Aufgabensammlung

Entscheidungstheorie – Entscheidung unter Unsicherheit

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Stufe 1: Leicht **2**
Aufgabe 1.1 2
Aufgabe 1.2 3

2 Stufe 2: Mittel **5**
Aufgabe 2.1 5
Aufgabe 2.2 6

3 Stufe 3: Schwer **8**
Aufgabe 3.1 8
Aufgabe 3.2 9

1 Stufe 1: Leicht

Aufgabe 1.1 – Maximax und Maximin

Aufgabe 1.1

Ein Investor prüft drei Anlageoptionen. Die erwarteten Renditen (in Tsd. Euro) hängen von der Konjunkturentwicklung ab:

Alternative	Aufschwung	Stagnation	Rezession
Aktien	80	20	-30
Anleihen	30	25	15
Tagesgeld	15	15	15

(a) Wende die **Maximax**-Regel an und begründe die Entscheidung.

(b) Wende die **Maximin**-Regel an und begründe die Entscheidung.

(c) Erkläre, welche Risikohaltung hinter jeder Regel steht.

(d) Welche Alternative würde ein sehr risikoaverser Investor wählen?

Lösung: Aufgabe 1.1

(a) Maximax – bestes mögliches Ergebnis je Alternative:

Alternative	Aufschwung	Stagnation	Rezession	**Maximum**
Aktien	80	20	-30	**80**
Anleihen	30	25	15	30
Tagesgeld	15	15	15	15

$\Rightarrow$ **Aktien** (Maximum = 80). Wer optimistisch ist und auf Aufschwung setzt, wählt die renditereichste Option.

(b) Maximin – bestes Minimum (worst case):

Alternative	Aufschwung	Stagnation	Rezession	**Minimum**
Aktien	80	20	-30	-30
Anleihen	30	25	15	15
Tagesgeld	15	15	15	**15**

$\max(\min) = 15$ bei Tagesgeld *und* Anleihen. $\Rightarrow$ **Tagesgeld oder Anleihen**. Da beide dasselbe Minimum haben, ist Anleihen vorzuziehen (höheres Maximum).

(c) Risikohaltung:

- Maximax: *optimistisch* – rechnet immer mit dem besten Zustand.

- Maximin: *pessimistisch* – rechnet immer mit dem schlechtesten Zustand (Wald-Kriterium).

(d) Risikoaverser Investor: **Tagesgeld** – garantierte 15 Tsd. Euro ohne jedes Verlustrisiko.

Aufgabe 1.2 – Laplace und Hurwicz

Aufgabe 1.2

Ein Unternehmen plant die Einführung eines neuen Produkts. Die prognostizierten Deckungsbeiträge (Tsd. Euro) in Abhängigkeit von der Marktnachfrage:

Alternative	Hohe NF	Mittlere NF	Niedrige NF	Keine NF
Massenproduktion	200	120	30	-50
Serienproduktion	140	100	60	0
Kleinserie	80	70	65	50

(a) Wende die **Laplace**-Regel an.

(b) Wende die **Hurwicz**-Regel für $\alpha = 0{,}4$ und $\alpha = 0{,}7$ an.

(c) Für welchen Wert von α ist die Kleinserie genauso attraktiv wie die Massenproduktion?

Lösung: Aufgabe 1.2

(a) Laplace ($p_j = 1/4 = 0{,}25$):

$$\begin{aligned}\bar{e}_{\text{Masse}} &= (200 + 120 + 30 - 50)/4 = 300/4 = 75{,}0\\ \bar{e}_{\text{Serie}} &= (140 + 100 + 60 + 0)/4 = 300/4 = 75{,}0\\ \bar{e}_{\text{Klein}} &= (80 + 70 + 65 + 50)/4 = 265/4 = 66{,}25\end{aligned}$$

