Entscheidungstheorie

Entscheidung unter Unsicherheit

Maximax, Maximin, Laplace, Hurwicz, Savage-Niehans, Erwartungswert

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Dieses Dokument führt in die Entscheidungstheorie ein und erläutert alle sechs Entscheidungsregeln mit vollständig durchgerechnetem Beispiel.

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und Motivation **2**

2 Grundbegriffe **2**

3 Entscheidungsregeln **2**
- 3.1 Maximax-Regel (optimistisch) . . . 2
- 3.2 Maximin-Regel (Wald-Kriterium, pessimistisch) . . . 3
- 3.3 Laplace-Regel (Prinzip des unzureichenden Grundes) . . . 3
- 3.4 Hurwicz-Regel (Optimismus-Index) . . . 3
- 3.5 Savage-Niehans-Regel (Minimax-Regret) . . . 4
- 3.6 Erwartungswert-Regel (Bayes-Kriterium) . . . 4

4 Vollständiges Beispiel: Produktionsentscheidung **4**
- 4.1 Problemstellung . . . 4
- 4.2 Methode 1: Maximax . . . 5
- 4.3 Methode 2: Maximin . . . 5
- 4.4 Methode 3: Laplace . . . 5
- 4.5 Methode 4: Hurwicz ($\alpha = 0{,}5$) . . . 5
- 4.6 Methode 5: Savage-Niehans . . . 5
- 4.7 Methode 6: Erwartungswert . . . 6
- 4.8 Zusammenfassung der Ergebnisse . . . 6

5 Toolbeschreibung **6**
- 5.1 Eingabe . . . 6
- 5.2 Dateneingabe . . . 7
- 5.3 Ausgabe . . . 7

6 Zusammenfassung **8**

1 Einführung und Motivation

In der Praxis muss oft eine Entscheidung getroffen werden, ohne den zukünftigen **Umweltzustand** zu kennen. Je nachdem, ob Wahrscheinlichkeiten für die Zustände bekannt sind oder nicht, unterscheidet man:

- **Entscheidung unter Risiko:** Wahrscheinlichkeiten der Umweltzustände bekannt $\Rightarrow$ Erwartungswert-Methode.
- **Entscheidung unter Ungewissheit:** keine Wahrscheinlichkeiten bekannt $\Rightarrow$ Maximax, Maximin, Laplace, Hurwicz, Savage-Niehans.

Typische Anwendungen

- Produktionsentscheidung bei unbekannter Nachfrage
- Investition bei ungewisser Marktentwicklung
- Standortwahl bei unsicherer Infrastrukturentwicklung
- Lagerhaltungsentscheidungen bei schwankender Nachfrage

2 Grundbegriffe

Definition: Entscheidungsmatrix

Eine **Entscheidungsmatrix** $E = (e_{ij})$ mit $i = 1, \ldots, m$ Alternativen und $j = 1, \ldots, n$ Umweltzuständen enthält die **Ergebniswerte** e_{ij} (Gewinn, Kosten, Nutzen), die bei Wahl von Alternative i unter Zustand j eintreten.

	Z_1	Z_2	$\cdots$	Z_n
A_1	e_{11}	e_{12}	$\cdots$	e_{1n}
A_2	e_{21}	e_{22}	$\cdots$	e_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_m	e_{m1}	e_{m2}	$\cdots$	e_{mn}

3 Entscheidungsregeln

3.1 Maximax-Regel (optimistisch)

Maximax-Regel

Wähle die Alternative mit dem **besten möglichen Ergebnis**:

$$A^* = \arg\max_i \max_j e_{ij}$$

Haltung: Extremer Optimismus – man erwartet immer den günstigsten Zus-

tand.
Kritik: Ignoriert alle schlechten Szenarien vollständig.

