafische Darstellung 4
4.4 Zusammenfassung der Erwartungswerte 5

5 Toolbeschreibung **5**
5.1 Baum aufbauen 5
5.2 Ausgabe 6

6 Zusammenfassung **6**

1 Einführung

Ein **Entscheidungsbaum** modelliert sequenzielle Entscheidungsprobleme, bei denen mehrere Entscheidungen und Zufallsereignisse aufeinander folgen. Er erweitert die einfache Entscheidungsmatrix auf *mehrstufige* Situationen.

Typische Anwendungen

- Investitionsentscheidungen mit mehreren Phasen
- Produktentwicklung mit Markteinführungsrisiko
- Medizinische Therapieentscheidungen
- Unternehmensstrategien mit Konkurrenzreaktionen

2 Grundbegriffe

Definition: Knotentypen

Ein Entscheidungsbaum besteht aus drei Knotentypen:

- **Entscheidungsknoten** (Rechteck, blau): Der Entscheider wählt einen Ast. Optimale Wahl: Ast mit höchstem Erwartungswert.
- **Zufallsknoten** (Kreis, orange): Die Natur wählt einen Ast gemäß Wahrscheinlichkeiten $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$.
- **Ergebnisknoten** (Rechteck, grün): Endknoten mit Auszahlung e.

Definition: Erwartungswert eines Knotens

Der **Erwartungswert** (EW) wird rekursiv von den Blättern zur Wurzel berechnet (**Rollback-Verfahren**):

$$\text{EW}(\text{Ergebnis}) = e \qquad \text{(Auszahlung)}$$

$$\text{EW}(\text{Zufallsknoten}) = \sum_i p_i \cdot \text{EW}(\text{Kind}_i)$$

$$\text{EW}(\text{Entscheidungsknoten}) = \max_i \ \text{EW}(\text{Kind}_i)$$

3 Rollback-Verfahren (Rückwärtsinduktion)

Algorithmus: Rollback

1. Beginne bei den **Ergebnisknoten** (Blätter) – EW = Auszahlung.
2. Berechne rückwärts zur Wurzel:
   - **Zufallsknoten:** $\mathrm{EW} = \sum_i p_i \cdot \mathrm{EW}_i$
   - **Entscheidungsknoten:** $\mathrm{EW} = \max_i \mathrm{EW}_i$, nicht-optimale Äste werden *abgeschnitten*.
3. Der EW der Wurzel ist der optimale Erwartungswert des Projekts.

Satz: Optimalität des Rollback

Das Rollback-Verfahren liefert die **global optimale Strategie** – d. h. die Entscheidungsregel, die den Erwartungswert über alle möglichen Zukunftsszenarien maximiert. Dies folgt aus dem *Prinzip der Optimalität* (Bellman 1957).

4 Vollständiges Beispiel

4.1 Problemstellung

Beispiel: Produktentwicklung (zweistufig)

Ein Unternehmen entscheidet über die Entwicklung eines neuen Produkts.

Stufe 1 – Entwicklungsentscheidung:

- **Entwickeln** (Kosten: 50): Führt zu Zufallsknoten "Markttest".
- **Nicht entwickeln**: Auszahlung 0.

Stufe 2 – Markttest (Zufallsknoten):

- **Positiv** ($P = 0{,}6$): Zweite Entscheidung – Großserie oder Kleinserie.
- **Negativ** ($P = 0{,}4$): Projekt abgebrochen, Auszahlung -50.

Stufe 3 – Serienentscheidung (bei positivem Test):

- **Großserie**: Zufallsknoten – Boom ($P = 0{,}7$, Gewinn 300) oder Flop ($P = 0{,}3$, Verlust -100).
- **Kleinserie**: Zufallsknoten – Boom ($P = 0{,}7$, Gewinn 120) oder Flop ($P = 0{,}3$, Gewinn 20).

Alle Gewinne in Tsd. Euro, netto nach Entwicklungskosten.

4.2 Rollback-Berechnung

Schritt 1 – Ergebnisknoten: Großserie-Boom: 300, Großserie-Flop: -100, Kleinserie-Boom: 120, Kleinserie-Flop: 20, Negativ: -50, Nicht entwickeln: 0.

Schritt 2 – Zufallsknoten Großserie:

$$\text{EW}_{\text{Groß}} = 0{,}7 \cdot 300 + 0{,}3 \cdot (-100) = 210 - 30 = \mathbf{180}$$

Schritt 3 – Zufallsknoten Kleinserie:

$$\text{EW}_{\text{Klein}} = 0{,}7 \cdot 120 + 0{,}3 \cdot 20 = 84 + 6 = \mathbf{90}$$

Schritt 4 – Entscheidungsknoten Serienentscheidung:

$$\text{EW}_{\text{Serie}} = \max(180,\ 90) = \mathbf{180} \quad \Rightarrow \text{Großserie wählen}$$