Gleichstand: **Massenproduktion = Serienproduktion** (beide 75,0).
(b) Hurwicz $H_i = \alpha \cdot \max + (1-\alpha) \cdot \min$:
Für $\alpha = 0{,}4$:

$$\begin{aligned}H_{\text{Masse}} &= 0{,}4 \cdot 200 + 0{,}6 \cdot (-50) = 80 - 30 = 50\\ H_{\text{Serie}} &= 0{,}4 \cdot 140 + 0{,}6 \cdot 0 = 56\\ H_{\text{Klein}} &= 0{,}4 \cdot 80 + 0{,}6 \cdot 50 = 32 + 30 = 62\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Kleinserie** ($H = 62$).
Für $\alpha = 0{,}7$:

$$\begin{aligned}H_{\text{Masse}} &= 0{,}7 \cdot 200 + 0{,}3 \cdot (-50) = 140 - 15 = 125\\ H_{\text{Serie}} &= 0{,}7 \cdot 140 + 0{,}3 \cdot 0 = 98\\ H_{\text{Klein}} &= 0{,}7 \cdot 80 + 0{,}3 \cdot 50 = 56 + 15 = 71\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Massenproduktion** ($H = 125$).
(c) Schwellenwert α^*: Kleinserie = Massenproduktion:

$$\alpha \cdot 80 + (1-\alpha) \cdot 50 = \alpha \cdot 200 + (1-\alpha) \cdot (-50)$$

$80\alpha + 50 - 50\alpha = 200\alpha - 50 + 50\alpha \quad \Rightarrow \quad 30\alpha + 50 = 250\alpha - 50 \quad \Rightarrow \quad 220\alpha = 100 \quad \Rightarrow \quad \alpha^* = \frac{100}{220}$

Für $\alpha < 0{,}455$: Kleinserie. Für $\alpha > 0{,}455$: Massenproduktion.

2 Stufe 2: Mittel

Aufgabe 2.1 – Savage-Niehans und Methodenvergleich

Aufgabe 2.1

Ein Logistikunternehmen entscheidet über die Wahl des Transportweges. Kosten (Tsd. Euro) in Abhängigkeit vom Verkehrsaufkommen (Minimierungsproblem):

Alternative	Gering	Normal	Hoch	Sehr hoch
Route A (Autobahn)	40	60	90	140
Route B (Landstraße)	50	55	70	80
Route C (Schiene)	65	65	65	65

(a) Bilde die Bedauernsmatrix (Savage-Niehans).

(b) Welche Route empfiehlt die Savage-Niehans-Regel?

(c) Wende zusätzlich Maximin und Laplace an (Achtung: Minimierung!).

(d) Erstelle eine Übersichtstabelle aller drei Methoden und gib eine Empfehlung.

Lösung: Aufgabe 2.1

(a) Bedauernsmatrix:
Bei Minimierung: $r_{ij} = e_{ij} - \min_k e_{kj}$ (Spaltenminimum statt -maximum).
Spaltenminima: Gering=40, Normal=55, Hoch=65, Sehr hoch=65.

Alternative	Gering	Normal	Hoch	Sehr hoch	**max Bedauern**
Route A	$40-40=0$	$60-55=5$	$90-65=25$	$140-65=75$	**75**
Route B	$50-40=10$	$55-55=0$	$70-65=5$	$80-65=15$	15
Route C	$65-40=25$	$65-55=10$	$65-65=0$	$65-65=0$	**25**

(b) Savage-Niehans: $\min(\text{max Bedauern}) = 15 \Rightarrow$ **Route B**.
(c) Maximin (= Minimax bei Minimierung):
Zeilenmaximum: A=140, B=80, C=65. $\min(\max) = 65 \Rightarrow$ **Route C**.
Laplace ($\bar{e}_i = \frac{1}{4}\sum_j e_{ij}$): $\bar{e}_A = (40+60+90+140)/4 = 82{,}5$, $\bar{e}_B = (50+55+70+80)/4 = 63{,}75$, $\bar{e}_C = 65$. $\min(\bar{e}) = 63{,}75 \Rightarrow$ **Route B**.
(d) Übersicht:

Methode	Empfehlung	Kennwert
Maximin/Minimax	Route C	max. Kosten = 65
Laplace	Route B	Ø = 63,75
Savage-Niehans	Route B	max. Bedauern = 15

Empfehlung: Route B – wird von zwei Methoden empfohlen und bietet guten Ausgleich zwischen Kosten und Risiko.