3.2 Maximin-Regel (Wald-Kriterium, pessimistisch)

Maximin-Regel

Wähle die Alternative, die im **schlimmsten Fall** am besten abschneidet:

$$A^* = \arg\max_i \min_j e_{ij}$$

Haltung: Extremer Pessimismus – man rechnet stets mit dem ungünstigsten Zustand.
Kritik: Sehr konservativ, ignoriert positive Szenarien.

3.3 Laplace-Regel (Prinzip des unzureichenden Grundes)

Laplace-Regel

Da kein Zustand wahrscheinlicher als ein anderer ist, werden **gleiche Wahrscheinlichkeiten** $p_j = 1/n$ angenommen. Wähle die Alternative mit dem höchsten Durchschnittswert:

$$A^* = \arg\max_i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e_{ij}$$

Haltung: Neutral – alle Zustände gleichwertig.

3.4 Hurwicz-Regel (Optimismus-Index)

Hurwicz-Regel

Sei $\alpha \in [0, 1]$ der **Optimismus-Index**. Wähle die Alternative mit dem höchsten gewichteten Wert aus bestem und schlechtestem Ergebnis:

$$H_i = \alpha \cdot \max_j e_{ij} + (1 - \alpha) \cdot \min_j e_{ij}, \qquad A^* = \arg\max_i H_i$$

Für $\alpha = 1$: Maximax. Für $\alpha = 0$: Maximin.
Haltung: Kompromiss zwischen Optimismus und Pessimismus.

3.5 Savage-Niehans-Regel (Minimax-Regret)

Savage-Niehans-Regel

Schritt 1 – Bedauernsmatrix: Für jeden Zustand j sei $e_j^* = \max_i e_{ij}$ das beste erreichbare Ergebnis. Das **Bedauern** (Regret) ist:

$$r_{ij} = e_j^* - e_{ij} \geq 0$$

Schritt 2 – Minimax-Regret: Wähle die Alternative mit dem kleinsten maximalen Bedauern:

$$A^* = \arg\min_i \max_j r_{ij}$$

Haltung: Minimierung des nachträglichen Bedauerns ("Was hätte ich besser machen können?").

3.6 Erwartungswert-Regel (Bayes-Kriterium)

Erwartungswert-Regel

Falls Wahrscheinlichkeiten $p_j \geq 0$ mit $\sum_j p_j = 1$ bekannt sind:

$$E[A_i] = \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot e_{ij}, \qquad A^* = \arg\max_i E[A_i]$$

Haltung: Rationale Entscheidung unter Risiko – langfristig optimale Wahl.

4 Vollständiges Beispiel: Produktionsentscheidung

4.1 Problemstellung

Beispiel: Wahl des Produkts bei unsicherer Marktentwicklung

Ein Unternehmen plant die Einführung eines neuen Produkts. Es stehen drei Alternativen zur Verfügung. Der Gewinn (in Tsd. Euro) hängt von der Marktentwicklung ab:

Alternative	Boom	Normal	Rezession	Krise
Produkt A	120	80	40	−10
Produkt B	90	70	60	20
Produkt C	60	55	50	40

Wahrscheinlichkeiten (für den Erwartungswert): $P(\text{Boom}) = 0{,}2$, $P(\text{Normal}) = 0{,}4$, $P(\text{Rez.}) = 0{,}3$, $P(\text{Krise}) = 0{,}1$.

4.2 Methode 1: Maximax

Zeilenmaximum je Alternative:

$$\max_j e_{Aj} = 120, \quad \max_j e_{Bj} = 90, \quad \max_j e_{Cj} = 60$$

$$\Rightarrow \quad A^* = \textbf{Produkt A} \quad \text{(höchstes Maximum: 120)}$$