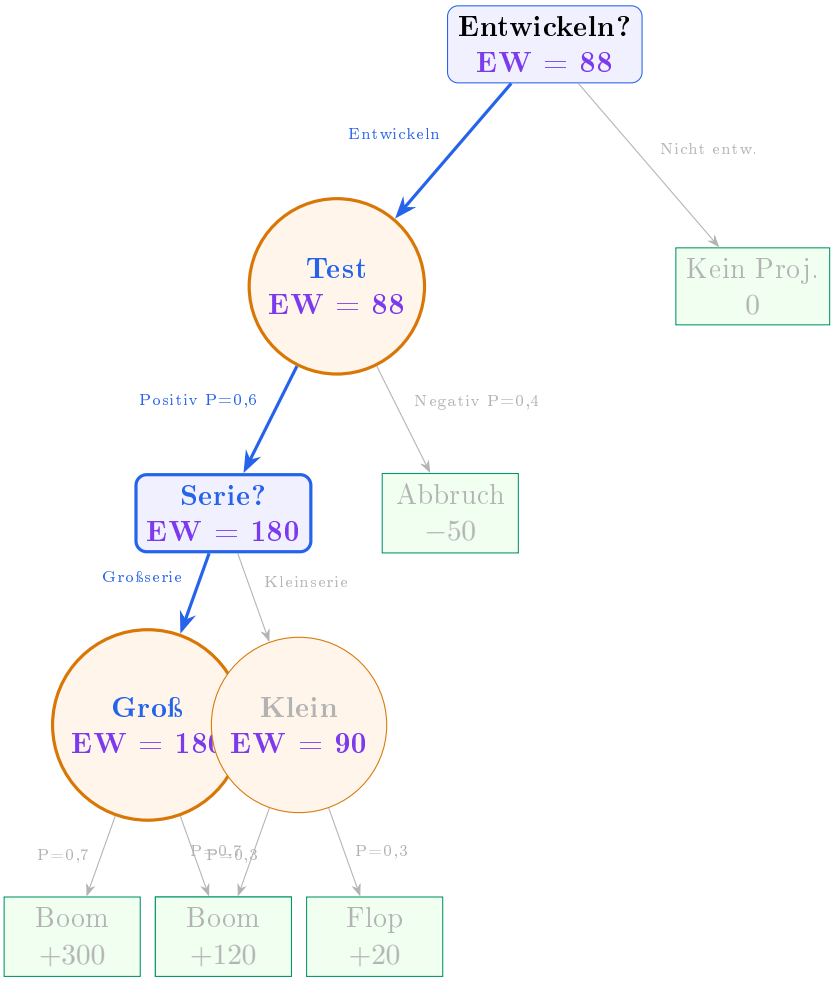
Schritt 5 – Zufallsknoten Markttest:

$$\text{EW}_{\text{Test}} = 0{,}6 \cdot 180 + 0{,}4 \cdot (-50) = 108 - 20 = \mathbf{88}$$

Schritt 6 – Entscheidungsknoten Entwicklung:

$$\text{EW}_{\text{Wurzel}} = \max(88,\ 0) = \mathbf{88} \quad \Rightarrow \text{Entwickeln!}$$

4.3 Grafische Darstellung



Optimale Strategie:

1. Produkt **entwickeln** (EW = 88 > 0).
2. Falls Markttest **positiv**: **Großserie** starten (EW = 180 > 90).
3. Falls Markttest negativ: Projekt abgebrochen.

4.4 Zusammenfassung der Erwartungswerte

Knoten	Typ	EW	Optimal?
Wurzel (Entwickeln?)	Entscheidung	88	Entwickeln
Markttest	Zufall	88	–
Serienentscheidung	Entscheidung	180	Großserie
Großserie	Zufall	180	–
Kleinserie	Zufall	90	–

5 Toolbeschreibung

Entscheidungsbaum-Tool

Interaktives Tool zum Aufbau und zur Berechnung von Entscheidungsbäumen.

5.1 Baum aufbauen

Methode 1 – Manuell:

1. Klick auf + **Neu (leer)** – leerer Wurzel-Entscheidungsknoten erscheint.
2. Bezeichnung eingeben.
3. Kindknoten hinzufügen: +**E** (Entscheidung), +**Z** (Zufall), +**R** (Ergebnis).
4. Bei Zufallsknoten: Wahrscheinlichkeit eingeben (Summe = 1).
5. Bei Ergebnisknoten: Auszahlung eingeben.
6. ▶ **Berechnen & Zeichnen**.

Methode 2 – CSV-Import:
Format (Semikolon-getrennt):

Spalte	Bedeutung
`id`	Eindeutige Zeilen-ID (Zahl)
`typ`	`dec` / `chance` / `leaf`
`label`	Bezeichnung des Knotens
`prob`	Wahrscheinlichkeit (nur bei `chance`-Kindern)
`payoff`	Auszahlung (nur bei `leaf`)
`parent`	ID des Elternknotens (leer = Wurzel)

Beispiel-CSV für das obige Beispiel:

```
id  typ     label                prob  payoff  parent
1   dec     Entwickeln?
2   chance  Markttest                          1
3   leaf    Nicht entwickeln           0       1
4   dec     Serienentscheidung                 2
5   leaf    Negativ              0.4   -50     2
```

5.2 Ausgabe

- **Editor:** Alle Knoten als Liste mit EW-Anzeige nach der Berechnung.
- **SVG-Baum:** Optimaler Pfad blau hervorgehoben; Zufallsknoten als Kreise, Entscheidungsknoten als Rechtecke.
- **Validierung:** Warnung wenn Wahrscheinlichkeiten eines Zufallsknotens nicht 1 ergeben.
- **CSV-Export:** Aktuellen Baum speichern.

6 Zusammenfassung

Kernpunkte: Entscheidungsbaum

1. Entscheidungsbäume modellieren **sequenzielle Entscheidungen** unter Risiko.
2. Drei Knotentypen: **Entscheidung** (wählt besten Ast), **Zufall** (gewichteter Durchschnitt), **Ergebnis** (Auszahlung).
3. Das **Rollback-Verfahren** berechnet EW von den Blättern zur Wurzel.
4. An Entscheidungsknoten wird der Ast mit **maximalem EW** gewählt.
5. Das Ergebnis ist die **global optimale Strategie** (Bellman-Prinzip).
6. Das Tool unterstützt manuelle Eingabe, CSV-Import/-Export und zwei Beispiele.