Aufgabe 2.2 – Erwartungswert und Sensitivität

Aufgabe 2.2

Ein Pharmaunternehmen prüft drei Forschungsprojekte. Erwartete Gewinne (Mio. Euro):

Projekt	Erfolg	Teilerfolg	Misserfolg
Projekt X	500	100	−200
Projekt Y	300	150	50
Projekt Z	200	180	120

Die Forschungsabteilung schätzt: $P(\text{Erfolg}) = 0{,}3$, $P(\text{Teilerfolg}) = 0{,}5$, $P(\text{Misserfolg}) = 0{,}2$.

(a) Berechne den Erwartungswert für alle drei Projekte.

(b) Welches Projekt empfiehlt die Erwartungswert-Regel?

(c) Um wie viel Prozent müsste $P(\text{Erfolg})$ sinken, damit Projekt Y attraktiver als Projekt X wird? (Annahme: $P(\text{Teilerfolg})$ bleibt, Misserfolg erhält die Restwahrscheinlichkeit.)

(d) Wende zusätzlich Maximin an und vergleiche.

Lösung: Aufgabe 2.2

(a) Erwartungswerte:

$$E[X] = 0{,}3 \cdot 500 + 0{,}5 \cdot 100 + 0{,}2 \cdot (-200) = 150 + 50 - 40 = \mathbf{160}$$
$$E[Y] = 0{,}3 \cdot 300 + 0{,}5 \cdot 150 + 0{,}2 \cdot 50 = 90 + 75 + 10 = \mathbf{175}$$
$$E[Z] = 0{,}3 \cdot 200 + 0{,}5 \cdot 180 + 0{,}2 \cdot 120 = 60 + 90 + 24 = \mathbf{174}$$

(b) $\Rightarrow$ **Projekt Y** ($E = 175$ Mio. Euro).
(c) Sensitivitätsanalyse:

Sei p die neue Erfolgswahrscheinlichkeit (Misserfolg $= 0{,}2 + (0{,}3 - p)$):

$$E[X](p) = p \cdot 500 + 0{,}5 \cdot 100 + (0{,}5 - p) \cdot (-200) = 500p + 50 - 100 + 200p = 700p - 50$$
$$E[Y](p) = p \cdot 300 + 0{,}5 \cdot 150 + (0{,}5 - p) \cdot 50 = 300p + 75 + 25 - 50p = 250p + 100$$

Gleichung $E[X] = E[Y]$:

$$700p - 50 = 250p + 100 \quad \Rightarrow \quad 450p = 150 \quad \Rightarrow \quad p^* = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$$

P(Erfolg) muss von 0,30 auf unter 0,333 sinken – also schon ein **minimaler Rückgang** macht Y attraktiver. Bei $p = 0{,}3$ gilt $E[Y] = 175 > E[X] = 160$ (bereits jetzt Y besser).
Kontrolle: Y ist bereits besser. Frage umgekehrt: Ab welchem p wird X besser als Y? $p > 1/3 \approx 0{,}333$ – also bei einem Anstieg von 0,3 auf über 0,333.
(d) Maximin: Minima: X=−200, Y=50, Z=120. $\Rightarrow$ **Projekt Z** (sicherstes Minimum).
Vergleich: Erwartungswert $\rightarrow$ Y; Maximin $\rightarrow$ Z. Risikoreicher Entscheider wählt Y, risikoaverser Z.

3 Stufe 3: Schwer

Aufgabe 3.1 – Alle sechs Methoden im Vergleich

Aufgabe 3.1

Ein Energieunternehmen entscheidet über den Ausbau seiner Erzeugungskapazitäten. Gewinn (Mio. Euro) in Abhängigkeit von der Energienachfrage-Entwicklung:

Alternative	Stark steigend	Moderat	Stagnierend	Sinkend
Solar-Groß	300	180	80	−40
Wind-Offshore	250	200	90	0
Gas-Backup	160	140	120	100
Kernkraft	220	220	220	220

Expertenwahrscheinlichkeiten: $P = (0{,}25;\ 0{,}35;\ 0{,}25;\ 0{,}15)$.

(a) Wende alle sechs Methoden an (Maximax, Maximin, Laplace, Hurwicz mit $\alpha = 0{,}6$, Savage-Niehans, Erwartungswert).

(b) Erstelle eine vollständige Vergleichstabelle.

(c) Welche Alternative erhält die meisten Stimmen?