4.3 Methode 2: Maximin

Zeilenminimum je Alternative:

$$\min_j e_{Aj} = -10, \quad \min_j e_{Bj} = 20, \quad \min_j e_{Cj} = 40$$

$$\Rightarrow \quad A^* = \textbf{Produkt C} \quad \text{(bestes Minimum: 40)}$$

4.4 Methode 3: Laplace

Gleichverteilung $p_j = 1/4 = 0{,}25$:

$$\bar{e}_A = (120 + 80 + 40 + (-10))/4 = 230/4 = 57{,}5$$
$$\bar{e}_B = (90 + 70 + 60 + 20)/4 = 240/4 = 60{,}0$$
$$\bar{e}_C = (60 + 55 + 50 + 40)/4 = 205/4 = 51{,}25$$

$$\Rightarrow \quad A^* = \textbf{Produkt B} \quad \text{(höchster Durchschnitt: 60,0)}$$

4.5 Methode 4: Hurwicz ($\alpha = 0{,}5$)

$$H_i = 0{,}5 \cdot \max_j e_{ij} + 0{,}5 \cdot \min_j e_{ij}$$

$$H_A = 0{,}5 \cdot 120 + 0{,}5 \cdot (-10) = 60 - 5 = 55{,}0$$
$$H_B = 0{,}5 \cdot 90 + 0{,}5 \cdot 20 = 45 + 10 = 55{,}0$$
$$H_C = 0{,}5 \cdot 60 + 0{,}5 \cdot 40 = 30 + 20 = 50{,}0$$

$$\Rightarrow \quad A^* = \textbf{Produkt A oder B} \quad \text{(Gleichstand: 55,0)}$$

Für $\alpha = 0{,}3$ (eher pessimistisch): $H_A = 0{,}3 \cdot 120 + 0{,}7 \cdot (-10) = 36 - 7 = 29$, $H_B = 0{,}3 \cdot 90 + 0{,}7 \cdot 20 = 27 + 14 = 41$, $H_C = 0{,}3 \cdot 60 + 0{,}7 \cdot 40 = 18 + 28 = 46 \Rightarrow$ Produkt C gewinnt.

4.6 Methode 5: Savage-Niehans

Schritt 1 – Spaltenoptima: $e^*_{\text{Boom}} = 120$, $e^*_{\text{Normal}} = 80$, $e^*_{\text{Rez.}} = 60$, $e^*_{\text{Krise}} = 40$.

Schritt 2 – Bedauernsmatrix ($r_{ij} = e^*_j - e_{ij}$):

Alternative	Boom	Normal	Rezession	Krise	max Bedauern
Produkt A	$120 - 120 = 0$	$80 - 80 = 0$	$60 - 40 = 20$	$40 - (-10) = 50$	**50**
Produkt B	$120 - 90 = 30$	$80 - 70 = 10$	$60 - 60 = 0$	$40 - 20 = 20$	30
Produkt C	$120 - 60 = 60$	$80 - 55 = 25$	$60 - 50 = 10$	$40 - 40 = 0$	**60**

$$\Rightarrow \quad A^* = \textbf{Produkt B} \quad \text{(kleinstes max. Bedauern: 30)}$$

4.7 Methode 6: Erwartungswert

Mit $p = (0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}3;\ 0{,}1)$:

$$E[A] = 0{,}2 \cdot 120 + 0{,}4 \cdot 80 + 0{,}3 \cdot 40 + 0{,}1 \cdot (-10) = 24 + 32 + 12 - 1 = \mathbf{67{,}0}$$
$$E[B] = 0{,}2 \cdot 90 + 0{,}4 \cdot 70 + 0{,}3 \cdot 60 + 0{,}1 \cdot 20 = 18 + 28 + 18 + 2 = \mathbf{66{,}0}$$
$$E[C] = 0{,}2 \cdot 60 + 0{,}4 \cdot 55 + 0{,}3 \cdot 50 + 0{,}1 \cdot 40 = 12 + 22 + 15 + 4 = \mathbf{53{,}0}$$