(d) Interpretiere das Ergebnis: Wann würde man trotzdem eine Methode mit weniger Stimmen bevorzugen?

Lösung: Aufgabe 3.1

(a) Alle Methoden:

Maximax: max: Solar=300, Wind=250, Gas=160, Kern=220. $\Rightarrow$ **Solar** (300).
Maximin: min: Solar=−40, Wind=0, Gas=100, Kern=220. $\Rightarrow$ **Kernkraft** (220).
Laplace: $\bar{e} = \frac{1}{4}\sum_j$: Solar=$(300+180+80-40)/4 = 130$, Wind=$(250+200+90+0)/4 = 135$, Gas=$(160+140+120+100)/4 = 130$, Kern=220. $\Rightarrow$ **Kernkraft** (220).
Hurwicz ($\alpha = 0{,}6$)**:** $H_i = 0{,}6 \cdot \max + 0{,}4 \cdot \min$: $H_{\text{Solar}} = 0{,}6 \cdot 300 + 0{,}4 \cdot (-40) = 180 - 16 = 164$, $H_{\text{Wind}} = 0{,}6 \cdot 250 + 0{,}4 \cdot 0 = 150$, $H_{\text{Gas}} = 0{,}6 \cdot 160 + 0{,}4 \cdot 100 = 96 + 40 = 136$, $H_{\text{Kern}} = 0{,}6 \cdot 220 + 0{,}4 \cdot 220 = 220$. $\Rightarrow$ **Kernkraft** (220).
Savage-Niehans: Spaltenoptima: 300, 220, 220, 220.

	Stark	Moderat	Stagn.	Sinkend	max Bed.
Solar	0	40	140	260	**260**
Wind	50	20	130	220	**220**
Gas	140	80	100	120	**140**
Kern	80	0	0	0	80

$\Rightarrow$ **Kernkraft** (max. Bedauern = 80).
Erwartungswert: $E[\text{Solar}] = 0{,}25 \cdot 300 + 0{,}35 \cdot 180 + 0{,}25 \cdot 80 + 0{,}15 \cdot (-40) = 75 + 63 + 20 - 6 = 152$
$E[\text{Wind}] = 0{,}25 \cdot 250 + 0{,}35 \cdot 200 + 0{,}25 \cdot 90 + 0{,}15 \cdot 0 = 62{,}5 + 70 + 22{,}5 + 0 = 155$
$E[\text{Gas}] = 0{,}25 \cdot 160 + 0{,}35 \cdot 140 + 0{,}25 \cdot 120 + 0{,}15 \cdot 100 = 40 + 49 + 30 + 15 = 134$
$E[\text{Kern}] = 220$ (konstant). $\Rightarrow$ **Kernkraft** (220).
(b) Vergleichstabelle:

Methode	Empfehlung	Kennwert	Stimmen
Maximax	Solar	300	1
Maximin	Kernkraft	220	
Laplace	Kernkraft	220	
Hurwicz ($\alpha = 0{,}6$)	Kernkraft	220	
Savage-Niehans	Kernkraft	80	
Erwartungswert	Kernkraft	220	5

(c) Stimmenmehrheit: **Kernkraft** gewinnt mit 5 von 6 Stimmen.
(d) Interpretation: Trotz der klaren Mehrheit für Kernkraft könnte man Solar wählen, wenn man *sehr optimistisch* ist und das hohe Aufwärtspotenzial (300) priorisiert – z. B. bei einem Unternehmen, das ohnehin existenzbedrohliche Schulden hat und auf eine "Alles-oder-Nichts"-Strategie setzt (Maximax). Außerdem: Bei niedrigem α in Hurwicz oder sehr hohen Erfolgswahrscheinlichkeiten könnte Wind oder Solar attraktiver werden.

Aufgabe 3.2 – Erweitertes Problem: Minimierung und Sensitivität

Aufgabe 3.2

Ein Produktionsleiter wählt zwischen vier Fertigungsstrategien. Kosten (Tsd. Euro) abhängig von der Nachfrageentwicklung (Minimierungsproblem):

Strategie	Boom	Normal	Schwach	Krise
Vollautomatisierung	80	90	140	200
Teilautomatisierung	100	100	110	130
Manuell flexibel	120	115	105	90
Outsourcing	110	105	100	95

Wahrscheinlichkeiten: $P = (0{,}30;\ 0{,}40;\ 0{,}20;\ 0{,}10)$.

(a) Wende Minimax (Maximin für Kosten), Laplace, Savage-Niehans und Erwartungswert an.

(b) Erstelle die vollständige Bedauernsmatrix.

(c) Für welchen Hurwicz-α-Wert (Minimierung: $H_i = \alpha \cdot \min_j + (1-\alpha) \cdot \max_j$) wechselt die Entscheidung von Outsourcing zu Vollautomatisierung?

(d) Welche Strategie ist am robustesten gegenüber Unsicherheit in den Wahrscheinlichkeiten? Begründe.

Lösung: Aufgabe 3.2

(a) Methoden:
Minimax (min des Zeilenmaximums): max: Voll=200, Teil=130, Man=120, Out=110. $\min(200, 130, 120, 110) = 110 \Rightarrow$ **Outsourcing**.
Laplace ($\bar{c}_i = \frac{1}{4}\sum_j c_{ij}$): Voll=$(80+90+140+200)/4 = 127{,}5$, Teil=$(100+100+110+130)/4 = 110$, Man=$(120+115+105+90)/4 = 107{,}5$, Out=$(110+105+100+95)/4 = 102{,}5$. $\min = 102{,}5 \Rightarrow$ **Outsourcing**.
Erwartungswert: $E[\text{Voll}] = 0{,}3 \cdot 80 + 0{,}4 \cdot 90 + 0{,}2 \cdot 140 + 0{,}1 \cdot 200 = 24 + 36 + 28 + 20 = 108$
$E[\text{Teil}] = 0{,}3 \cdot 100 + 0{,}4 \cdot 100 + 0{,}2 \cdot 110 + 0{,}1 \cdot 130 = 30 + 40 + 22 + 13 = 105$
$E[\text{Man}] = 0{,}3 \cdot 120 + 0{,}4 \cdot 115 + 0{,}2 \cdot 105 + 0{,}1 \cdot 90 = 36 + 46 + 21 + 9 = 112$
$E[\text{Out}] = 0{,}3 \cdot 110 + 0{,}4 \cdot 105 + 0{,}2 \cdot 100 + 0{,}1 \cdot 95 = 33 + 42 + 20 + 9{,}5 = 104{,}5$
$\min = 104{,}5 \Rightarrow$ **Outsourcing**.
(b) Bedauernsmatrix ($r_{ij} = c_{ij} - \min_k c_{kj}$):
Spaltenminima: Boom=80, Normal=90, Schwach=100, Krise=90.

	Boom	Normal	Schwach	Krise	max Bed.
Vollautom.	0	0	40	110	**110**
Teilautom.	20	10	10	40	40
Man. flex.	40	25	5	0	40
Outsourcing	30	15	0	5	30

Savage-Niehans: $\min(110, 40, 40, 30) = 30 \Rightarrow$ **Outsourcing**.
(c) Hurwicz-Schwellenwert ($H_i = \alpha \cdot \min_j c_{ij} + (1-\alpha) \cdot \max_j c_{ij}$):

min: Voll=80, Out=95. max: Voll=200, Out=110.

$$H_{\text{Voll}} = 80\alpha + 200(1-\alpha) = 200 - 120\alpha$$
$$H_{\text{Out}} = 95\alpha + 110(1-\alpha) = 110 - 15\alpha$$

Gleichstand: $200 - 120\alpha = 110 - 15\alpha \Rightarrow 90 = 105\alpha \Rightarrow \alpha^* = \frac{90}{105} \approx \mathbf{0{,}857}$
Für $\alpha > 0{,}857$ (sehr optimistisch für niedrige Kosten) gewinnt Vollautomatisierung.
(d) Robusteste Strategie: Outsourcing – es hat das kleinste maximale Bedauern (30), den niedrigsten Laplace-Durchschnitt (102,5) und den besten Erwartungswert (104,5). Bei Unsicherheit über die Wahrscheinlichkeiten bleibt Outsourcing über alle Szenarien hinweg stabil im vorderen Bereich, ohne bei einem einzelnen Zustand extrem schlecht abzuschneiden.