$$\Rightarrow \quad A^* = \textbf{Produkt A} \quad (E[A] = 67{,}0)$$

4.8 Zusammenfassung der Ergebnisse

Methode	Haltung	Empfehlung	Kennwert
Maximax	Optimistisch	**Produkt A**	$\max = 120$
Maximin	Pessimistisch	**Produkt C**	$\min = 40$
Laplace	Neutral	**Produkt B**	$\varnothing = 60{,}0$
Hurwicz ($\alpha = 0{,}5$)	Ausgewogen	**A oder B**	$H = 55{,}0$
Savage-Niehans	Bedauern	**Produkt B**	$r_{\max} = 30$
Erwartungswert	Rationell	**Produkt A**	$E = 67{,}0$
Stimmenmehrheit (2 von 6)		**A, B**	

Interpretation: Produkt A ist die beste Wahl für risikofreudige Entscheider (Maximax, EW). Produkt B eignet sich für risikobewusste Entscheider (Laplace, Savage). Produkt C ist die sicherste Wahl (Maximin). Die Methode sollte zur Risikohaltung des Entscheiders passen – es gibt keine universell "richtige" Antwort.

5 Toolbeschreibung

Entscheidungstabellen-Tool – alle 6 Methoden

Das Tool berechnet alle sechs Entscheidungsregeln interaktiv für beliebige Matrizen.

5.1 Eingabe

- **Matrixgröße:** 2–8 Alternativen, 2–8 Umweltzustände.
- **Ziel:** Maximierung (Gewinn/Nutzen) oder Minimierung (Kosten/Verlust).
- **Namen:** Alternativen- und Zustandsnamen direkt in der Tabelle editieren.
- **Werte:** Ergebniswerte direkt in die Matrix eingeben.

- **Wahrscheinlichkeiten:** Optional aktivierbar für die Erwartungswert-Methode.
- **Hurwicz-α:** Schieberegler von 0 (pessimistisch) bis 1 (optimistisch).

5.2 Dateneingabe

1. **Neu (leer):** Leere Matrix in gewählter Größe.
2. **Manuell:** Werte direkt in die Zellen eingeben.
3. **CSV-Import:** Datei im Format:
   ```
   ;Z1-Name;Z2-Name;...
   P;0.2;0.4;...    (optional, für Wahrscheinlichkeiten)
   Alternative 1;Wert11;Wert12;...
   Alternative 2;Wert21;Wert22;...
   ```
4. **CSV-Export:** Aktuelle Matrix speichern.

5.3 Ausgabe

- **Übersichts-Karten:** Empfehlung jeder Methode mit Kennwert.
- **Stimmenauszählung:** Wie viele Methoden empfehlen welche Alternative?
- **Detailtabellen:**
  - Originale Entscheidungsmatrix
  - Zeilenextrema (Maximax/Maximin)
  - Laplace-Durchschnitte und Erwartungswerte
  - Hurwicz-Berechnung ($H = \alpha \cdot \text{best} + (1 - \alpha) \cdot \text{worst}$)
  - Vollständige Bedauernsmatrix (Savage-Niehans)

6 Zusammenfassung

Kernpunkte: Entscheidung unter Unsicherheit

1. Die **Entscheidungsmatrix** enthält Ergebniswerte für alle Kombinationen von Alternativen und Umweltzuständen.
2. **Maximax** – optimistisch: wählt die Alternative mit dem besten denkbaren Ergebnis.
3. **Maximin (Wald)** – pessimistisch: maximiert das schlechteste Ergebnis.
4. **Laplace** – neutral: gleiche Wahrscheinlichkeiten, höchster Durchschnitt.
5. **Hurwicz** – flexibel: α steuert den Optimismusgrad.
6. **Savage-Niehans** – minimiert das maximale Bedauern über verpasste Chancen.
7. **Erwartungswert** – rationell bei bekannten Wahrscheinlichkeiten.
8. Verschiedene Methoden können zu **unterschiedlichen Empfehlungen** führen. Die Wahl der Methode sollte die **Risikohaltung** des Entscheiders widerspiegeln.